# TRAITEMENT STATISTIQUE DES DONNÉES

S2 - Master PHEAPC

## Chapitre 5 : Tests d'hypothèses

**Pr. M. EL KACIMI**[1]

[1]Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Physique

**Année universitaire 2019/2020**

# Chapitre 5 : Tests d'hypothèses

# Introduction

Les tests statistiques constituent une approche décisionnelle dans les statistiques inférentielles.

Il s'agit de décider sur la base d'un échantillon de données si une caractéristique de la population satisfait ou non une certaine spécification que l'on formule sous forme d'hypothèse.

Les hypothèses portent sur le paramètre inconnu $\theta$ de la loi mère, ou sur une fonction de ce paramètre $h(\theta)$, correspondant à la caractéristique de la population. Dans ce cas, on parle de tests paramétriques. Dans le cas d'un espace paramétrique simple $\Theta \subseteq \mathbb{R}$, l'hypothèse spécifiera une valeur ou un intervalle de valeurs.

Les tests statistiques permettent également d'aborder une variété d'hypothèses de nature plus complexe et au-delà du cadre paramétrique. Toutefois, ces derniers ne rentrent pas dans le cadre de ce cours.

# Cadre paramétrique

Soit $x_1, \cdots, x_n$ un échantillon de données observées d'une population $X \sim f(x; \boldsymbol{\theta})$, avec $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \cdots, \theta_r)^T$, $r$ étant le nombre de paramètres inconnus. La forme fonctionnelle $f$ est connue et $\theta$ peut être connu ou non. L'espace des valeurs prises par $\boldsymbol{\theta} \in \Theta^r \supseteq \mathbb{R}^r$ est appelé l'espace paramétrique.

Dans l'approche paramétrique générale, un test statistique consiste à construire une règle de décision qui permet d'accepter ou de rejeter une hypothèse spécifiant que $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ :

L'hypothèse de référence est appélée l'hypothèse nulle et est notée $H_0$.

A contrario, on définit l'hypothèse altérnative, notée $H_1$, pour laquelle $\theta \in \Theta_1 = \Theta - \Theta_0$.

On décrit la situation en écrivant que l'on teste :

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad vs. \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Selon la nature de $\Theta_0$ et de $\Theta_1$ on distingue :

- $H_0$ simple et $H_1$ simple : $\Longrightarrow \Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ alors $H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs. \quad H_1 : \theta = \theta_1$
- $H_0$ simple et $H_1$ multiple : alors $H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs. \quad H_1 : \theta \neq \theta_1$($|\Theta_0| = 1$[1] et $|\Theta_1| > 1$).
- $H_0$ multiple et $H_1$ multiple : alors $H_0 : \theta \neq \theta_0 \quad vs. \quad H_1 : \theta \neq \theta_1$($|\Theta_0| > 1$ et $|\Theta_1| > 1$).

1. $|\Theta_i|$ étant le cardinal de l'ensemble de valeurs prises par $\theta$ dans le cadre de l'hypothèse

# Chapitre 5 : Tests d'hypothèses

# Test d'une hopthèse simple

Nous allons établir quelques définitions dans le cadre d'hypothèses simples et qui sont généralisables dans le cas d'hypothèses multiples. L'espace paramétrique est donc $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$, la valeur $\theta_0$ étant à tester :

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs. \quad H_1 : \theta = \theta_1.$$

**Construction du test**

1. Règle de décision : Construire une statistique $T = h(x_1, \cdots, x_n)$ [2] dont on connait la pdf sous l'hypothèse $H_0$ et tel que $T = t \in \mathbb{R}$.
2. Définir la règle de décision associée à $H_0$ en fonction des valeurs prises par la statistique du test $T$ ;
3. Construire les régions d'acceptation et de rejet en terme de valeurs prises par $T$ sous l'hypothèse $H_0$ comme suit
   - $H_0$ est acceptée si $t \in A \subset \mathbb{R}$ ;
   - $H_0$ est rejetée si $t \in \bar{A}$(partie complémentaire).

La région $A$, en général un intervalle de $\mathbb{R}$, est la région d'acceptation et $\bar{A}$, son complémentaire, est la région de rejet.

2. appelée statistique du test.

# Types d'erreurs : définitions

On distingue deux types d'erreur possibles liés à la procédure définie pour le test :

**Type I :** rejeter $H_0$ alors qu'elle est vraie ($\theta = \theta_0$), c'est l'erreur de première espèce ;

**Type II :** accepter $H_0$ alors qu'elle est fausse ($\theta = \theta_1$), c'est l'erreur de deuxième espèce.

Comme le résultat est basé sur l'échantillon aléatoire $x_1, \cdots, x_n$, on caractérise chaque type d'erreur par sa probabilité.

En théorie de la décision, une probabilité d'erreur est appelée risque.

## Définition

On appelle risque de première espèce, noté $\alpha$, la probabilité de rejeter $H_0$ alors qu'elle est vraie :

$$\alpha = P_{\theta_0}(T \in \bar{A}) = P(T \in \bar{A} | H_0)$$

On appelle risque de deuxième espèce, noté $\beta$, la probabilité d'accepter $H_0$ alors que $H_1$ est vraie :

$$\beta = P_{\theta_1}(T \in A) = P(T \in A | H_1).$$

# Types d'erreurs : définitions

## Quelques commentaires

### Propriétés

$\Longrightarrow$ Les risques $\alpha$ et $\beta$ sont interdépendants puisqu'ils sont calculés sur des intervalles complémentaires l'un de l'autre ;

$\Longrightarrow$ Dans un test, on privéligie le risque $\alpha$ que l'on se fixe à priori, et le plus souvent respectivement aux valeurs $\alpha = 0.05, 0.01, \cdots$ : $\alpha$ est appelé le niveau ou le niveau de signification [a] du test.. Ce niveau ayant été fixé, il s'agit de déterminer une région de rejet $\bar{A}$.

$\Longrightarrow$ Dans la construction du test, il faut donc choisir une statistique de test pertinente [b] parfaitement connue sous l'hypothèse $H_0$, ie la pdf $g(T|H_0)$ est connue. Notons par $h(T|H_1)$ la pdf de $T$ sous l'hypothèse alternative $H_1$.

$\Longrightarrow$ Dans une procédure de test, on contrôle le risque $\alpha$ mais pas le risque $\beta$ : on souhaite limiter le risque de rejeter $H_0$ à tort à un faible niveau.

**Le rejet d'une hypothèse nulle est une vraie décision alors que son acceptation est plutôt un défaut de rejet.**

---

*a*. Voir p-valeur.
*b*. Le plus optimal est que la statistique soit suffisante.

# Propriétés des tests : puissance et biais

## Définitions

Nous allons introduire deux propriétés qui permettront d'optimiser les procédures de test et d'opérer un choix optimal entre plusieurs tests potentiels pour une hypothèse nulle donnée.

### Définition

On appelle puissance d'un test la probabilité de rejeter $H_0$ alors qu'elle est effectivement fausse :

$$P(T \in \bar{A}|H_1) \quad = \quad 1 - P(T \in A|H_1) = 1 - \beta.$$

### Définition

On dit qu'un test est sans biais [a] si sa puissance est suppérieure ou égale à son risque $\alpha$ :

$$P(T \in \bar{A}|H_1) \geq P(T \in \bar{A}|H_0)$$

a. Noter bien la différence de définition du biais pour un estimateur et un test.

# Propriétés des tests : puissance et biais

## Propriétés

$\Longrightarrow$ Le choix entre plusieurs tests potentiels se fera sur la base de la puissance. Notons qu'un test est bien défini par le couple $(T, A)$, puisque $\alpha, \beta$ et donc $1-\beta$ en découlent. Notons par $\mathbb{A}$

$$\mathbb{A} \quad = \quad \{(x_1, \cdots, x_n) | h(x_1, \cdots, x_n) \in A\}$$

l'évènement $(T \in A)$, sous $H_0$ ous sous $H_1$, est identique à $(X_1, \cdots, X_n) \in \mathbb{A}$

$\Longrightarrow$ un test s'identifie à une région d'acceptation dans l'espace des réalisations sans se référer à une statistique de test.

$\Longrightarrow$ **Un test $\tau_1$ est dit puissant qu'un test $\tau_2$ au niveau $\alpha$, si**

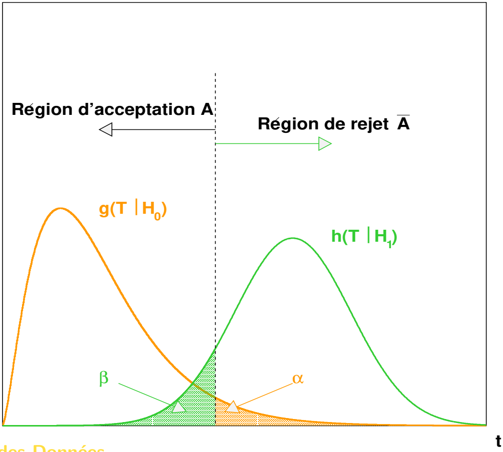
- **i -** $\tau_1$ est de niveau $\alpha$ et $\tau_2$ est de niveau égal ou inferieur à $\alpha$ ;
- **ii-** $\tau_1$ est plus puissant que $\tau_2$ : $(1-\beta)_{\tau_1} > (1-\beta)_{\tau_2}$

$\Longrightarrow$ **Objectif : Trouver le test le plus puissant parmi tous.**

# Illustration graphique

## Illustration graphique des différentes définitions

**Illustration graphique du risque $\alpha$, de l'erreur de type II $\beta$, de la zone de rejet $\bar{A}$ et de celle d'acceptation $A$ de l'hypothèse nulle.**



# Exemple de tests simples : paramètres connus

## Cas où $X$ est une v.a. continue

**Deux machines $M_1$ et $M_2$ produisent le même type de produit mais la qualité des produits de $M_1$ est meilleure.**
**La qualité d'un produit se mesure à l'aide d'un indicateur qui fluctue dans le cas de $M_1$ selon $\mathcal{N}(\mu = 5, \sigma^2 = 1)$ et dans le cas de $M_2$ selon $\mathcal{N}(\mu = 4, \sigma^2 = 1)$. Un client achète le produit le plus cher par lot de 10 et désire développer un test de qualité pour contrôler bien que le produit provient de $M_1$ ; Le test est donc**

$$H_0 : \mu = 5 \quad vs. \quad H_1 : \mu = 4.$$

**On procède comme suit :**

- **étape 1 :** Fixer le niveau du test $\alpha$, si ce n'est pas fait. On prend pour cet exercice $\alpha = 0.05$.
- **étape 2 :** Construire une statistique de test : $T = \sum_{i=1}^{10} X_i/10 = \bar{X}$ où la valeur prise par $X_i$ est la mesure de l'indicateur de qualité.
- **étape 3 :** Déterminer les pdf sous $H_0$, $T \sim \mathcal{N}(5, 1/10)$ et sous $H_1$, $T \sim \mathcal{N}(4, 1/10)$

# Exemple de tests simples : paramètres connus

## Cas où $X$ est une v.a. continue

**étape 4 : Déterminer la région d'acceptation $A$ de $H_0$ avec un niveau $\alpha = 0.05$. On distinguera la forme de l'intervalle $A$.**

### $A$ est Central ou symétrique :

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= \int_{-t_{\alpha/2}}^{t_{\alpha/2}} \mathcal{N}(t;5,1/\sqrt{10})dt \\ \Longrightarrow A &= [5-1.96/\sqrt{10}, 5+1.96/\sqrt{10}] = [4.38, 5.62] \end{aligned}$$

**d'où la règle de décision dans ce cas peut être formulée comme suit**

- **Accepter $H_0$ si la valeur $\bar{x}$ prise par $\bar{X}$ est dans l'intervalle $[4.38, 5.62]$ ;**
- **Rejeter $H_0$ sinon.**

**Calculons la puissance de ce test et vérifons par la même occasion son biais :**

$$\begin{aligned} \beta &= P(4.38 \leq \bar{X} < 5,62|H_1) = \int_{4.38}^{5.62} \mathcal{N}(t;4,1)dt \\ &= P(\frac{4.38-4}{1/\sqrt{10}} < Z < \frac{5.62-4}{1/\sqrt{10}}) \\ &= P(1.20 < Z < 5.12) = 1 - P(Z < 1.20) - P(Z > 5.12) \simeq 0.115 \Longrightarrow 1-\beta = 0.88 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ **ce test est sans biais.**

# Exemple de tests simples : paramètres connus

## Cas où $X$ est une v.a. continue

### $A$ est unilatérale :

Dans ce cas, la région de rejet est située d'un seul côté. Toutefois, comme $X \sim \mathcal{N}(5,1)$ dans le cadre de $H_0$, il est pertinent de considérer la région de rejet vers les valeurs faibles :

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= \int_{t_\alpha}^{+\infty} \mathcal{N}(t;5,1/\sqrt{10})dt \\ \Longrightarrow A &= [5-1.645/\sqrt{10},+\infty] = [4.48,+\infty] \end{aligned}$$

aussi la règle de décision est donnée dans ce cas par :

- Accepter $H_0$ si $\bar{x}$ la valeur prise par $\bar{X}$ est dans l'intervalle $[4.48,+\infty]$ ;
- Rejeter $H_0$ sinon.

Calculons la puissance du test dans ce cas et vérifier le biais

$$\begin{aligned} \beta &= P(\bar{X} > 4.48|H_1) = \int_{4.48}^{+\infty} \mathcal{N}(t;4,1\sqrt{10})dt \\ &= P(Z > \frac{4.48-4}{1/\sqrt{10}}) = P(Z > 1.52) = 1-P(Z \leq 1.52) = 1-0.936 = 0.06 \\ \Longrightarrow 1-\beta &= 0.936 > \alpha \end{aligned}$$

et l'on déduit que le test est sans biais et surtout plus puissant que celui où $A$ est central.

# Chapitre 5 : Tests d'hypothèses

# Test du rapport de vraisemblance

## Définition

Considérons un échantillon de données $x_1, \cdots, x_n$ dont la population $X \sim f(X;\theta)$ et la fonction de vraisemblance

$$L(x_1, \cdots, x_n; \theta) \quad = \quad f(x_1, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta).$$

Nous restons toujours dans le cadre d'hypothèses nulle et alternative simples. Soit $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$. On suppose que le domaine des valeurs prises par $X$ ne dépend pas de $\theta$.

### Définition

On appelle test du rapport de vraisemblance (RV) de l'hypothèse $H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs. \quad H_1 : \theta = \theta_1$ au niveau $\alpha$, le test défini par la région de rejet de la forme

$$\frac{L(x_1, \cdots, x_n; \theta_0)}{L(x_1, \cdots, x_n; \theta_1)} < k_\alpha$$

où $k_\alpha > 0$ déterminée en fonction du risque $\alpha$.

# Test du rapport de vraisemblance

## Propriétés

Ce test présente une certaine logique puisqu'il conduit au rejet de la valeur $\theta_0$ lorsqu'elle est moint vraisemblable que la valeur alternative $\theta_1$

$\Longrightarrow k_\alpha <$1 pour assurer que le risque $\alpha$ soit faible.

Comme $x_1, \cdots, x_n$ sont aléatoires alors le rapport l'est également et donc constitue une statistique.

### Théorème : Lemme de Neyman-Pearson

- Le test RV est le plus puissant quel que soit le choix du risque $\alpha \in ]0,1[$.

Démonstration : Voir TD.

### Propriétés

- Le test du $RV$ est sans biais.

Démonstration : Soit $\mathbb{A}^*$ la région d'acceptation du test $RV$. Pour tout point de $\bar{\mathbb{A}}^*$, nous avons $RV \Longrightarrow f(x_1, \cdots, x_n; \theta_0) < f(x_1, \cdots, x_n; \theta_1)$ et en intégrant dans le domaine $\bar{\mathbb{A}}^*$ nous obtenons $P(\bar{\mathbb{A}}^*|H_0) < P(\bar{\mathbb{A}}^*|H_1)$, ce qui confirme la proposition.

# Test du rapport de vraisemblance

## Exemple

Reprenons l'exemple précédent. La fonction de vraisemblance $L(x_1, \cdots, x_n; \mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}$. Pour être plus général, considérons $H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu = \mu_1$, ce qui donne

$$\begin{aligned} RV = \frac{L(x_1, \cdots, x_n; \mu_0)}{L(x_1, \cdots, x_n; \mu_1)} &= exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i-\mu_1)^2\right]\right\} \\ &= exp\left\{-\frac{n}{2}\left[-2(\mu_0-\mu_1)\bar{x} + (\mu_0^2-\mu_1^2)\right]\right\}. \end{aligned}$$

- **Si** $\mu_0 > \mu_1$, $RV$ est une fonction croissante de $n(\mu_0-\mu_1)\bar{x}$. Dans la région de rejet, $RV < k_\alpha \implies n(\mu_0-\mu_1)\bar{x} < k'_\alpha \implies n\bar{x} < k''_\alpha$ où $k''_\alpha$ est une constante qui se déduit aisément de $k_\alpha$. Alors la région de rejet est $\bar{x} < k''_\alpha/n$.
- **Si** $\mu_0 < \mu_1$ [3] les inégalités s'inversent et la région de rejet est donnée par $\bar{x} > k''_\alpha/n$.

3. Dans ce cas $RV$ est une fonction décroissante de $T = \bar{x}$.

# Test du rapport de vraisemblance

## Exemple

Reprenons les valeurs de l'exemple précédent $\alpha = 0.05$, $\mu_0 = 5, \mu_1 = 4$.

Comme la région de rejet est $\bar{x} < 4.48 \Longrightarrow 10\bar{x} < 44.8$ ce qui donne $k''_\alpha = 44.8 \Longrightarrow k'_\alpha = (5-1) \times k''_\alpha = 44.8$ et $k_\alpha = e^{k'_\alpha + (25-16)}$ ce qui permet d'écrire

$$k_\alpha = e^{\{44.8 - 5\times(25-16)\}} = 0.82.$$

et la règle de décision consiste à rejeter $H_0$ lorsque la vraisemblance de $\mu = 5$ est inférieure à 0.82 fois celle de $\mu = 4$ :

$$\frac{L(x_1, \cdots, x_n; \mu = 5)}{L(x_1, \cdots, x_n; \mu = 4)} < 0.82.$$

Notons que dans ce cas que $RV$ est une fonction croissante de $T = \bar{x}$ et la région de rejet est unilatérale gauche, $\bar{x} < c$. Dans le cas contraire, la région de rejet sera unilatérale droite, $\bar{x} > c$.

# Test du rapport de vraisemblance

## Cas d'un paramètre de dimension 1

Dans le cas où le paramètre $\theta$ est de dimension 1, le test $RV$ se ramène à un test simple.

### Proposition

Si $\exists$ une statistique $T = T(X_1, \cdots, X_n)$ suffisante à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors $RV$ ne dépend de la réalisation $(x_1, \cdots, x_n)$ qu'à travers la valeurs $t = h(x_1, \cdots, x_n)$. De plus si $RV$ est une fonction monotone de $t$ alors :

- la région de rejet est de la forme $t(x_1, \cdots, x_n) < c$ si $RV$ est croissant ;
- la région de rejet est de la forme $t(x_1, \cdots, x_n) > c$ si $RV$ est décroissant.

**Démonstration :**

En effet, si $T$ est une statistique suffisante, alors la fonction de vraisemblance se met sous la forme $L(x_1, \cdots, x_n; \theta_i) = g\left(t(x_1, \cdots, x_n; \theta_i)\right) h(x_1, \cdots, x_n)$ et $RV$ ne dépend plus que de

$g\left(t(x_1, \cdots, x_n; \theta_0)\right) h(x_1, \cdots, x_n) / g\left(t(x_1, \cdots, x_n; \theta_1)\right) h(x_1, \cdots, x_n) =$
$g\left(t(x_1, \cdots, x_n; \theta_0)\right) / g\left(t(x_1, \cdots, x_n; \theta_1)\right)$. En plus si $g(t; \theta_0)/g(t; \theta_1)$ est une fonction monotone, l'inégalité $g(t; \theta_0)/g(t; \theta_1) < k_\alpha$ se traduit par une inégalité sur $t$.

# Test du RV : cas des lois de la famille exponentielle

## Cas d'un paramètre de dimension 1

### Proposition

Si la loi de la population appartient à la famille de la classe exponentielle :

$$f(x;\theta) \quad = \quad a(\theta)b(x)e^{c(\theta)d(x)}$$

alors le test de $RV$ a une région de rejet de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) < k \qquad \text{si} \qquad c(\theta_0) - c(\theta) > 0$$

$$\text{ou} \quad \sum_{i=1}^{n} d(x_i) > k \qquad \text{si} \qquad c(\theta_0) - c(\theta) < 0$$

**Démonstration :**

Le $RV$ est égal à $[a(\theta_0)/a(\theta_1)]^n \, e^{[c(\theta_0)-c(\theta_1)]\sum_{i=1}^n d(x_i)}$ qui est une fonction monotone et dont le sens de variation dépend du signe de $c(\theta_0) - c(\theta_1)$.
$RV < k_\alpha \Longrightarrow$ une inégalité sur $\sum_{i=1}^n d(x_i) < k'_\alpha$ si $RV$ est croissante et $\sum_{i=1}^n d(x_i) > k'_\alpha$ si $RV$ est décroissante.

# Test du RV : cas des lois de la famille exponentielle

## Exemple

**Considérons le test** $H_0 : p = p_0 \quad vs. \quad H_1 : p = p_1$ **où** $\theta = p$ **est le paramètre de la loi Bernoulli** $f(x;p) = p^x(1-p)^{1-x}$**,** $x \in \{0,1\}$**.** $p_0 > p_1$**.**

**Montrons que cette loi appartient à la famille des lois exponentielles :**

$$f(x;p) = p^x(1-p)^{1-x} = (1-p)e^{\left[\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\right]x} \Longrightarrow d(x) = x \text{ et } c(\theta) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$$

$$\Longrightarrow RV = \frac{1-p_0}{1-p_1} e^{\left[\ln\left(\frac{p_0}{1-p_0}\right) - \ln\left(\frac{p_1}{1-p_1}\right)\right]\sum_{i=1}^n x_i}$$

**Comme** $p_0 > p_1$ **alors** $\frac{p_0}{1-p_0} > \frac{p_1}{1-p_1} \Longrightarrow \ln\left(\frac{p_0}{1-p_0}\right) > \ln\left(\frac{p_1}{1-p_1}\right)$ **ce qui mplique que** $RV$ **est croissant et la région de rejet est de la forme** $\sum_{i=1}^n d(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i = t(x_1, \cdots, x_n) < k'_\alpha$**.**

**Comme** $X_i \sim \mathcal{B}(p) \Longrightarrow T \sim \mathcal{B}(n,p)$**.** $\alpha = 0.05$ **et** $k'_\alpha$ **est la valeur du quantile d'ordre 0.05 de la loi** $\mathcal{B}(n, p_0)$ **ou de celui du risque qui est immédiatement inférieur à 0.05 figurant sur la table de la loi. La puissance est obtenue également à partir de la table de la loi** $\mathcal{B}(n, p_1)$**.**

# Chapitre 5 : Tests d'hypothèses

# Tests d'hypothèses multiples

## Risques, puissance et optimalité

**Lorsque l'une des hypothèses $H_0$ ou $H_1$ est multiple, les définitions données doivent être adaptées.**

**En effet, lorsque l'hypothèse nulle est composite le risque de première espèce dépend de la valeur prise par le paramètre, $\alpha(\theta)$. De même, lorsque l'hypothèse alternative est composite le risque de seconde espèce dépend de la valeur prise par le paramètre, $\beta(\theta)$, ce qui implique que la puissance du test est une fonction de $\theta$. Reprenons la notation générale utilisée au début de ce chapitre :**
$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad vs. \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$.

### Définition

**Soient $H_0 : \theta \in \Theta_0$ et $H_1 : \theta \in \Theta_1$ respectivement les hypothèses nulle et alternative, toutes deux multiples. Soient $\alpha(\theta)$ et $\beta(\theta)$ respectivement les risques de première et de seconde espèces. On appelle le niveau du test, $\alpha$ :**

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \alpha(\theta).$$

**La puissance du test est une fonction de $\theta$, $1 - \beta(\theta)$, $\theta \in \Theta_1$.**

# Tests d'hypothèses multiples

## Risques, puissance et optimalité

### Définition

On dit qu'un test est sans biais, dans le cadre d'hypothèses multiples, si la fonction puissance est supérieure ou égale à son niveau $\alpha$ :

$$P(T \in \bar{A}|H_1) \geq \alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \alpha(\theta) \Longrightarrow (1-\beta(\theta)) \geq \alpha \quad \forall\, \theta \in \Theta_1.$$

En d'autres termes, la probabilité de rejeter $H_0$ si elle est fausse $\forall\, \theta \in \Theta_1$ est supérieure à celle de rejeter $H_0$ si elle est vraie $\forall\, \theta \in \Theta_0$.

### Définition

On dit que le test $\tau_1$ de niveau $\alpha$ est uniformément plus puissant que le test $\tau_2$ au niveau $\alpha$ si :

- $\tau_1$ est de niveau $\alpha$ et $\tau_2$ est de niveau égal ou inferieur à $\alpha$ ;
- $(1-\beta(\theta))_{\tau_1} \geq (1-\beta(\theta))_{\tau_2} \forall\, \theta \in \Theta_1$ et $\exists \theta^* \in \Theta_1$ tel que $(1-\beta(\theta^*))_{\tau_1} > (1-\beta(\theta))_{\tau_2}$ pour tout $\theta \in \Theta_1$.

# Tests d'hypothèses multiples

## Tests d'hypothèses unilatérales

Il s'agit de situations de test de type :

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \qquad vs. \qquad H_1 : \theta > \theta_0$$
$$\text{ou } H_0 : \theta \geq \theta_0 \qquad vs. \qquad H_1 : \theta < \theta_0$$

où $\theta$ est un paramètre de dimension 1 et $\Theta \subseteq \mathbb{R}$.

**Noter bien que la région de rejet dans ce cas est de la forme $T > c$ ou $T < c$.**

### Proposition

S'il existe une statistique suffisante $T = T(X_1, \cdots, X_n)$ et si pour tout couple $(\theta, \theta')$, avec $\theta < \theta'$, le $RV$ $L(x_1, \cdots, x_n; \theta)/L(x_1, \cdots, x_n; \theta')$ est une fonction monotone, alors il existe un test uniformément le plus puissant (UPP) pour les situations d'hypothèses unilatérales et la région de rejet est de la forme soit $t(x_1, \cdots, x_n) > k$ soit $t(x_1, \cdots, x_n) < k$.

$\Longrightarrow$ Les lois de la famille exponentielle rentrent dans ce casdre.

**Exemple :** Considérons la loi mère $\mathcal{N}(\mu, 1)$ où $\mu$ est inconnu. Testons l'hypothèse $H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu > \mu_0$.

On peut écrire $f(x; \mu) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2} = (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{1}{2}\mu^2} e^{\mu x}$. En utilisant les notations de la classe exponentielle, $c(\mu) = \mu$ et $d(x) = x$. Le test UPP a donc une région de rejet de la forme $\sum_{i=1}^{n} x_i < k$ ou $\sum_{i=1}^{n} x_i > k$ selon le signe de $\mu$.

# Tests d'hypothèses multiples

## Tests d'hypothèses unilatérales : Exemple

**Calculons le rapport de vraisemblance :**

$$\frac{L(x_1,\cdots,x_n;\mu)}{L(x_1,\cdots,x_n;\mu')} = e^{-\frac{1}{2}(\mu^2-\mu'^2)}e^{(\mu-\mu')\sum_{i=1}^n x_i}$$

**est décroissant en $\sum_{i=1}^n x$ puisque $\mu < \mu'$. Alors la région de rejet est de la forme $\sum_{i=1}^n x > k'_\alpha \Longrightarrow \bar{x} > k''_\alpha$ avec $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, 1/n)$.**

**Dans le cadre de $H_0 : \mu \in [0, \mu_0]$, la fonction niveau du test $\alpha(\mu)$ est donnée par :**

$$\begin{aligned}\alpha(\mu) &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_\alpha}^{+\infty} e^{-\frac{n}{2}(t-\mu)^2}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{n}(t_\alpha-\mu)}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = 1-\Phi(\sqrt{n}(t_\alpha-\mu))\end{aligned}$$

**où $\Phi(z)$ est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$. Aussi $\alpha(\mu)$ est une fonction croissante en $\mu$. Aussi, le niveau du test est**

$$\alpha = \sup_{\mu\in]-\infty,\mu_0[} \alpha(\mu) = \alpha(\mu_0).$$

**et pour cette valeur $\mu = \mu_0$, $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu_0, 1/n)$. Pour un niveau 0.05, la constante $k''$ est obtenue par $P(\bar{X} > k''|H_0) = 0.05 \Longrightarrow k'' = \mu_0 + 1.645/\sqrt{n}$**

**La fonction puissance est donnée par $1-\beta(\mu) = P(\bar{X} > \mu_0 + 1.645/\sqrt{n}|H_1)$ et donc $\bar{X}_{sous H_1} \sim \mathcal{N}(\mu, 1/\sqrt{n})$ et $\mu \in ]\mu_0, +\infty[$. En posant $Z = \sqrt{n}(\bar{X}-\mu) \sim \mathcal{N}(1,0)$ nous obtenons**

$$1-\beta(\mu) = P\left(Z > 1.645 - \sqrt{n}(\mu-\mu_0)\right).$$

# Tests d'hypothèses multiples

## Tests d'hypothèses unilatérales : Exemple

Pour illustrer une application de l'exemple ci-dessus, considérons un produit dont la mesure de la qualité, selon le producteur, est inférieure ou égale à 5. on effectue un test sur un échantillon de 10 articles pris aléatoirement. On considère toujours que la variance de la mesure qualité est égale à 1. On fixe le niveau du test à 0.05.

i **Test :** $H_0 : \mu \leq 5 \quad vs. \quad H_1 : \mu > 5$

ii $k'' = 5 + 1.645/\sqrt{10} = 5.52$

iii **La fonction puissance est** $1 - \beta(\mu) = 1 - \Phi\left(1.645 + \sqrt{10}(5.52 - \mu)\right)$**, qui est croissante en fonction de** $\mu \in ]0, +\infty[$**.**

La règle de décision est donc

$$\bar{x} \leq 5.52 \quad : \quad H_0 \text{ acceptée}$$

$$\bar{x} > 5.52 \quad : \quad H_0 \text{ rejetée.}$$

**Choix de $H_0$ :** **Le choix du sens de $H_0(\theta \leq \theta_0$ ou $\theta \geq \theta_0)$ n'est pas toujours évident. Il devra se faire en considérant les deux erreurs possibles. Le choix pertinent consiste à prendre l'erreur la plus grave comme erreur de première espèce.**

# Tests d'hypothèses multiples

## Tests d'hypothèses bilatérales

**Deux situations de type bilatéral se présentent**

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad vs. \qquad H_1 : \theta \neq \theta_0$$
$$\textbf{ou } H_0 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \qquad vs. \qquad H_1 : \theta < \theta_1 \textbf{ ou } \theta > \theta_2$$

**où $\theta$ est un pramaètre de dimension 1 ($\Theta \subseteq \mathbb{R}$).**

**L'appelation bilatérale est justifiée par le fait que l'alternative est située de part et d'autre de l'hypothèse nulle.**

**La première situation : $\theta$ représente un écart entre deux paramètres de deux populations, par exemple entre moyenne.**

**La deuxième situation : tester si un paramètre appartient à un intervalle de tolérance acceptable.**

**Hypothèses alternatives à la fois du type $\theta < \theta_0$ et du type $\theta > \theta_0 \Longrightarrow$ Test UPP**

**Toutefois : Test UPP dans la classe restreinte des tests sans biais.**

**$\Longrightarrow$ famille de la classe exponentielle.**

# Chapitre 5 : Tests d'hypothèses

# Tests de rapport de vraisemblance généralisés - RVG

## Définition

### Définition

Soit $x_1, \cdots, x_n$ un échantillon de la population $\{X \sim f(X; \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^r\}$ et les hypothèses $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \quad vs. \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$ où $\Theta_1 = \Theta - \Theta_0$. On appelle rapport de vraisemblance généralisé $(RVG)$, la fonction $\lambda(x_1, \cdots, x_n)$ telle que

$$\lambda(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\sup\limits_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} L(x_1, \cdots, x_n; \boldsymbol{\theta})}{\sup\limits_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} L(x_1, \cdots, x_n; \boldsymbol{\theta})}$$

et le test $RVG$ est le test défini par une région de rejet de la forme

$$\lambda(x_1, \cdots, x_n) < k \leq 1.$$

$\Longrightarrow$ S'il existe un estimateur $MV$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{MV}$, alors le dénominateur est la valeur de la fonction de vraisemblance en $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{MV}$ et

$$\lambda(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\sup\limits_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} L(x_1, \cdots, x_n; \boldsymbol{\theta})}{L(x_1, \cdots, x_n; \hat{\boldsymbol{\theta}}^{MV})}.$$

$RVG \Longrightarrow UPP$ sans biais : Trouver la loi de la statistique du $RVG$ $\lambda(X_1, \cdots, X_n)$ pour tout $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ et déterminer $k$ comme suit

$$\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} P(\lambda(X_1, \cdots, X_n) < k | H_0) = \alpha.$$

# Tests de rapport de vraisemblance généralisés - RVG

## Exemple

**L'échantillon $x_1, \cdots, x_n$ de $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 ; \boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$ inconnu et $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad vs. \quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$. $\mu$ est inconnu et donc les hypothèses sont multiples. La fonction de vraisemblance de l'échantillon est**

$$L(x_1, \cdots, x_n; \boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}$$

**Pour le dénominateur de $RVG$, on substitue $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{MV} = (\hat{\mu} = \bar{x}, \hat{\sigma}^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2)$. Pour le numérateur de $RVG$, seul $\mu$ varie puisque $\sigma^2 = \sigma_0^2$. Sa valeur maximale est obtenue pour $\mu = \bar{x}$, ce qui donne**

$$\begin{aligned}
\lambda(x_1, \cdots, x_n) &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\hat{s}^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}} \\
&= \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2} e^{\frac{n}{2}(1-\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2})} = \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} e^{(1-\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2})}\right)^{n/2} = \left(ue^{1-u}\right)^{n/2}
\end{aligned}$$

**avec $u = \hat{\sigma}^2/\sigma_0^2$. On note $\lambda(x_1, \cdots, x_n) = (g(u))^{n/2}, \ln g(u) = \ln u + 1 - u$. Pour déterminer la région de rejet, nous étudions le sens de variation de $\lambda(x_1, \cdots, x_n)$.**

# Tests de rapport de vraisemblance généralisés - RVG

## Exemple

| $u$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln g(u)'$ | | + | 0 | - | |
| $\ln g(u)$ | 0 | $\nearrow$ | 1 | $\searrow$ | 0 |

$\lambda$ présente un maximim unique à $\hat{\sigma}^2/\sigma_0^2 = 1$ et donc $\lambda < k \Longrightarrow \hat{\sigma}^2/\sigma_0^2 < c_{\alpha_1}$ et $\hat{\sigma}^2/\sigma_0^2 > c_{\alpha_2}$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ et $g(c_{\alpha_1}) = g(c_{\alpha_2})$

Or $n\hat{\sigma}^2/\sigma_0^2 \sim \chi^2(n-1)$ ce qui permet de déduire à partir des quantiles $c_{\alpha_1} = \chi^2_{\alpha 1;(n-1)}/n$ et $c_{\alpha_2} = \chi^2_{\alpha 2;(n-1)}/n$ tels que

$$\int_{-\infty}^{\chi^2_{\alpha 1;(n-1)}} \chi^2(z;n-1)dz = \alpha_1 \text{ et } \int_{\chi^2_{\alpha 2;(n-1)}}^{+\infty} \chi^2(z;n-1)dz = \alpha_2.$$

Notons que la distribution de $\lambda$ est non symétrique, c'est à dire que $\alpha_1 \neq \alpha_2$. La distribution de $\chi^2(n-1)$ n'est pas en général symétrique. Toutefois cette dernière l'est asymptotiquement.

Pour simplifier les calculs, l'on peut utiliser l'approximation $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$ et alors

$$k = g\left(\frac{1}{n}\chi^2_{\alpha/2;(n-1)}\right) = \frac{1}{n}\chi^2_{\alpha/2;(n-1)} e^{1-\frac{1}{n}\chi^2_{\alpha/2;(n-1)}}$$

et la règle de décision du test est donc si $\lambda(x_1, \cdots, x_n) < k$, $H_0$ est rejetée. Et dans le cas contraire, elle est acceptée.

# Tests de rapport de vraisemblance généralisés - RVG

## Comportement asymptotique

En général, il n'est pas aisé de déterminer la loi de la statistique du test $RVG$. Toutefois, dans la limite des échantillons larges, le comportement asymptotique du test $RVG$ est donné par le théorème suivant, que l'on admettra.

### Théorème

Soit $x_1, \cdots, x_n$ un échantillon de la population $\{X \sim f(X;\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^r\}$ et l'hypothèse $H_0$ spécifie les valeurs de $k$ composantes de $\boldsymbol{\theta}$, $(1 \leq k \leq r)$. Supposons que l'estimateur du $MV$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{MV}$ existe et régulier au sens de la convergenece en $L^1$ et $L^2$. Alors, sous $H_0$, la statistique du $RVG$, $\Lambda_n = \lambda(x_1, \cdots, x_n)$ est telle que

$$-2\ln\Lambda_n \xrightarrow{loi} \chi^2(k).$$

Les autres paramètres non spécifiés par $H_0$ sont appelés paramètres de nuisance.

# Chapitre 5 : Tests d'hypothèses

# Probabilité $P - valeur$

Nous avons mentionné que la décision d'accepter ou de rejeter une hypothèse est sujette au choix du risque de première espèce $\alpha$.

**Afin d'éviter de fixer $\alpha$ de manière arbitraire, on peut recourir à la notion de $P - valeur$.**

## Définition

**La $P - valeur$ est la probabilité que la statistique du test $T(X_1, \cdots, X_n)$ prenne une valeur au moins aussi extrême que celle qui a été observée $t_{obs}(x_1, \ldots, x_n)$.**

## Remarques

**La notion de position extrême se définit en relation avec la définition de la forme de la région de rejet du test :**

- **Si la région du rejet est unilatérale $t > c$ , alors $P - valeur = P(T > t_{obs}|H_0)$ si $H_0$ est simple, ou bien le maximum $P - valeur = \sup\limits_{\theta \in \Theta_0} P(T > t_{obs}|H_0)$ si $H_0$ est multiple ;**
- **Si la région de rejet du test est bilatérale telle que $\{t | t < c_1$ ou $t > c_2\}$, alors $P - valeur = 2P(T < t_{obs}|H_0)$ si $t_{obs}$ est inférieur à la médiane et $P - valeur = 2P(T > t_{obs}|H_0)$ dans le cas contraire.**

# Probabilité $P - valeur$

## Illustration graphique et exemple d'usage dans la découverte du boson de Higgs

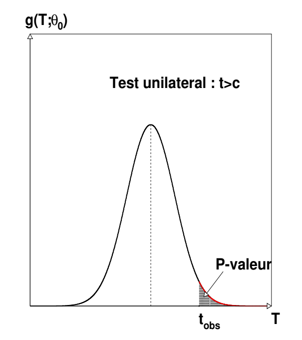



FIGURE – $P - valeur$ dans le cas d'un test unilatéral de la forme $t > c$.

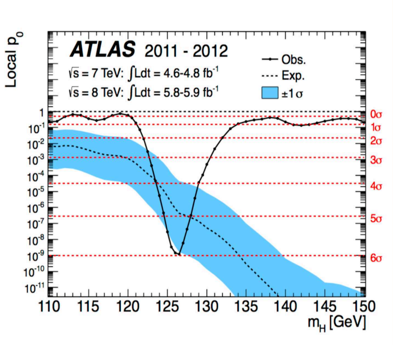



FIGURE – $P - valeur$ observée en fonction de la masse du Higgs dans la région [110,150] GeV dans le cadre de l'expérience de ATLAS au LHC. .

# Chapitre 5 : Tests d'hypothèses

# Quelques tests usuels : Test sur le paramètre $p$ d'une loi de Bernoulli

## Test sur une proportion

Les applications de ce test sont multiples dès lors qu'il s'agit de l'étude d'une spécificité binaire dans une population. On dispose d'un échantillon de données $x_1, \cdots, x_n$, avec $x_i \in \{0, 1\}$ représentant donc respectivement un échec et un succès. Nous avons donc $X \sim \mathcal{B}(p)$. On peut écrire alors que $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$.

- i- **Test** : $H_0 : p = p_0 \quad vs. \quad H_1 : p \neq p_0$
- ii- **Statistique du test** $T \in \mathbb{N}$ : $T = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$ ;
- iii- **Région d'accéptation** : $1 - \alpha = P_{p_0}\left(t_{\alpha/2} < \bar{X} < t_{1-\alpha/2}\right)$

où $t_{\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $\alpha/2$ sur $\mathcal{B}(n, p_0)$ : $\sum_{k=0}^{t_{\alpha/2}} \mathcal{B}(k; n, p_0) = \alpha/2$ et $t_{1-\alpha/2}$ celui d'ordre $1 - \alpha/2$.

Dans le cas où $\alpha/2$ ne figure pas dans la table de la loi binomiale, on prend le quantile correspondant à la valeur immédiatement inférieure à 0.05 sur la loi binomiale.

Quant la valeur du risque ne figure pas dans la table de la loi, on opte pour celui qui lui est immédiatement inférieur et on dit que le test est conservateur.

Dans le cas où le test est unilatéral, on choisit la région de rejet la plus pertinente et on détermine le quantile d'ordre $\alpha$

Si les conditions du TCL sont satisfaites alors la statistique à utiliser dans ce cas est $(\bar{X} - p)/\sqrt{p(1-p)/n} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

# Quelques tests usuels : Tests sur la moyenne d'une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

## Cas où $\sigma^2$ est connue

i- **Test :** $H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$

ii- **Statistique du test** $T$ **:** $T = Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ **;**

iii- **Région d'accéptation :**

$$1-\alpha = P_{\mu_0}\left(\mu_0 - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

iv- **La fonction puissance du test :**

$$\begin{aligned}
(1-\beta(\mu)) &= h(\mu) = 1 - P_\mu\left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{1-\alpha/2}\right) \\
&= 1 - P_\mu\left(\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{1-\alpha/2}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} + z_{1-\alpha/2}\right) + \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} - z_{\alpha/2}\right)
\end{aligned}$$

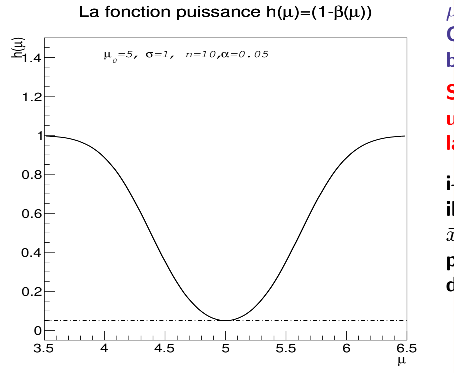
**où** $\Phi(Z)$ **est la fonction de répartition de** $\mathcal{N}(0,1)$**.**

**La région d'accéptation peut donc être définie comme suit, pour un test de risque** $\alpha$

$$A = \{\bar{x} | \mu_0 - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.\}$$

# Quelques tests usuels : Tests sur la moyenne d'une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

## Cas où $\sigma^2$ est connue




On montre que $h(\mu)$ a un minimum au point $\mu = \mu_0$ et s'accroît de part et d'autre de $\mu_0$. Ce qui est implique que le test est bien sans biais.

Si L'on est dans le cas d'une hypothèse nulle unilatérale, alors on choisit la région de rejet la plus pertinente :

i- Si $H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu > \mu_0$ alors ii- il faut rejeter les valeurs les plus élevées de $\bar{x}$. Pour déterminer la région critique, on se place pour $\mu = \mu_0$ qui est la valeur la plus défavorable de $H_0$ et

$$\alpha \quad = \quad P_{\mu_0}\left(z_{1-\alpha} < \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

et $\bar{A} = \{\bar{x} | \bar{x} > \mu_0 + z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}$.

Pour $H_0 : \mu \geq \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu < \mu_0$, alors $\bar{A} = \{\bar{x} | \bar{x} < \mu_0 - z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}$

# Quelques tests usuels : Tests sur la moyenne d'une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

## Cas où $\sigma^2$ est inconnue

**Ce cas est général et réaliste.**

**i-** **Test :** $H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs. \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$

**ii-** **Statistique du test :** $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\hat{s}/\sqrt{n}} \sim t - distribution(n-1)$ ;

**iii-** **Région d'accéption :**

$$1-\alpha = P_{\mu_0}\left(\mu_0 - t^{n-1}_{1-\alpha/2}\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu_0 + t^{n-1}_{1-\alpha/2}\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}\right)$$

**iv-** **La fonction puissance du test :**

$$\begin{aligned}(1-\beta(\mu)) &= 1 - P_\mu\left(t^{n-1}_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < t^{n-1}_{1-\alpha/2}\right) \\ &= 1 - P_\mu\left(\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} - t^{n-1}_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} + t^{n-1}_{1-\alpha/2}\right).\end{aligned}$$

**Dans le cas de tests d'hypothèses unilatérales, on procède de la même manière que dans le cas précédent.**

# Quelques tests usuels : Test sur la variance $\sigma^2$ d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

**Supposons que $\mu$ est inconnu :**

- **i-** $\sigma^2$ : $H_0 : \sigma = \sigma_0^2 \quad vs. \quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ ;
- **ii-** **Statistique du test $T$ :**

$$T = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1);$$

- **iii-** **La région d'accéptation sous $H_0$ est**

$$P\left(\chi^{2\,(n-1)}_{\alpha_1} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi^{2\,(n-1)}_{1-\alpha_2}\right) = 1-\alpha$$

**tel que $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. En général on opte pour $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$ qui reste une bonne approximation.**

**Si $\mu$ est connue, alors la statistique de test à adopter sera $T = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$ et la suite de la solution est analogue à ce qui est fait ci-dessus.**

# Quelques tests usuels : comparaison des moyennes de deux lois normales

On dispose de deux échantillons indépendans. L'échantillon de taille $n_1$, de moyenne $\bar{x}_1$ et de variance $s_1^2$, est issu de la loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$. quant à l'échantillon de taille $n_2$, de moyenne $\bar{x}_2$ et de variance $s_2^2$, est issu de la loi $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Supposons dans un premier temps que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Alors

- **i-** $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad vs. \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ;
- **ii-** Statistique du test $T$ :

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t - distribution(n_1 + n_2 - 2)$$

$$\text{où } S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

- **iii-** La région d'accéptation est donnée alors par

$$A = \{\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \in [-t_{\alpha/2}^{(n_1+n_2-2)}, t_{1-\alpha/2}^{(n_1+n_2-2)}]$$

$$\text{où } s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.\}$$

Si les hyothèses sont unilatérales, on adaptent la région de rejet en fonction des valeurs les plus défavorables sous $H_0$.

Si $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, alors on travaille dans l'approximation d'échantillons larges et on applique le TCL et $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

# Quelques tests usuels : Comparaison entre les variances de deux lois normales

On dispose de deux échantillons indépendans. L'échantillon de taille $n_1$, de moyenne $\bar{x}_1$ et de variance $s_1^2$, est issu de la loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$. quant à l'échantillon de taille $n_2$, de moyenne $\bar{x}_2$ et de variance $s_2^2$, est issu de la loi $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.

- **i-** $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad vs. \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ;
- **ii-** Statistique du test $T$ :

$$T = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

  où $F(n_1, n_2)$ est la loi de Fisher [4]
- **iii-** La région d'accéptation est donnée alors par

$$A = \{\frac{s_1^2}{s_2^2} \in [f_{\alpha/2}^{(n_1-1,n_2-1)}, f_{1-\alpha/2}^{(n_1-1,n_2-1)}]\}$$

4. Si $X_1 \sim \chi^2(n)$ et $X_2 \sim \chi^2(m)$ alors $\frac{X_1/n_1}{X_2/n_2} \sim F(n_1, n_2)$ : $E[X] = n_2/(n_2 - 2)$ et $V[X] = \frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}, n_2 \geq 5$.

# Quelques tests usuels : fit's Goodness

## Test de $\chi^2$ de Pearson : test de conformité

**Soit $x_1, \cdots, x_n$ un échantillon de données issu d'une population $X$ dont la loi de probabilité est supposée connue $X \sim P(X)$. On cherche à tester si l'échantillon de données provient d'une v.a. qui suit la loi $P(X)$. Ce test s'appelle un test de conformité**[5]

**L'un des tests les plus populaires, adaptée à cette situation, est le test de Pearson, appelé également le test de $\chi^2$, introduit en 1900.**

**On se place dans le cas où les paramètres de la loi de probabilité sont connus. Le test peut être formulé comme suit $H_0 : X \sim P(X) \quad vs. H_1 : X$ ne suit pas $P(X)$.**

**Afin de construire la statistique du test, organisons les $X$ en $k$ classes $A_j = [x_j, x_{j+1}[$ tel que $N_j$ est égal au nombre d'occurences pour $x \in A_j$ sont sortis. On peut poser alors**

$$y_i^{obs} = N_i/n \text{ et } y_i^{mod} = P(x_i \leq x < x_{i+1}) = p_i$$

**On définit la statistique du test par une somme quadratique pondérée des $(y_i^{obs} - y_i^{mod})$ comme suit**

$$D = \sum_{i=1}^{k} w_i^{-1} \left( y_i^{obs} - y_i^{mod} \right)^2$$

**où les poids $w_i = p_i/n$. On admettra sans démonstration que $D \underset{n \to +\infty}{\sim} \chi^2(k-1)$.**

5. Conformité entre la loi que suivent les données avec la loi supposée connue.

# Quelques tests usuels : fit's Goodness

## Test de $\chi^2$ de Pearson

Remplaçons les poids par leurs expressions, nous obtenons alors

$$D = \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i} \left( \frac{N_i}{n} - p_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{N_i^2}{np_i} - n.$$

Rappelons que le choix pertinent de la région de rejet pour ce test est le choix unilatéral pour les valeurs larges.

Comme on connait la loi de la statistique du test, nous pouvons écrire

i **Test :** $H_0 : X \sim P(X) \quad vs. \quad H_1 : X$ **ne suit pas** $P(X)$ ;

ii **Statistique du test** $T$ **:** $T = D = \sum_{i=1}^{k} \frac{N_i^2}{np_i} - n \sim \chi^2(k-1)$ ;

iii **Région de rejet pour un riqsue** $\alpha$ **:**

$$P(D > \chi^2_{k-1,\alpha}) \quad = \quad \alpha$$

iv **La décision du test est alors**

- si $d = \sum_{i=1}^{k} \frac{N_i^2}{np_i} - n \leq \chi^2_{k-1,\alpha}$, $H_0$ est accéptée et elle est rejetée dans le cas contraire.

# Quelques tests usuels : fit's Goodness

## Test de $\chi^2$ de Pearson : Exemple

Les durées de vie, $T$, de 300 circuits électroniques sont mesurées et les résultats sont récapitulés dans le tableau suivant

| t (u.a.) | Nb. de circuits |
|---|---|
| $t < 100$ | 121 |
| $100 \leq t < 200$ | 78 |
| $200 \leq t < 300$ | 43 |
| $300 \leq t$ | 58 |
| | 300 |

On suppose que $T \sim \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}}$ avec $1/\lambda = 200$. Tester cette hypothèse avec un risque de $5\%$.

Trouvons la région du rejet : $\alpha = 0.05$ et $k = 4 - 1 = 3 \Longrightarrow \chi^2_{3,0.05} = 7.815$. Calculons les valeurs observées et théoriques de chacune des classes :

| $A_j$ | $N_i$ | $p_i$ |
|---|---|---|
| $t < 100$ | 121 | 0.39 |
| $100 \leq t < 200$ | 78 | 0.24 |
| $200 \leq t < 300$ | 43 | 0.15 |
| $300 \leq t$ | 58 | 0.22 |

on en déduit que $d = 1.7 < \chi^2_{3,0.05} \Longrightarrow$ les durées de vie des circuits suivent bien une loi exponentielle avec un risque de $5\%$.

# Quelques tests usuels : fit's Goodness

## Cas où les paramètres de la loi ne sont pas connus

Dans le cas où les paramètres de la loi, au nombre de $r$, ne sont pas connus, alors la probabilité théorique est estimée, $\hat{p}_i$ et la statistique du test devient

$$D = \sum_{i=1}^{k} \frac{N_i^2}{n\hat{P}_i} - n$$

où l'on a gardé les mêmes notations.

$\Longrightarrow$ **La loi de la statistique $D$ ?**

Si les $r$ paramètres de la loi sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance alors la loi de $D \underset{n\to+\infty}{\sim} \chi^2(k-r-1)$ et la procédure reste la même :

i- Construire $k$ classes à partir de l'échantillon de données et les fréquences leurs correspondant ;

ii- Estimer par l'EMV les paramètres de la loi de probabilité ;

iii- Calculer les probabilités expérimentales et théoriques ;

iv- Construire la région de rejet et tester $H_0$.

# Quelques tests usuels : fit's Goodness

## Cas d'un lissage

Nous avons effectué $n$ mesures $y_1, \cdots, y_n$ respectivement pour un échantillon de points $x_1, \cdots, x_n$. On suppose que les $y_i$ sont entachées d'erreurs $\sigma_i$ connues alors que les erreurs sur $x_i$ sont négligeables. On cherche à faire un lissage par une fonction $y = f(x; \boldsymbol{\theta})$ où $\boldsymbol{\theta}$ est un vecteur de $r$ paramètres inconnus. Les paramètres inconnus sont estimés par la méthode des moindres carrés et l'on cherche à vérifier si la fonction du lissage est accepétée avec un risque $\alpha$. Nous avons alors, une fois que les paramètres soient estimés,

- **i-** **Test** : $H_0 : Y = f(X; \boldsymbol{\theta}) \quad vs. \quad Y \neq f(X; \theta)$ **avec le risque** $\alpha$ **;**
- **ii-** **la statistique du test** $T$ **:**

$$T = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{Y_i^{obs} - Y_i = f(X_i; \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\sigma_i} \right)^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} \chi^2(n-r);$$

- **iii-** **Déterminer la région de rejet** [6] **:**

$$P(t > \chi^2_{n-r,\alpha}) = \alpha$$

- **iv** **La règle de décision est alors**

$$\textbf{si } t = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{y_i^{obs} - y_i = f(x_i; \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\sigma_i} \right)^2 \leq \chi^2_{n-r,\alpha} \Longrightarrow H_0 \textbf{ est accéptée}$$

$$\textbf{sinon} \qquad H_0 \textbf{ est rejetée.}$$

6. **Le choix pertinent est celui où la région est unilatérale du côté des valeurs larges.**

# Quelques tests usuels : fit's Goodness

## Test de Kolmogorov-Smirnov : K-S

Considérons un échantilllon de données $x_1, \cdots, x_n$ d'une population $X$ dont la fonction de répartition est $F(X)$. L'échantillon de données est arrangé en ordre croissant en valeurs, noté, $x_{(1)}, \cdots, x_{(n)}$. On note par $F^0(x_{(i)}) = i/n$ la valeur de la fonction de répartition observée. Soit $F_X(x_{(i)})$ sa valeur théorique. On cherche à tester si la fonction de répartition de l'échantillon est bien $F_X(x)$.

La statistique du test est donnée par

$$D = \max_{i=1}^{n}\{|F^0(X_{(i)}) - F_X(X_{(i)})|\} = \max_{i=1}^{n}\{|\frac{i}{n} - F_X(X_{(i)})|\}$$

Si les paramètres de $F_X(x)$ ne sont pas connus, alors on utilise leurs valeurs estimées.

La loi de la statistique $D$ ?

$\Longrightarrow$ La statistique de $D$ est déterminée numériquement et donnée sous forme de table qui ne dépend que de $n$ [7]

Comme $D$ mesure la déviation entre les valeurs observées et théoriques, le choix pertinent de la région de rejet est unilatérale du côté des valeurs larges.

- i- Arranger l'échantillon de données en ordre croissant en valeur de $x$ ;
- ii- Calculer les valeurs observées $F^0(x_{(i)})$ ;
- iii- Calculer les valeurs théoriques $F_X(x_{(i)})$. Utiliser les valeurs estimées si les paramètres de $F_X(x)$ sont inconnus ; Représenter graphiquement en joignant les points par des segments de droites ;
- iv- Trouver la déviation maximale $d_{max} = \max_{i=1}^{n}|\{\frac{i}{n} - F_X(x_{(i)})|\}$ ;
- v- Déterminer le quantile d'ordre $c_{n,\alpha}$ de la table de la loi de $D$ et rejeter $H_0$ si $d_{max} > c_{n,\alpha}$.

7. Elle ne dépend pas de la forme de $F_X(x)$. On admet ce résultat sans le démontrer.

# Quelques tests usuels : fit's Goodness

## Test de Kolmogorov-Smirnov : Exemple

Les mesures d'une grandeur, au nombre de 10, d'un matériau donne les résultats suivants : 30.1, 30.5, 28.7, 31.6, 32.5, 29.0, 27.4, 29.1, 33.5 et 31.0. Sur la base de ces données, tester l'hypothèse que cet échantillon suit une loi normale avec un risque 5%.

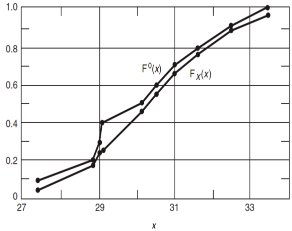
Solution : Les paramètres de la loi normale sont inconnus. On les détermines en utilisant l'EMV :

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 30.3$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 3.14$$

Réarrangeons les mesures dans l'ordre croissant et calculons les valeurs observée et théorique de $F$ pour chacune des mesures. Les résultats sont récapitulés dans le graphique ci-contre.

La valeur maximale de la déviation de l'échantillon est $d_{max} = |F^0(29.1) - F_X(29.1)| = 0.4 - 0.2483 = 0.1517$. Pour $\alpha = 0.05$ avec $n = 10$, la table donne $c_{10,0.05} = 0.41 > d_{max}$ et donc nous pouvons considérer que la loi est normale avec un risque de 5%.




| $n$ | $\alpha$ | | |
|---|---|---|---|
| | 0.10 | 0.05 | 0.01 |
| 5 | 0.51 | 0.56 | 0.67 |
| 10 | 0.37 | 0.41 | 0.49 |
| 15 | 0.30 | 0.34 | 0.40 |
| 20 | 0.26 | 0.29 | 0.35 |
| 25 | 0.24 | 0.26 | 0.32 |
| 30 | 0.22 | 0.24 | 0.29 |
| 40 | 0.19 | 0.21 | 0.25 |
| Large n | $\frac{1.22}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1.36}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1.63}{\sqrt{n}}$ |