Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2016/2017

Mécanique du Point Matériel
Corrigé de la série N° 4
Filières SMIA

Corrigé 1 : Orbite géostationnaire

On rappelle qu'une orbite géostationnaire est celle d'un satellite restant toujours à la verticale d'un même point du globe terrestre.
On note par S le satellite que l'on considère comme un point matériel. La période de rotation de la Terre est $T = 86164s$, son rayon $R_T \simeq 6.4 \times 10^3 km$ et sa masse $M_T \simeq 6 \times 10^{24} kg$. La constante gravitationnelle est $G \simeq 6.7 \times 10^{-11} S.I.$.

1. Comme le satellite doit rester toujours à la verticale d'un même point du globe terrestre, sa vitesse angulaire est la même que celle de la rotation de la Terre sur elle même. Comme la période de rotation de la Terre est T, alors
$$\Omega_g = \frac{2\pi}{T} \Longrightarrow \Omega_g = \frac{2 \times \pi}{86164} \simeq 7.3 \times 10^{-5}\mathrm{s}^{-1}.$$
Le référentiel d'étude R_g est le référentiel géocentrique. Il est galiléen car les distances parcourue par le satellite sont négligeables par rapport aux paramètres de la trajectoire de la Terre autour du soleil et donc R_g peut être considéré en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel héliocentrique (Copernic).
2. On se propose d'établir les expressions du rayon de l'orbite géostationnaire R_g ainsi que son altitude h_g.

   a) Le satellite est soumis à l'action de l'attraction gravitationnelle qui est une force centrale et donc le moment par rapport à l'origine O de $\mathcal{R}_g$, qui est confondu avec le centre de la terre, est nul. Grâce au théorème du moment cinétique, le moment cinétique du satellite par rapport à O dans $\mathcal{R}_g$ est constant ce qui implique que la trajectoire a lieu dans le plan perpendiculaire au moment cinétique. Ce qui démontre bien que le mouvement est plan.
   Comme le mouvement est plan, on utilise les coordonnées polaires ρ et φ. Comme $\Omega_g = \dot{\varphi}$ est constante et le mouvement est circulaire de rayon R_g, alors
   $$\overrightarrow{OM} = R_g \vec{e}_\rho \Longrightarrow \vec{V}(S/\mathcal{R}_g) = R_g \Omega_g \vec{e}_\varphi \Longrightarrow \vec{\gamma}(S/\mathcal{R}_g) = -R_g \Omega_g^2 \vec{e}_\rho.$$
   Le PFD permet d'écrire
   $$m\vec{\gamma}(S/\mathcal{R}_g) = -G\frac{M_T m_S}{R_g^2}\vec{e}_\rho$$
   $$\Longrightarrow R_g \Omega_g^2 = G\frac{M_t}{R_g^2} \Longrightarrow R_g = \left(\frac{GM_T}{\Omega_g^2}\right)^{1/3}$$
   L'altitude est déduite comme suit $h_g = R_g - R_T$. Ce qui donne pour les applications numériques
   $$R_g = \simeq 42253\text{km} \quad \text{et} \quad h_g \simeq 35853\text{km}.$$

   b) La vitesse du satellite est $v_g = R_g \Omega_g$. Son application numérique est $v_g \simeq 3.1\text{km s}^{-1}$.

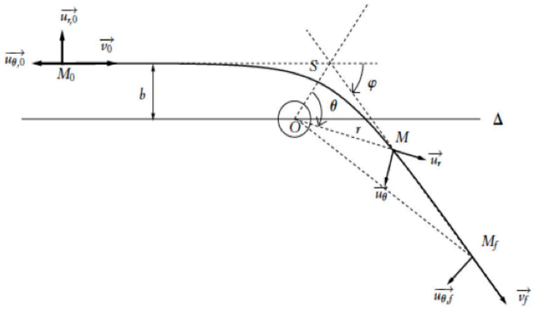
   c) Le plan de l'orbite contient le centre de la Terre. Pour avoir comme axe de rotation l'axe des pôles, l'orbite doit être dans le plan de l'équateur.

Corrigé 4 : Orbite hyperbolique

Corriger sur la figure les vecteurs de la base polaire à l'état initial $\vec{u}_{\theta,0}$ et $\vec{u}_{r,0}$. En effet, $\vec{u}_{\theta,0}$ est perpendiculaire à $\vec{u}_\Delta$. Noter bien aussi que les états initial et final sont très loins de O, ce qui permet de considérer dans ces cas que $r \to \infty$ et donc l'énergie potentielle négligeable.

Une météorite M a, très loin de la Terre, une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\, \vec{u}_\Delta$ portée par une droite située à la distance b de l'axe (Δ) du centre de la Terre O, voir figure ci-contre. On note par m la masse du météorite, M_T la masse de la Terre, R_T son rayon et G la constante de gravitation universelle. On travaille dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen. La position de M est repérée par les coordonnées polaires (r, θ), $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$. La trajectoire du météorite est une branche d'hyperbole de foyer O, le centre de la Terre.

Noter bien que l'on utilise les notations $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ pour la base polaire et (r, θ) les coordonnées correspondantes.



1. Etant donnée que la seule force à laquelle est soumise la météorite est l'attraction gravitationnelle et que cette dernière est centrale et son support passe par O alors son moment est nul ce qui implique que le moment cinétique $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$ est constant tout au long du mouvement. Nous avons ainsi

$$\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) = mr^2\dot{\theta}\vec{k} = \text{Cst} = \overrightarrow{OM}_0 \wedge \vec{v}_0 = \|\overrightarrow{OM}_0\| m v_0 \sin(\widehat{\overrightarrow{OM}_0, \vec{v}_0})\vec{k} = m v_0 b \vec{k}$$

où $\vec{k} = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$ et $\sin(\widehat{\overrightarrow{OM}_0, \vec{v}_0}) = \sin\left[\pi - (\widehat{\overrightarrow{OM}_0, \vec{v}_0})\right] = b/\|\overrightarrow{OM}_0\|$.

De plus l'attraction gravitationnelle est conservative et le potentiel dont elle dérive est égal à $U(r) = -GM_T m/r$. Aussi, très loin de la Terre, l'énergie potentielle est négligeable, $U(r) \to 0$, et donc l'énergie mécanique est égale à l'énergie cinétique comme suit

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2.$$

2. Lorsque la météorite se trouve au sommet S, la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{v} \perp \overrightarrow{OS}$. Sachant que $r_{min} = \|\overrightarrow{OS}\|$ et $\sigma_o = m r_{min} v = m v_0 b \Longrightarrow v = v_0 b / r_{min}$, cela implique

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GM_T m}{r_{min}} = \frac{1}{2} m v_0^2 \\ \Longrightarrow &\quad \frac{v_0^2 b^2}{r_{min}^2} - 2\frac{GM_T}{r_{min}} = v_0^2 \\ \Longrightarrow &\quad r_{min}^2 + 2\frac{GM_T}{v_0^2} r_{min} - b^2 = 0 \end{aligned}$$

dont la seule solution acceptable est la racine positive, étant donné que $r_{min} > 0$:

$$r_{min} = -\frac{GM_T}{v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{GM_T}{v_0^2}\right)^2 + b^2}.$$

3. La météorite ne rencontre pas la Terre si $r_{min} > R_T$, ce qui implique que

$$\begin{aligned} b &> \sqrt{\left(R_T + \frac{GM_T}{v_0^2}\right)^2 - \left(\frac{GM_T}{v_0^2}\right)^2} \\ \Longrightarrow b &> R_T\sqrt{1 + 2\frac{GM_T}{R_T v_0^2}} \end{aligned}$$

et la valeur minimale de b est

$$b_{min} = R_T\sqrt{1 + 2\frac{GM_T}{R_T v_0^2}}.$$

4. Pour calculer l'angle φ, on applique le PFD

$$\begin{aligned} m\frac{d\vec{v}}{dt} &= -\frac{GM_T m}{r^2}\vec{u}_r \\ &= +\frac{GM_T m}{r^2\dot{\theta}}\left.\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\right|_{\mathcal{R}} \\ &= +\frac{GM_T m^2}{\sigma_o}\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = +\frac{GM_T m}{bv_0}\left.\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\right|_{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

nous avosn utilisé le fait que $\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}|_{\mathcal{R}} = -\vec{u}_r$. En intégrant cette équation entre l'état initial et l'état final, on obtient

$$\vec{v}_f - \vec{v}_0 = +\frac{GM_T}{bv_0}\left(\vec{u}_{\theta,f} - \vec{u}_{\theta,0}\right).$$

En projetant cet équation par $\vec{u}_\Delta$, sachant que $\vec{v}_0 \cdot \vec{u}_\Delta = v_0$, $\vec{u}_{\theta,0} \cdot \vec{u}_\Delta = 0$, $\vec{u}_{r,f} \cdot \vec{u}_\Delta = \cos\varphi$ et $\vec{u}_{\theta,f} \cdot \vec{u}_\Delta = \cos(\varphi + \pi/2) = -\sin\varphi$, alors

$$v_f\cos\varphi - v_0 = -\frac{GM_T}{bv_0}\sin\varphi.$$

Comme l'énergie potentielle est négligeable aussi bien à l'état initial qu'à l'état final et comme l'énergie mécanique est conservée, alors

$$E_{m,0} = E_{m,f} \Longrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 \Longrightarrow v_0 = v_f.$$

ce qui donne finallement

$$\begin{aligned} v_0(\cos\varphi - 1) &= -\frac{GM_T}{bv_0}\sin\varphi \\ \Longrightarrow -2\sin\frac{\varphi}{2} &= -\frac{GM_T}{bv_0^2}2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \\ \Longrightarrow \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} &= +\frac{GM_T}{bv_0^2}. \end{aligned}$$

Deuxième approche pour cette dernière question : voir le cours - Mouvement hyperbolique

Nous avons $\cos\alpha = \frac{1}{e}$ où α est l'angle que fait la direction asymptotique avec l'axe Fx. Si l'on compare avec la figure de l'exercice, nous avons $2\alpha + \varphi = \pi \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$. De même nous avons

$$e^2 = 1 + \frac{2pE_0}{GMm}$$

avec $p = \sigma_0^2/(GMm) \Longrightarrow p = mv_0^2b^2/(GM)$ et $E_0 = 1/2mv_0^2 \Longrightarrow e^2 = 1 + \frac{v_0^4b^2}{(GM)^2}$. Or nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^2\alpha} &= e^2 \\
\Longrightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 &= \frac{v_0^4b^2}{(GM)^2} \\
\Longrightarrow \mathrm{tg}^2\alpha &= \frac{v_0^4b^2}{(GM)^2} \\
\Longrightarrow \mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2} &= \frac{v_0^4b^2}{(GM)^2} \Longrightarrow \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} = +\frac{v_0^2b}{GM}
\end{aligned}$$

nous avons retenu la solution postive car $0 < \varphi < \pi$ et qui n'est d'autre que le résultat obtenu.