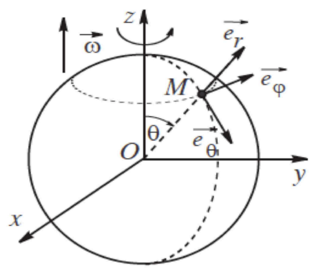
Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2015/2016

Module de Mécanique du Point Matériel
Corrigé de la série N^0 2
Filières SMA

Corrigé 1 : Déplacement selon un méridien

Une sphère de rayon R tourne sur elle-même à une vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ constante dans un référentiel $\mathcal{R}(O, xyz)$ muni de la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un point matériel M situé initialement au sommet se déplace sur la surface externe selon un méridien, du nord au sud, à vitesse constante v_0 par rapport à la sphère. Voir figure ci-contre.



1. Rappelons que la position de M est repérée dans le système de coordonnées sphériques par (r, θ, φ). Comme M se déplace sur un méridien et que la sphère tourne autour de Oz par rapport à $\mathcal{R}$ avec une vitesse angulaire $\omega\vec{k}$, ceci implique que $\dot{\varphi} = \omega$ et le vecteur rotation de la base sphérique par rapport à $\mathcal{R}$ est $\vec{\Omega} = \omega\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi$.
Comme $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$ ce qui donne pour la vitesse

$$\begin{aligned}
\vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\
&= R\left.\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = R\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r \\
&= R\left(\omega\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi\right) \wedge \vec{e}_r \\
&= R\left(\omega\sin\theta\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\vec{e}_\theta\right).
\end{aligned}$$

Comme $v_0 = \vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{e}_\theta = R\dot{\theta} \Longrightarrow \dot{\theta} = v_0/R$ est constante. Nous en déduisons que les vitesses angulaires autour de Oz et de $\vec{e}_\varphi$ sont constantes. Le vecteur vitesse peut se mettre ainsi qous la forme

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = R\omega\vec{e}_\varphi + v_0\vec{e}_\theta.$$

L'accélération peut être obtenue par

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\
&= R\omega\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi + v_0\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta \\
&= R\omega\left(\omega\vec{k} + \frac{v_0}{R}\vec{e}_\varphi\right) \wedge \vec{e}_\varphi + v_0\left(\omega\vec{k} + \frac{v_0}{R}\vec{e}_\varphi\right) \wedge \vec{e}_\theta \\
&= R\omega^2\vec{e}_\rho + \omega v_0\cos\theta\vec{e}_\varphi - \frac{v_0^2}{R}\vec{e}_r \\
&= \left(R\omega^2\sin\theta - \frac{v_0^2}{R}\right)\vec{e}_r + R\omega^2\cos\theta\vec{e}_\theta + \omega v_0\cos\theta\vec{e}_\varphi.
\end{aligned}$$

Nous avons utiliser $\vec{e}_\rho$ de la base cylindrique comme passage sachant que ce dernier est égal à $\vec{e}_\rho = \sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta$.

Corrigé 2 : Traversée d'une rivière

Un nageur traverse une rivière de largeur l avec une vitesse v_1 par rapport à l'eau suivant une trajectoire perpendiculaire aux bords . Sachant que le courant d'eau coule avec une vitesse v_0 uniforme, calculer le temps de la traversée.
Notons par $\mathcal{R}(O,xyz)$ le repère terrestre tel que la rivière est située sur le plan Oxy et l'écoulement d'eau colinéaire avec Ox. Soit $\mathcal{R}_1(O_1,x_1y_1z_1)$ le référentiel lié à l'écoulement d'eau et dont les axes restent parallèles à ceux de $\mathcal{R}$, ce qui implique que $\mathcal{R}_1$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}$ et que la vitesse d'entrainement est $\vec{V}_e = v_0\vec{i}$. Sachant que le nageur traverse la rivière perpendiculairement à l'eau, donc sa vitesse par rapport à l'eau, et donc par rapport à $\mathcal{R}_1$ est portée par $\vec{j}_1 = \vec{j}$ et égale à $\vec{V}_r = v_1\vec{j}$. Aussi, la vitesse du nageur par rapport $\mathcal{R}$ est

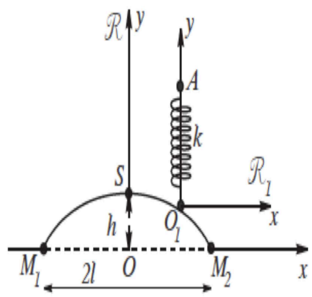
$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r = v_0\vec{i} + v_1\vec{j} \Longrightarrow V_a = \sqrt{v_0^2 + v_1^2}$$

Le temps de la traversée est alors

$$t = \frac{l}{V_a} = \frac{l}{\sqrt{v_0^2 + v_1^2}}.$$

Exercice 4 : Mouvement d'un point matériel dans un véhicule accéléré

Un véhicule a un mouvement de translation uniforme de vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ sur une route curviligne d'équation cartésienne $y = f(x)$. $\mathcal{R}(O,xyz)$ est le référentiel terrestre. Soit $\mathcal{R}_1(O_1,x_1y_1z_1)$ le référentiel lié au véhicule. Un point matériel A, de masse m, lié à l'origine O_1 par un ressort, évolue le long de l'axe O_1y. Voir figure ci-contre.



1. Soient (x_A, y_A) les coordonnées de A dans $\mathcal{R}_1$, alors $\overrightarrow{O_1A} = y_A\vec{j}$ puisque $A \in O_1y$. Calculons $\vec{V}(A/\mathcal{R}_1)$:

$$\begin{aligned}\vec{V}(A/\mathcal{R}_1) &= \left.\frac{d\overrightarrow{O_1A}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} \\ &= \dot{y}_A\vec{j}.\end{aligned}$$

et l'expression de l'accélération de A dans $\mathcal{R}_1$ est $\vec{\gamma}(A/\mathcal{R}_1) = \ddot{y}_A\vec{j}$.

2. Notons par (x, y) les coordonnées de O_1 dans $\mathcal{R}$ sachant que $y = f(x)$. L'expression de la vitesse de O_1 dans $\mathcal{R}$ est

$$\begin{aligned}\vec{V}(O_1/\mathcal{R}_1) &= \left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\ &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = \dot{x}\vec{i} + \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}\vec{j} = \dot{x}(\vec{i} + f'(x)\vec{j})\end{aligned}$$

sachant que $dy/dx = f'(x)$. Comme la vitesse du véhicule est uniforme et égale à v alors

$$|\vec{V}(O_1/\mathcal{R}_1)|^2 = \dot{x}^2\left(1+f'^2\right) = v^2 \Longrightarrow \dot{x} = \frac{v}{\sqrt{1+f'^2}}.$$

et l'accélération de O_1 par rapport à $\mathcal{R}$ est

$$\vec{\gamma}(O_1/\mathcal{R}) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}.$$

En utilisant les relations précédentes, nous avons

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1+f'^2}}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{v}{\sqrt{1+f'^2}}\right)\frac{dx}{dt} \\
&= -\frac{f'f''v}{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{v}{\sqrt{1+f'^2}} \\
&= -\frac{f'f''v^2}{(1+f'^2)^2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= \frac{d}{dt}\dot{y} \\
&= \frac{d}{dt}\left(f'\dot{x}\right) \\
&= f''\dot{x}^2 + f'\ddot{x} \\
&= \frac{f''v^2}{1+f'^2} - \frac{f'^2f''v^2}{(1+f'^2)^2} \\
&= \frac{f''v^2}{1+f'^2}\left(1-\frac{f'^2}{1+f'^2}\right) \\
&= \frac{f''v^2}{1+f'^2}.
\end{aligned}$$

et qui n'est d'autre que la composante de l'accélération de O_1 selon Oy.

3. En appliquant la loi de composition des accélérations, nous avons

$$\vec{\gamma}(A/\mathcal{R}) = \vec{\gamma}(A/\mathcal{R}_1) + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c.$$

Comme $\mathcal{R}_1$ est en translation rectligne par rapport à $\mathcal{R}$, alors $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \vec{0}$ ce qui implique que $\vec{\gamma}_c = \vec{0}$ et $\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}(O_1/\mathcal{R})$. Aussi

$$\vec{\gamma}(A/\mathcal{R}) = -\frac{f'f''v^2}{(1+f'^2)^2}\vec{i} + \left(\frac{f''v^2}{1+f'^2} + \ddot{y}_a\right)\vec{j}$$

Corrigé 3 : Mouvement calculé à partir de la trajectoire et de l'hodographe

Dans le plan (Oxy) d'un référentiel $\mathcal{R}(O,xyz)$ munis de la base cartésienne $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, un point mobile ponctuel M décrit la parabole d'équation cartésienne $y^2 = 2px$ où p est une constante positive. La vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = X\vec{i} + Y\vec{j}$ est telle que l'ensemble des points (X,Y), dont le graphique est appelé hodographe du mouvement de pôle O, a pour équation cartésienne $X^2 = 2qY$, q étant une constante positive.

1. Calculons la vitesse de M dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) \;=\; \dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}.$$

Or $x=y^2/2p \Longrightarrow \dot{x}=y\dot{y}/p$ ce qui implique que

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) \;=\; \frac{y}{p}\dot{y}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}=\dot{y}\left(\frac{y}{p}\vec{i}+\vec{j}\right).$$

Aussi $X=\dot{y}\frac{y}{p}$ et $Y=\dot{y}$. Comme $X^2=2qY \Longrightarrow \dot{y}\frac{y^2}{p^2}=2q \Longrightarrow \dot{y}=\frac{2qp^2}{y^2}$. Ce qui donne finalement

$$\begin{cases} X &= \frac{2qp}{y} \\ Y &= \frac{2qp^2}{y^2}. \end{cases}$$

2. Calculons l'accélération,

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= -\frac{2qp}{y^2}\dot{y}\vec{i}-\frac{4qp^2}{y^3}\dot{y}\vec{j} \\ &= -\frac{4q^2p^3}{y^4}\left(\vec{i}+\frac{2p}{y}\vec{j}\right) \\ &= -\frac{4q^2p^3}{xy^4}\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)=-\frac{8q^2p^4}{y^6}\overrightarrow{OM}.\end{aligned}$$

On en déduit que l'accélération est colinéaire avec $\overrightarrow{OM}$ et donc centrale.

3. Pour établir les équations horaires du mouvement, il suffit de voir que

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{2qp^2}{y^2} \\ \Longrightarrow y^2dy &= 2qp^2dt \Longrightarrow y^3=6qp^2t+y_0^3\end{aligned}$$

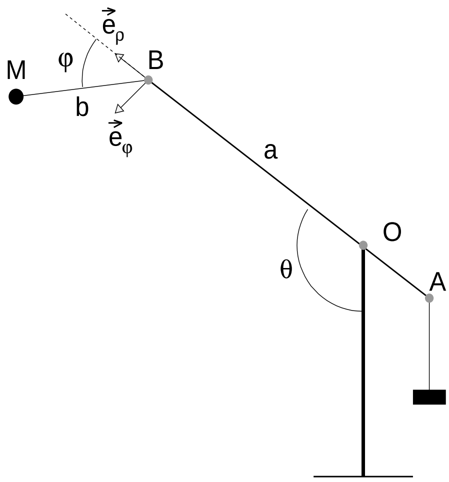
avec $y_0=0$, le point M passe par O à l'instant initial. Ce qui donne finalement

$$\begin{aligned} y &= \left(6qp^2t\right)^{\frac{1}{3}} \\ x &= \frac{1}{2p}\left(6qp^2t\right)^{\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

Corrigé 5 : Arme à l'ancienne

L'une des armes utilisée au Moyen-Âge pour envoyer des charges lourdes contre les murailles était ce que l'on appelle "un trébuchet" ou le catapulte. Il est composé d'une poutre AB à laquelle est fixée un contrepoids en A. En B est attachée une corde au bout de laquelle une poche contient le projectile M, voir figure ci-contre.
Soit $\mathcal{R}(Oxyz)$ le repère lié au sol et $\mathcal{R}_B(Bx_1y_1z_1)$ le repère lié à la poutre. Le mouvement a lieu dans le plan (Oxy). La base polaire $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi)$ est liée à $\mathcal{R}_B$. On donne $OB=a$ et $BM=b$.

Les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base polaire $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta)$.



1. $\mathcal{R}_B$ est en rotation par rapport à $\mathcal{R}$ et $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_B/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\vec{k}$.
2. $$\begin{aligned} \overrightarrow{BM} &= b\left(\cos\varphi\vec{e}_\rho + \sin\varphi\vec{e}_\varphi\right) \\ \Longrightarrow \vec{V}(M/\mathcal{R}_B) &= \left.\frac{d\overrightarrow{BM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_B} = b\dot{\varphi}\left(-\sin\varphi\vec{e}_\rho + \cos\varphi\vec{e}_\varphi\right). \end{aligned}$$
3. $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = (a + b\cos\varphi)\vec{e}_\rho + b\sin\varphi\vec{e}_\varphi.$$

   La vitesse d'entrainement en M de $\mathcal{R}_B$ par rapport à $\mathcal{R}$ est
   $$\begin{aligned} \vec{V}_e &= \left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_B/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{BM} \\ &= a\dot{\theta}\vec{e}_\varphi + b\dot{\theta}\left(-\sin\varphi\vec{e}_\rho + \cos\varphi\vec{e}_\varphi\right). \end{aligned}$$
4. Le projectile est lâché lorsque $\theta = -\pi$ et $\varphi = 0$ ($AOBM$ vertical).

   a-
   $$\begin{aligned} \vec{V}(M/\mathcal{R})(\theta = -\pi, \varphi) = 0) &= \vec{V}(M/\mathcal{R}_B)(\theta = -\pi, \varphi = 0) + \vec{V}_e(\theta = -\pi, \varphi = 0) \\ &= \left[b\left(\dot{\varphi} + \dot{\theta}\right) + a\dot{\theta}\right]\vec{e}_\varphi \\ \Longrightarrow \|\vec{V}(M/\mathcal{R})(\theta = -\pi, \varphi)\| &= b\left(\dot{\varphi} + \dot{\theta}\right) + a\dot{\theta}. \end{aligned}$$
5. S'il n'y avait qu'un seul bras rigide de longueur $a + b$, alors le mouvement de M sera circulaire et de vitesse égale à $(a + b)\dot{\theta}$. Le fait qu'il y ait une articulation augment la vitesse de $b\dot{\varphi}$.