Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2014/2015

Module de Mécanique du Point Matériel
Série N^0 1
Filières SMA/SMC/SMP

Exercice 1 : Opérations sur les vecteurs

On donne les trois vecteurs $\vec{V_1}(1,1,0)$, $\vec{V_2}(0,1,0)$ et $\vec{V_3}(0,0,2)$.

1. Calculer les normes $\|\vec{V_1}\|$, $\|\vec{V_2}\|$ et $\|\vec{V_3}\|$. En déduire les vecteurs unitaires $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ des directions respectivement de $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et de $\vec{V_3}$.
2. Calculer $\cos(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2})$, sachant que l'angle correspondant est compris entre 0 et π.
3. Calculer $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$, $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3$ et $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)$. Que représente chacune de ces trois grandeurs ?

Exercice 2 : Différentielle et dérivée d'un vecteur unitaire

Considérons la position d'un point M dans le repère $\mathcal{R}(O, xyz)$. Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ et $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ respectivement les bases cartésienne, cylindrique et sphérique associées à ce repère.

1. Calculer
$$\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} \quad , \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{k}}{\partial \varphi}.$$
2. En déduire $d\vec{e}_\rho$ et $d\vec{e}_\varphi$ dans la base cartésienne.
3. Montrer que les différentielles des vecteurs de la base cylindrique peuvent se mettre sous la forme
$$d\vec{e}_\rho = dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\rho \quad \text{et} \quad d\vec{e}_\varphi = dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi$$
en précisant l'expression du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ des vecteurs de la base cylindrique par rapport à $\mathcal{R}$. Déduire les dérivées par rapport au temps des vecteurs de la base cylindrique dans $\mathcal{R}$.

4. Quel est le vecteur rotation de la base sphérique par rapport à $\mathcal{R}$? En utilisant les résultats de la question précédente, déduire les expressions de

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt}, \quad \frac{d\vec{e_\theta}}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e_\varphi}}{dt}.$$

Pour les exercices 3,4 et 5, calculer les expressions lintérales des grandeurs demandées et faire l'application numérique.

Exercice 3 : Mouvement rectiligne

On effectue un test d'accélération sur une voiture arrêtée au départ (vitesse initiale $v_0 = 0$). La route est rectiligne.

1. La voiture est chronométrée à $20s$ au bout d'une distance $D =$ 140m.

   1-a) Déterminer l'expression de l'accélération γ, suposée constante.

   1-b) Déterminer l'expression de la vitesse v_D atteinte à la distance D.

2. Calculer la distance d'arrêt L pour une décélération de 8ms^{-2} ?

Exercice 4 : Excès de vitesse

Un conducteur roule à une vitesse constante $v_0 = 120$ km h $^{-1}$ sur une route réctiligne dépassant la limite autorisée. Un gendarme à moto démarre à l'instant où la voiture passe à sa hauteur et accélère uniformément. Le gendarme atteint la vitesse 100 km h $^{-1}$ au bout de $12s$.

1. Quel sera le temps nécessaire au gendarme pour rattraper la voiture ?
2. Quelle distance aura-t-il parcourue ?
3. Quelle vitesse aura-t-il atteinte ?

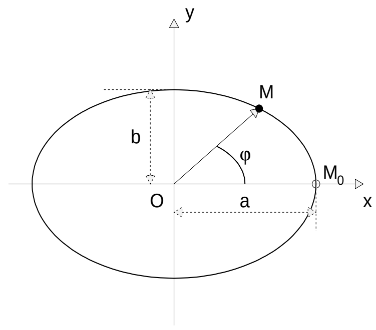
Exercice 5 : Mouvement circulaire uniforme

Considérons un satellite géostationnaire en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre sur une orbite de rayon r. Il est soumis à une accélération $\gamma = g_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2$, où $g_0 = 9.81 \mathrm{m\ s^{-2}}$ et $R = 6400$ km , le rayon de la Terre. La période de révolution du satellite est égale à la période de rotation de la Terre sur elle même.

1. Calculer la période T de rotation de la Terre en secondes. En déduire la vitesse angulaire Ω.
2. Déterminer l'altitude de l'orbite géostationnaire.

Exercice 6 : Mouvement sur une ellipse

Un point matériel M se déplace sur une ellipse d'équation en coordonnées cartésiennes $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, voir figure ci-contre. la direction de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à l'axe Ox est repérée par l'angle φ. L'équation horaire du mouvement de M peut se mettre sous la forme $x(t) = x_0 \cos(\omega t+\phi)$ et $y(t) = y_0 \sin(\omega \mathrm{t}+\psi)$ où l'on suppose que ω est une constante. A l'instant $t=0$, M se trouvait en M_0.



1. Déterminer x_0, ϕ et ψ. En déduire y_0.
2. Déterminer les composantes, et ce dans la base cartésienne, de la vitesse $(\dot{x}, \dot{y})$ et de l'accélération $(\ddot{x}, \ddot{y})$.
3. Montrer que l'accélération peut se mettre sous la forme $\vec{\gamma} = -k\overrightarrow{OM}$ où k est à déterminer.