Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2017/2018

Module de physique - Mécanique du Point Matériel
Filière S1 SMA - Série N° 4

Corrigé de l'éxercice 1

Le point M est soumis à l'interaction gravitationnelle.

1. La seule force à laquelle M est soumise est une force centrale, alors son moment par rapport à O est nul étant donné que $\overrightarrow{OM}$ est colinéaire à $\vec{F}$. Le théorème du moment cinétique permet d'écrire

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\vec{\sigma}_0(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0} \\ \Longrightarrow \vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R}) &= \overrightarrow{\text{Const}}. \end{aligned}$$

Comme le moment cinétique est constamment perpendinculaire à $\overrightarrow{OM}$, cela implique que le mouvement de M se déroule dans le plan perpendiculaire au moment cinétique.

2. Calculons la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$, sachant que $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho$

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\ &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi. \end{aligned}$$

Ce qui donne pour l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right)$. L'énergie potentielle associée à l'interaction gravitationnelle est

$$\begin{aligned} dE_p &= -\vec{F}\cdot\overrightarrow{dl} = \frac{GM_s m}{\rho^2}\vec{e}_\rho\cdot(d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\vec{e}_\rho) \\ &= \frac{GM_s m}{\rho^2}d\rho \Longrightarrow E_p = -\frac{GM_s m}{\rho} + \text{Constante} \end{aligned}$$

et en prenant l'énergie potentielle de référence à l'infini nulle cela implique que la constante est nulle. Aussi, l'énergie mécanique est égale à

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{GM_s m}{\rho}$$

Comme $|\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})| = |\overrightarrow{OM}\wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R})| = m\rho^2\dot{\varphi}$, cela donne

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\frac{\rho^4\dot{\varphi}^2}{\rho^2} - \frac{GM_s m}{\rho} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\frac{\sigma_O^2(M/\mathcal{R})}{m\rho^2} - \frac{GM_s m}{\rho} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\frac{mC^2}{\rho^2} + \frac{K}{\rho} \end{aligned}$$

avec $C = \rho^2\dot{\varphi}$ et $K = -GM_s m$.

3. On pose $\rho = \frac{1}{u}$, ce qui implique

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{d\rho}{du}\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \\ &= -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}\dot{\varphi} = -\rho^2\dot{\varphi}\frac{du}{d\varphi} = -C\frac{du}{d\varphi} \end{aligned}$$

ce qui donne pour l'énergie mécanique

$$E_m = \frac{1}{2}mC^2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \frac{mC^2}{2}u^2 + Ku.$$

4. Comme l'énergie mécanique ne dépend pas explicitement du temps, elle est conservée. Alors

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= mC^2\frac{du}{d\varphi}\frac{d^2u}{d\varphi^2}\dot{\varphi} + mC^2u\frac{du}{d\varphi}\dot{\varphi} + K\frac{du}{d\varphi}\dot{\varphi} \\ &= \dot{\varphi}mC^2\frac{du}{d\varphi}\left[\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u + \frac{K}{mC^2}\right] \\ &= 0 \\ \dot{\varphi} \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{du}{d\varphi} \neq 0 \Longrightarrow \quad & \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{K}{mC^2} = \frac{GM_s}{C^2} \end{aligned}$$

qui est une équation différentielle de second ordre à coefficients constants avec second membre. La solution générale $u(\varphi)$ et la somme de la solution sans second membre, u_{ssm}, et d'une solution particulière u_p. Calculons la solutions sans second membre,

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 0$$

dont l'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0 \Longrightarrow r_{1,2} = \pm i$ et donc la solution est

$$u_{ssm} = A_1e^{-i\varphi} + A_2e^{i\varphi} = A\cos(\varphi - \varphi_0).$$

On vérifie bien que $u_p = +\frac{GM_s}{C^2}$ est une solution particulière. Ainsi la solution générale est

$$u(\varphi) = u_{ssm} + u_p = A\cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{GM_s}{C^2}.$$

où A est φ_0 sont définis à partir des conditions initiales. Comme $\rho = 1/u$, nous obtenons

$$\rho = \frac{\frac{C^2}{GM_s}}{1 + \frac{AC^2}{GM_s}\cos(\varphi - \varphi_0)} = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

ce qui donne $p = \frac{C^2}{GM_s}$ et $e = \frac{AC^2}{GM_s}$. La trajectoire est une conique de paramètre p et d'excetricité e.

5. L'expression de l'énergie mécanique devient en utilisant $\frac{du}{d\varphi} = -e\sin(\varphi - \varphi_0)/p$

$$\begin{aligned} E_m = {} & \frac{mC^2}{2}\left(\frac{e^2\sin^2(\varphi - \varphi_0)}{p^2}\right) + \frac{mC^2}{2}\left(\frac{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}{p}\right)^2 - \\ & -GM_sm\left(\frac{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}{p}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{mC^2}{2p^2}\left(e^2\sin^2(\varphi-\varphi_0)+1+2e\cos(\varphi-\varphi_0)+e^2\cos^2(\varphi-\varphi_0)\right)- \\
&\quad -GM_s m\left(\frac{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)}{p}\right) \\
&= \frac{GM_s m}{2p}\left(e^2+1+2e\cos(\varphi-\varphi_0)-2-2e\cos(\varphi-\varphi_0)\right) \\
&= \frac{GM_s m}{2p}\left(e^2-1\right)
\end{aligned}
$$

Nous avons vu que la nature de la trajectoire est une conique dont l'excentricité est e :

Si e=0	$\Longrightarrow$	un cercle et $E_m < 0$, un état lié, ρ est constant.
Si 0<e<1	$\Longrightarrow$	une ellipse et $E_m < 0$, un état lié, $\rho \in [\rho_{min}, \rho_{max}]$
Si e=1	$\Longrightarrow$	une parabole $E_m = 0$, un état libre, $\rho \in [\rho_{min}, +\infty[$.
Si e>1	$\Longrightarrow$	une hyperbole et $E_m > 0$, c'est un état libre, $\rho \in [\rho_{min}, +\infty[$.

6. L'énergie mécanique est conservée, alors

$$
\begin{aligned}
E_m &= E_m(t=0) = E_c(t=0) + E_p(t=0) \\
&= \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{GM_s m}{\rho_0} \\
&= \frac{GM_s m}{2p}\left(e^2-1\right) \Longrightarrow e = \sqrt{1+\frac{pV_0^2}{GM_s}-\frac{2p}{\rho_0}}
\end{aligned}
$$

Corrigé de l'exercice 2

On reprend les résultats de l'exercice précédent sans les redémontrer.

1. La condition pour que la trajectoire soit un cercle est $e = 0$, ce qui implique que $E_m < 0$. ρ est constant. Soit $\rho = R$ le rayon de la trajectoire.
2. La trajectoire est circulaire ce qui implique que la composante tangentielle de l'accélération est nulle, $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \vec{\gamma}_n(M/\mathcal{R})$. Comme la force à laquelle le point matériel M est soumis est centrale, alors elle est colinéaire avec l'accélération, ce qui donne pour le PFD

$$
|\vec{F}| = m|\vec{\gamma}_n(M/\mathcal{R}) \Longrightarrow \frac{GM_s}{R^2} = m\frac{V^2(M/\mathcal{R})}{R} \Longrightarrow |\vec{V}(M/\mathcal{R})| = \sqrt{\frac{GM_s}{R}}
$$

3. La période de révolution T du point matériel M peut être obtenue par

$$
T = \frac{2\pi R}{|\vec{V}(M/\mathcal{R})|} \Longrightarrow T^2 = 4\pi^2 R^2 \frac{R}{GM_s} = \frac{4\pi^2 R^3}{GM_s}
$$

Ce dernier résultat où le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du rayon de la trajectoire vérifie bien la troisième loi de Kepler.

4. Calculons l'énergie mécanique E_m

$$
\begin{aligned}
E_m &= E_c + E_p \\
&= \frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R}) - \frac{GM_s m}{R}.
\end{aligned}
$$

Si l'on remplace le module de la vitesse par son expression, on obtient

$$
E_m = \frac{GM_s m}{2R} - \frac{GM_s m}{R} = -\frac{GM_s m}{2R} = E_p/2
$$

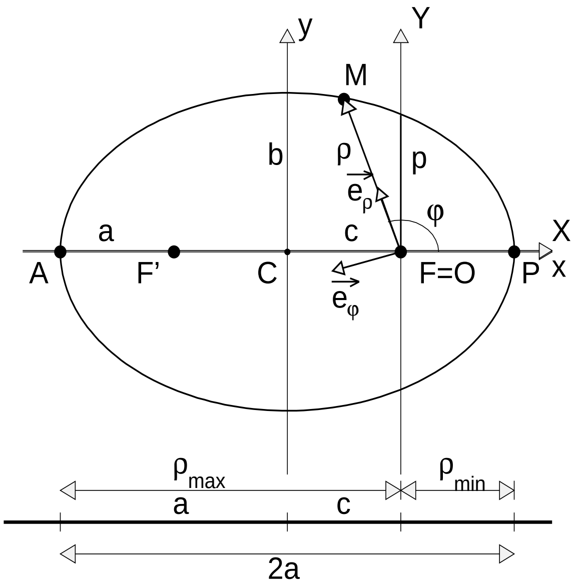
alors que si l'on substitue GM_s/R par $V^2(M/\mathcal{R})$, on obtient

$$E_m \quad = \quad = \frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R}) - mV^2(M/\mathcal{R}) = -\frac{1}{2m}V^2(M/\mathcal{R}) = -E_c$$

on en déduit que $E_m = -E_c = E_p/2$.

Corrigé de l'exercice 3

On utilise les résultats de l'exercice 1 sans les redémontrer.
Les notations qui seront uilisées dans le reste de l'exercice sont celles de la figure ci-après



1. La condition pour que la trajectoire soit une ellipse est que l'excentricité vérifie $0 < e < 1$, ce qui donne aussi $E_m < 0$.
   Cette condition étant satisfaite dans la suite de l'exercice.
2. Calculons l'équation de la trajectoire dans le référentiel $\mathcal{R}(F, xyz)$, sachant que

$$\begin{cases} \rho^2 &= x^2 + y^2 \\ \rho &= p - e\rho\cos\theta = p - ex \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \rho^2 = (p-ex)^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 &= p^2 - 2epx + e^2x^2 \\ \Longrightarrow \quad x^2(1-e^2) + 2epx + y^2 &= p^2 \\ \Longrightarrow \quad x^2 + 2\tfrac{ep}{1-e^2}x + \tfrac{y^2}{1-e^2} &= \tfrac{p^2}{1-e^2} \\ \Longrightarrow \quad \left(x + \tfrac{ep}{1-e^2}\right)^2 + \tfrac{y^2}{1-e^2} &= \tfrac{p^2}{1-e^2} + \tfrac{e^2p^2}{(1-e^2)^2} \\ \Longrightarrow \quad \left(x + \tfrac{ep}{1-e^2}\right)^2 + \tfrac{y^2}{1-e^2} &= \tfrac{p^2}{(1-e^2)^2} \end{aligned}$$

L'équation dans le référentiel $\mathcal{R}'(C, XYZ)$ s'obtient en procédant au changement de variable

$$\begin{cases} X &= x + \frac{ep}{1-e^2} \quad (e \neq 1) \\ Y &= y. \end{cases}$$

L'équation prend la forme suivante en divisant par $p^2/(1-e^2)^2$,

$$\frac{X^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{Y^2}{\frac{p^2}{1-e^2}} = 1.$$

3. Calcul des paramètres géométriques de l'ellipse :
   (a) $\underline{\rho_{min}}$:

$$\rho_{min} = \rho(\varphi = 0) \Longrightarrow \rho_{min} = \frac{p}{1 + e\cos(0)} = \frac{p}{1+e}$$

   (b) $\underline{\rho_{max}}$:

$$\rho_{max} = \rho(\varphi = \pi) \Longrightarrow \rho_{max} = \frac{p}{1 + e\cos(\pi)} = \frac{p}{1-e}$$

   (c) $\underline{a \text{ et } b}$: on utilise l'équation de la conique dans le référentiel $\mathcal{R}'(C, XYZ)$ ce qui permet d'écrire

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = \frac{X^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{Y^2}{\frac{p^2}{1-e^2}} = 1 \Longrightarrow a = \frac{p}{1-e^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}.$$

   (d) $\underline{c}$: la distance du foyer de l'ellipse F au centre C est donnée par

$$c = a - \rho_{min} = a - \frac{p}{1+e} = a - a\frac{1-e^2}{1+e} = a - a(1-e) \Longrightarrow c = ea = \frac{ep}{1-e^2}.$$

4. Calculons les vitesses V_A et V_P respectivement du point M à l'apogée et à la périgée. En effet, l'apogée et la périgée constituent les sommets de l'ellipse et donc la vitesse est orthoradiale en ces points, $\vec{V}(M/\mathcal{R}) \perp \overrightarrow{OM}$. Ainsi le moment cinétique de M en A est $|\vec{\sigma}_O(M = A)| = m\rho_{max}V_A = \frac{mp}{1-e}V_A$ et celui de M en P est $|\vec{\sigma}_O(M = P)| = m\rho_{min}V_A = \frac{mp}{1+e}V_P$. Or le moment cinétique est conservé et on a $|\vec{\sigma}_O| = mC = m\sqrt{pGM_s}$, ce qui donne

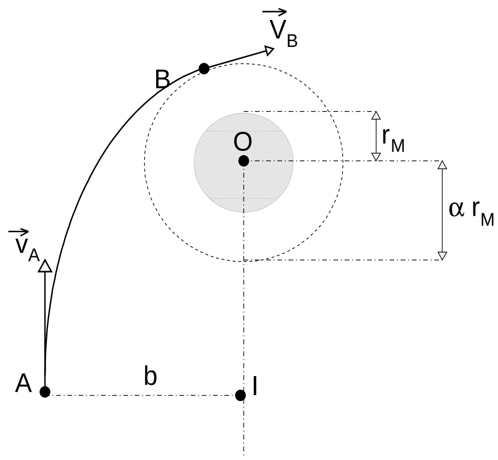
$$\begin{aligned} V_A &= \frac{C(1-e)}{p} = (1-e)\sqrt{\frac{GM_s}{p}} \\ V_P &= \frac{C(1+e)}{p} = (1+e)\sqrt{\frac{GM_s}{p}} \end{aligned}$$

5. Comme l'énergie mécanique est conservée, elle a la même valeur quelque soit la position de M sur l'ellipse. Calculons sa valeur au point P :

$$\begin{aligned} E_m &= E_c(M = P) + E_p(M = P) \\ &= \frac{1}{2}mV_P^2 - \frac{GM_sm}{\rho_{min}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{GM_sm}{p}(1+e)^2 - \frac{GM_sm}{p}(1+e) \\ &= \frac{1}{2}\frac{GM_sm}{p}\left(1 + e^2 + 2e - 2 - 2e\right) \\ &= -\frac{1}{2}GM_sm\frac{1-e^2}{p} = -\frac{GM_sm}{2a} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 4

On se propose d'étudier la mise en orbite autour de Mars d'une sonde S de masse m_S. La sonde est soumise à l'effet de l'attraction gravitationnelle de Mars. Le référentiel lié à Mars peut être considéré comme un référentiel galiléen. La vitesse de la sonde au point de lancement A est $\vec{V}_A$ et présente un "paramètre d'impact" b, voir figure ci-après.



Les résultats des exercices précédents peuvent être utilisés sans démonstration.

1. L'effet de l'attraction gravitationnelle de Mars sur la sonde en A est négligeable alors l'énergie potentielle en ce point peut être considérée nulle. L'énergie mécanique est alors $E_m = \frac{1}{2}mV_A^2$. Comme l'énergie mécanique de la sonde est positive ce qui implique que $e > 1$, alors la trajectoire est une branche d'hyperbole dont le sommet est le point pour lequel la vitesse est orthoradiale (B) et le foyer est O.
2. La constante des aires C est calculée à partir du moment cinétique de S par rapport à O en A :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_O &= \overrightarrow{OA} \wedge m_S\vec{V}_A \\ &= \left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}\right) \wedge m_S\vec{V}_A \\ &= \overrightarrow{OI} \wedge m_S\vec{V}_A \Longrightarrow |\vec{\sigma}_O| = m_S b V_A \Longrightarrow C = \frac{|\vec{\sigma}_O|}{m_S} = bV_A.\end{aligned}$$

3. Le moment cinétique est conservé car la force est centrale. Ainsi le moment cinétique de la sonde S en B, sachant que $\vec{V}_B \perp \overrightarrow{OB}$, puisque la trajectoire de la sonde en B est tangente au cercle,

$$|\vec{\sigma}_O| = m_S \alpha r_M V_B = m_S C = m_S b V_A \Longrightarrow V_B = \frac{bV_A}{\alpha r_M}.$$

4. L'énergie mécanique en B est égale à

$$\begin{aligned}E_m(B) &= \frac{1}{2}m_S V_B^2 - \frac{GM_M m_S}{\alpha r_M} = E_m(A) = \frac{1}{2}m_S V_A^2 \\ \Longrightarrow &\quad V_B = \sqrt{V_A^2 + \frac{2GM_M}{\alpha r_M}} \\ \text{or} &\quad b = \frac{\alpha r_M}{V_A}V_B = \alpha r_M\sqrt{1 + \frac{2GM_M}{\alpha r_M V_A^2}}\end{aligned}$$

Pour que la sonde atterisse sur la surface de Mars, la valeur b_o du paramètre d'impact est celle qui correspond à $\alpha = 1$, ce qui donne

$$b_o = r_M\sqrt{1 + \frac{2GM_M}{\alpha r_M V_A^2}}.$$

5. On utilise le résultat de l'exercice 2 :

$$V_{orb} \quad = \quad \sqrt{\frac{GM_M}{\alpha r_M}}.$$

6. Pour faire passer la sonde sur l'orbite circulaire de rayon αr_M, la variation de vitesse à communiquer à la sonde est

$$\Delta V \quad = \quad V_{orb} - V_B = \sqrt{\frac{GM_M}{\alpha r_M}} - \frac{bV_A}{\alpha r_M}.$$