

Module de physique - Mécanique du Point Matériel
 Filière S1 SMA - Série N° 2
 Cinématique et Dynamique du Point Matériel

CORRIGÉ : MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE PARABOLE

Un point matériel M décrit la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est donnée par $\rho \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \rho_0$ où ρ_0 est une constante et $\varphi \in [-\pi, +\pi[$.

1. Pour montrer que la trajectoire est une parabole, réexprisons l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes. Sachant que

$$\begin{aligned} \cos^2\frac{\varphi}{2} &= \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi) \\ \implies \rho &= 2\rho_0 - \rho\cos\theta \\ \implies \rho^2 &= (2\rho_0 - \rho\cos\theta)^2. \end{aligned}$$

Comme $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ alors $\rho^2 = x^2 + y^2$ et

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (2\rho_0 - x)^2 \\ \implies y^2 &= -4\rho_0x + 4\rho_0^2 \end{aligned}$$

qui est l'équation d'une parabole d'axe (Ox) .

Pour ce qui est de la représentation graphique, on note que

- Domaine de définition

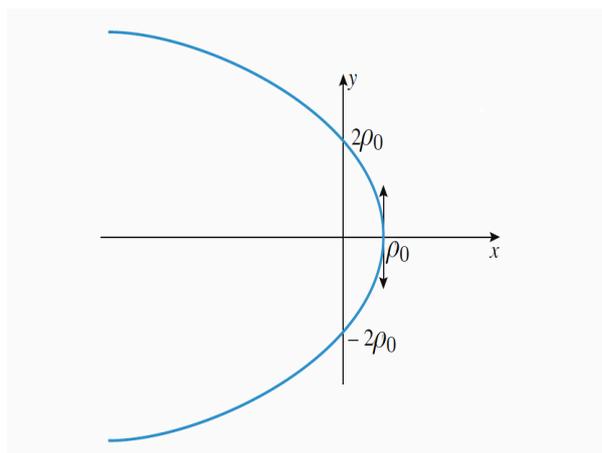
$$-4\rho_0x + 4\rho_0^2 \geq 0 \implies x \leq \rho_0$$

et donc $] -\infty, \rho_0]$.

- Calculons la dérivée

$$\begin{aligned} y &= 2\rho_0\sqrt{1 - \frac{x}{\rho_0}} \\ \implies y' = \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{\rho_0}}} \end{aligned}$$

qui ne s'annule jamais. Toutefois $\lim_{x \rightarrow \rho_0} y' = \infty$. Nous avons aussi deux branches parabolique lorsque $x \rightarrow -\infty$. Ce qui donne pour la représentation graphique la courbe ci-contre.



— On suppose que le module de la vitesse est toujours proportionnel à ρ : $\|\vec{V}\| = k\rho$, où k est une constante positive.

i- L'expression de la vitesse dans le système de coordonnées polaires est

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\ &= V_r\vec{e}_\rho + V_\perp\vec{e}_\varphi \\ \Rightarrow V_r &= \dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \\ &= \rho_0\dot{\varphi} \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos^3\frac{\varphi}{2}} \\ \text{et } V_\varphi &= \rho\dot{\varphi} = \rho_0 \frac{\dot{\varphi}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}.\end{aligned}$$

ii- Nous avons

$$\begin{aligned}\|\vec{V}\|^2 &= V_r^2 + V_\varphi^2 = k^2\rho^2 \\ \Rightarrow \frac{\rho_0^2\dot{\varphi}^2}{\cos^6\frac{\varphi}{2}} \left(\sin^2\frac{\varphi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2} \right) &= k^2 \frac{\rho_0^2}{\cos^4\frac{\varphi}{2}} \\ \Rightarrow \dot{\varphi}^2 &= k^2 \cos^2\frac{\varphi}{2} \\ \Rightarrow 2 \frac{d\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}} &= k dt \\ \Rightarrow 2 \int \frac{d\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}} &= \int k dt \\ \Rightarrow 2 \mathbf{Log} \left| \mathbf{tg} \left(\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right| &= kt + C_1\end{aligned}$$

$\varphi \in [-\pi, \pi[\Rightarrow \frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{4} \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et donc \mathbf{tg} est positive dans cet intervalle $\Rightarrow \left| \mathbf{tg} \left(\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \mathbf{tg} \left(\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{4} \right)$. Nous en déduisons que

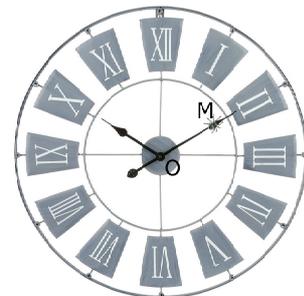
$$\mathbf{tg} \left(\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = C_2 e^{\frac{1}{2}kt}$$

où $C_2 = e^{C_1/2}$ est une constante. Comme $\varphi(0) = 0$ alors $C_2 = 1$ et donc

$$\varphi(t) = 4 \mathbf{atan} \left(e^{\frac{1}{2}kt} \right) - \pi.$$

CORRIGÉ : SPIRALE D'ARCHIMÈDE

Une araignée M est située au centre d'une horloge murale O . A l'instant où l'aiguille des secondes passe par le chiffre III du cadran de l'horloge ($t = 0$), voir figure ci-contre, l'araignée se dirige vers l'extrémité de cette aiguille en se déplaçant à une vitesse constante $v = 10/3 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$. La longueur de l'aiguille est de 2m. On note par ω le module de la vitesse angulaire de rotation de l'aiguille des secondes.



1. On étudie le mouvement de l'araignée par rapport à l'aiguille.

1.a Soit $\mathcal{R}_1(O, x_1, y_1, z_1)$ le repère tel que l'axe (Ox_1) soit confondu avec l'aiguille des secondes et que sa base fixe $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$, vecteurs unitaires respectifs des trois axes, soit orthonormée directe. On utilisera les coordonnées cartésiennes de \mathcal{R}_1 et le vecteur position est donné par $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho$.

1.b Nous avons $\vec{V}(M/\mathcal{R}_1) = v\vec{e}_\rho$, avec v constante. Donc le mouvement de l'araignée par rapport à l'aiguille des secondes est identique à son mouvement par rapport \mathcal{R}_1 . Comme $\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$ est constante alors le mouvement est rectiligne uniforme selon l'axe (Ox_1) .

Comme $\vec{V}(M/\mathcal{R}_1) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho$, alors $\dot{\rho} = v \implies \rho = vt + \rho(0)$ avec $\rho(0) = 0$ car à $t = 0$ l'araignée était située au centre. Le temps t_{ext} mis par l'araignée pour attendre l'extrémité située à $\rho_{ext} = 2m$, est donc

$$t_{ext} = \frac{\rho_{ext}}{v} = \frac{2}{0.1/3} = 60 \text{ secondes.}$$

2. On cherche maintenant à déterminer la nature de la trajectoire de l'araignée par rapport à un observateur situé aux pieds de l'horloge.

2.a On choisit \mathcal{R} de manière à ce que (Ox) passe par le chiffre III du cadran de l'horloge et (Oy) passe par le chiffre XII. (Oz) est perpendiculaire au plan de l'horloge de manière que \mathcal{R} soit un repère direct.

On choisit également les coordonnées polaires (ρ, φ) dans \mathcal{R} , dont la base est $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ définie dans la question 1.

Le vecteur rotation de la base polaire est $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$. Or l'aiguille des secondes tourne dans le sens des angles négatifs, alors $\dot{\varphi} = -\omega$ et donc $\vec{\Omega} = -\omega\vec{k}$.

Le vecteur position est donné par $\vec{OM} = \rho\vec{e}_\rho$.

2.b L'expression de la vitesse est

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\rho \\ &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho - \rho\omega\vec{e}_\varphi \\ &= v\vec{e}_\rho - v\omega t\vec{e}_\varphi. \end{aligned}$$

sachant que $\rho = vt$ et $\dot{\varphi} = -\omega$. Quant à l'accélération, nous avons

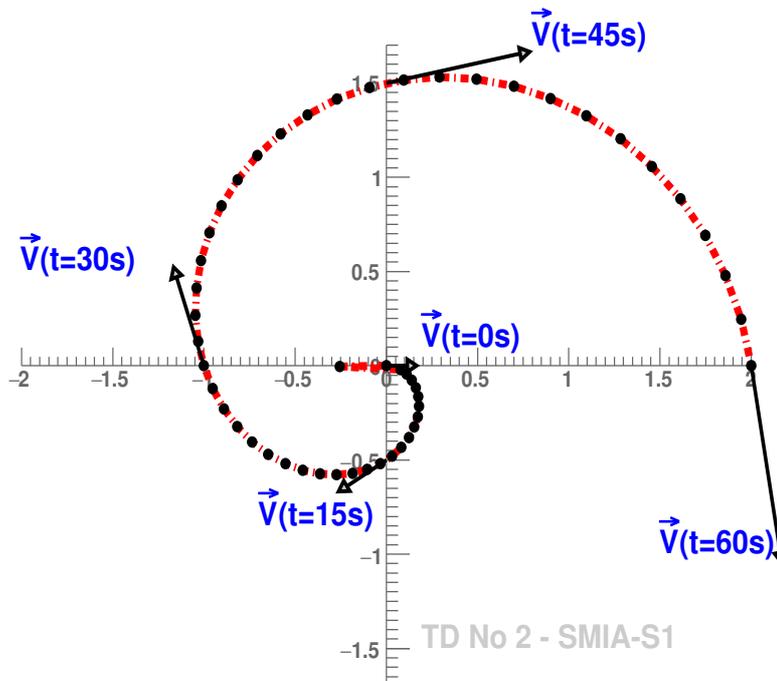
$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \left. \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi \\ &= -v\omega^2 t\vec{e}_\rho - 2v\omega\vec{e}_\varphi. \end{aligned}$$

3. On cherche à représenter graphiquement la trajectoire de l'araignée.

3.a Les composantes de la vitesse pour les différents instants sont données dans le tableau ci dessous :

Instant t(s)	$\varphi = -\frac{\pi}{30}t$ (rad)	$\vec{V} = 0.1/3(\vec{e}_\rho + \varphi\vec{e}_\varphi)$	$\vec{V} = 0.1/3[(\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)\vec{i} + (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)\vec{j}]$
0	0	$0.1/3\vec{e}_\rho$	$0.1/3\vec{i}$
15	$-\frac{\pi}{2}$	$0.1/3(\vec{e}_\varphi - \frac{\pi}{2}\vec{e}_\rho)$	$0.1/3(-\frac{\pi}{2}\vec{i} - \vec{j})$
30	$-\pi$	$0.1/3(\vec{e}_\rho - \pi\vec{e}_\varphi)$	$0.1/3(-\vec{i} + \pi\vec{j})$
45	$-\frac{3\pi}{2}$	$0.1/3(\vec{e}_\varphi - \frac{3\pi}{2}\vec{e}_\rho)$	$0.1/3(\frac{3\pi}{2}\vec{i} + \vec{j})$
60	-2π	$0.1/3(\vec{e}_\rho - 2\pi\vec{e}_\varphi)$	$0.1/3(\vec{i} - 2\pi\vec{j})$

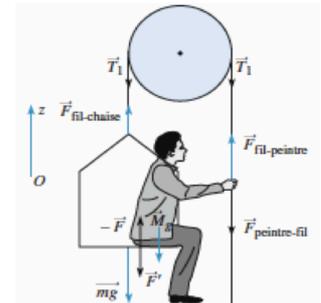
Il suffit de reporter sur un graphique les vecteurs vitesses et la trajectoire est tangente aux vecteurs vitesses, voir figure ci-dessous :



Corrigé : Peintre de façade de bâtiment

Un peintre en bâtiment de masse $M = 90\text{Kg}$ est assis sur une chaise, de masse $m = 15\text{kg}$, suspendue à une corde inextensible reliée à une poulie parfaite^a, voir figure ci-contre. Le peintre exerce une force de 680N sur la corde pour faire monter la chaise le long de la façade du bâtiment.

a. Les tensions de la corde de part et d'autre de la poulie sont égales en module.



On considère le système (S) formé par le peintre et la chaise et que l'on peut considérer comme un point matériel de masse $M + m$. Le mouvement a lieu dans le plan Oxz et Oz est la verticale ascendante. La figure illustre les différentes forces mises en jeu. Le repère lié à la surface de la terre peut être considéré comme galiléen, que l'on note $\mathcal{R}(O, xyz)$, muni de la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. La position de (S) est repérée par $\vec{OS} = z\vec{k} \rightarrow \vec{\gamma}(S/\mathcal{R}) = \ddot{z}\vec{k}$. Les forces appliquées à $(S = \text{Peintre} + \text{Chaise})$, sont $\vec{F}_{\text{fil-chaise}} + \vec{F}_{\text{fil-peintre}} + m\vec{g} + M\vec{g}$ et le PFD donne

$$\begin{aligned} (M + m)\vec{\gamma} &= (M + m)\ddot{z}\vec{k} = \vec{F}_{\text{fil-chaise}} + \vec{F}_{\text{fil-peintre}} + m\vec{g} + M\vec{g} \\ &= 2T_1 - (M + m)g \implies \gamma = \frac{2T_1}{M + m} - g = \frac{680}{105} - 9.81 = 3.14\text{m.s}^{-2} \end{aligned}$$

On constate que l'accélération est positive et donc le système monte bien.

2. Le peintre et la chaise sont animée de la même accélération égale à $\vec{\gamma}$. Notons par \vec{F} la force exercée par le peintre sur la chaise. Appliquons le PFD à la chaise seule :

$$\begin{aligned} m\gamma\vec{k} &= -m\vec{g} + T_1\vec{k} + \vec{F} \\ \implies \vec{F} &= m(\gamma + g - T_1)\vec{k} \\ &= m\left(\frac{2T_1}{M + m} - T_1\right)\vec{k} = \frac{m - M}{m + M}T_1\vec{k} \implies F = \frac{75}{105} \times 680 = -485\text{N}. \end{aligned}$$

Cette force se dirige bien vers le bas et donc bien exercée par le peintre sur la chaise. C'est l'équivalent d'une masse de $485/9.81 = 49.4\text{kg}$.

3. Soit m_p la masse de la peinture que le peintre peut faire monter. Considérons le système $(S) = (Peintre + Chaise + Peinture)$ que l'on traite comme un point matériel. Alors, le PFD donnerait

$$\begin{aligned}(M + m + m_p)\gamma\vec{k} &= -(m + m_p + M)g\vec{k} + 2T_1\vec{k} \\ \Rightarrow \gamma &= -g + \frac{2T_1}{M + m + m_p}.\end{aligned}$$

Pour que la chaise monte, il suffit que $\gamma > 0$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\gamma &> 0 \\ \Rightarrow -g + \frac{2T_1}{M + m + m_p} &> 0 \\ \Rightarrow m_p &< \frac{2T_1}{g} - M - m \\ \Rightarrow m_p &< \frac{2 \times 680}{9.81} - 90 - 15 = 33.63\text{kg}.\end{aligned}$$

CORRIGÉ : CHAMP DE PESANTEUR TERRESTRE

Considérons un point matériel M , de masse m , suspendu à un fil de longueur l en équilibre dans le référentiel Terrestre $\mathcal{R}(O, xyz)$. Soit $T = \frac{2\pi}{\Omega_T}$ la période de rotation de la Terre sur elle-même. On considère que M est soumise à la seule gravitation de la Terre, $\vec{F} = -\frac{K_G M_T m}{\|\vec{CM}\|^3} \vec{CM}$, où C est le centre de la Terre. Les notations du cours étant

utilisées. La latitude de M est λ .

Soit $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ la base cartésienne de \mathcal{R}_g , telle que $\vec{\Omega}_T = \Omega_T \vec{k}_0$. Soit $(\vec{e}_{\rho_0}, \vec{e}_{\varphi_0}, \vec{k}_0)$, la base cylindrique de \mathcal{R}_g .

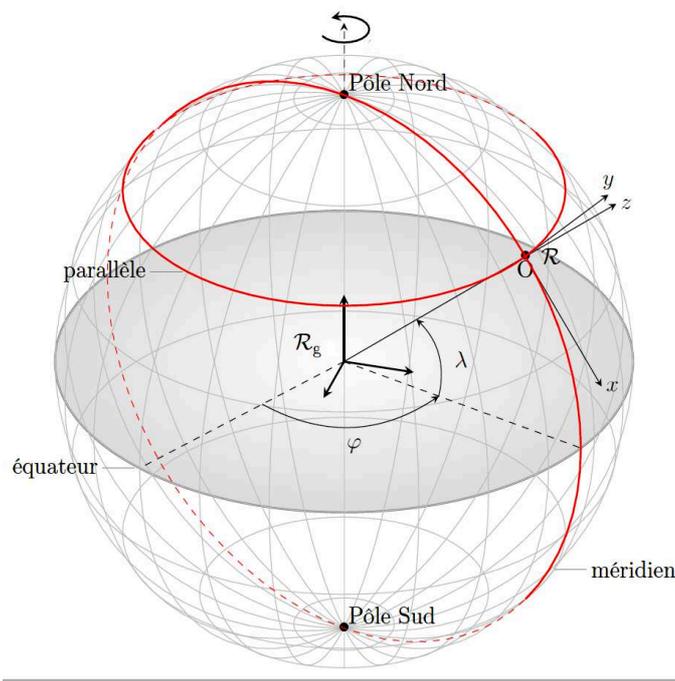


FIGURE 1 – Référentiel géocentrique et référentiel Terrestre.

1. Etant donné que les durées mises en jeu dans le mouvement du pendule, de l'ordre de grandeur de la période, sont négligeable devant le temps de révolution de la Terre autour du Soleil, le déplacement du centre de la Terre peut être considéré comme un segment de droite, et donc son mouvement peut être considéré comme un mouvement de translation rectiligne uniforme. Aussi, le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g peut être considéré comme Galiléen.

L'accélération d'entraînement de \mathcal{R} par rapport à \mathcal{R}_g est donnée par

$$\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}(O/\mathcal{R}_r) + \frac{d\vec{\Omega}_T}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}_T \wedge (\vec{\Omega}_T \wedge \overrightarrow{OM})$$

Nous avons,

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(O/\mathcal{R}_g) &= \left. \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{CO} \right|_{\mathcal{R}_g} \\ \implies \vec{\gamma}(O/\mathcal{R}_g) &= \left. \frac{d}{dt} (\vec{\Omega}_T \wedge \overrightarrow{CO}) \right|_{\mathcal{R}_g} \\ &= \vec{\Omega}_T \wedge (\vec{\Omega}_T \wedge \overrightarrow{CO}) \end{aligned}$$

car $\|\overrightarrow{CO}\| = R_T$ est constant. L'accélération d'entraînement est ainsi égale à, sachant que Ω_T est constante

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_e &= \vec{\Omega}_T \wedge (\vec{\Omega}_T \wedge \overrightarrow{CO}) + \vec{\Omega}_T \wedge (\vec{\Omega}_T \wedge \overrightarrow{OM}) \\ &= \vec{\Omega}_T \wedge (\vec{\Omega}_T \wedge \overrightarrow{CM}) \\ &\simeq \vec{\Omega}_T \wedge (\vec{\Omega}_T \wedge \overrightarrow{CO}) \end{aligned}$$

car $\|\overrightarrow{OM}\|$ qui est l'altitude de M est très négligeable devant $\|\overrightarrow{CO}\|$ qui est le rayon de la Terre. Soit H la projection de O dans le plan Cx_0y_0 , alors $\overrightarrow{CO} = \|\overrightarrow{CH}\|\vec{e}_{\rho_0} + \overrightarrow{HO}\vec{k}_0$, et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_e &= -\|\overrightarrow{CH}\|\Omega_T^2 \vec{e}_{\rho_0} \\ &= -R_T \cos \lambda \Omega_T^2 \vec{e}_{\rho_0} \end{aligned}$$

Comme M est en équilibre dans \mathcal{R} , alors $\vec{V}_r = \vec{0}$ et l'accélération de Coriolis, $\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}_T \wedge \vec{V}_r = \vec{0}$.

2. \mathcal{R} est non Galiléen. Le PFD dans \mathcal{R} s'écrit alors, sachant que M est soumis à l'attraction Terrestre, \vec{F} , et la tension du fil \vec{T} , comme suit

$$\vec{F} + \vec{T} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} = m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}).$$

Comme $\vec{V}_r = \vec{0} \implies \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \vec{\gamma}_r = \vec{0}$ ce qui permet d'écrire, avec $\vec{f}_{ic} = \vec{0}$,

$$\begin{aligned} \vec{F} + \vec{T} + \vec{f}_{ie} &= \vec{0} \\ \implies -\frac{K_G M_T m}{\|\overrightarrow{CM}\|^2} \vec{k} + \vec{T} + m\|\overrightarrow{CH}\|\Omega_T^2 \vec{e}_{\rho_0} &= \vec{0} \\ \implies -\frac{K_G M_T m}{\|\overrightarrow{CO}\|^2} \vec{k} + \vec{T} + mR_T \cos \lambda \Omega_T^2 \vec{e}_{\rho_0} &= \vec{0} \\ \implies \vec{T} &= m \left(\frac{K_G M_T}{R_T^2} \vec{k} - R_T \cos \lambda \Omega_T^2 \vec{e}_{\rho_0} \right) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\|\overrightarrow{CM}\| \simeq R_T$.

3. Comme le poids est défini par $\vec{P} = m\vec{g} = -\vec{T}$ alors

$$\begin{aligned} m\vec{g} &= -\vec{T} = -m \left(\frac{K_G M_T}{R_T^2} \vec{k} - R_T \cos \lambda \Omega_T^2 \vec{e}_{\rho_0} \right) \\ \implies \vec{g}(M) &= -\frac{K_G M_T}{R_T^2} \vec{k} + R_T \cos \lambda \Omega_T^2 \vec{e}_{\rho_0}. \end{aligned}$$

On en conclue que l'effet de la force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la Terre est contenue dans le poids. *Quand on applique le PFD dans \mathcal{R} , il faut rajouter seulement la force d'inertie Coriolis, la force d'inertie d'entraînement étant intégrée dans le poids.*

4. le champ de gravitation d'un astre de masse M_A et situé à la distance d de la Terre est donnée par

$$g_A = \frac{K_G M_A}{d^2}.$$

Pour la Terre

$$\begin{aligned} g_T = g &= \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{6370^2 \times 10^6} = \\ &= 9.86 \text{ m.s}^{-2}. \end{aligned}$$

et pour la Lune

$$\begin{aligned} g_L &= \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 7.3 \times 10^{22}}{384^2 \times 10^{12}} = \\ &= 3.3 \times 10^{-5} \text{ m.s}^{-2}. \end{aligned}$$

et enfin pour le Soleil

$$\begin{aligned} g_S &= \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}}{150^2 \times 10^{18}} = \\ &= 5.9 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-2}. \end{aligned}$$

On en conclue que le champ de gravitation Terrestre est plus important devant les autres champs de gravitation de la Lune et du Soleil. :