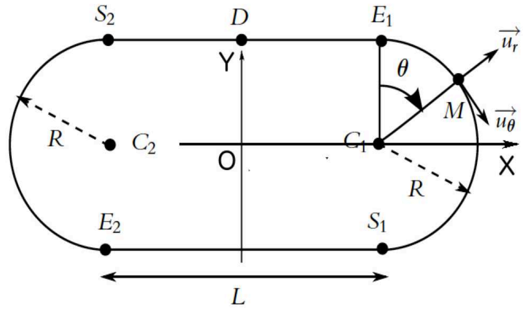
Université Cadi Ayyad *Année Universitaire 2017/2018*
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Module de physique - Mécanique du Point Matériel
Filière S1 SMA - Série N° 2

Corrigé 1 : Mouvement uniforme et uniformément accéléré

Un cycliste, considéré comme un point matériel noté M, s'entraine sur un vélodrome constitué de deux demi cercles et deux droites , voir figure ci-contre. On considère le repère $\mathcal{R}(O, XYZ)$ tels que les coordonnées des points $D(0, R, 0)$, $E_1(L/2, R, 0)$, $S_1(L/2, -R, 0)$. Le cycliste démarre sans vitesse initiale du point D.



1. Le coureur parcourt la distance (DE_1) avec une accélération constante γ_1.

i- Le mouvement est uniformémment accéléré où $\vec{\gamma}_1 = \gamma_1 \vec{i}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \gamma_1 \Longrightarrow \dot{x} = \gamma_1 t + \dot{x}_0(=0) \Longrightarrow x = \frac{1}{2}\gamma_1 t^2 + x_0(=0); \\ \ddot{y} &= 0 \Longrightarrow y = 0 \text{ où } \dot{y}_0 = 0 \text{ et } y_0 = 0. \end{aligned}$$

ii- Au cours du passage par E_1, le coureur a parcouru une distance égale à $L/2$, ce qui donne

$$\begin{aligned} t_{E_1} &= \sqrt{\frac{L}{\gamma_1}} \\ \|V_{E_1}\| &= \gamma_1 t_{E_1} = \sqrt{\gamma_1 L}. \end{aligned}$$

2. Dans le premier virage, (E_1S_1), le cycliste a une accélération tangentielle, selon $\vec{e}_\theta$, constante égale à γ_1.

i- Le vecteur position sur cette portion du vélodrôme est donné par

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1M} = \frac{L}{2}\vec{i} + R\vec{u}_r \\ \Longrightarrow \vec{V}(M/\mathcal{R}) &= R\dot{\theta}\vec{u}_\theta \text{ et } \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta \end{aligned}$$

ii- Prenons l'origine des temps à l'instant de passage du coureur par E_1. Nous savons que la composante tangentielle de l'accélération est constante et égale à γ_1, ce qui donne

$$R\ddot{\theta} = \gamma_1 \Longrightarrow \dot{\theta}(t) = \frac{\gamma_1}{R}t + \dot{\theta}_0$$

où $\dot{\theta}_0$ est la valeur de la vitesse angulaire en E_1. Comme $\|V_{E_1}\| = R\dot{\theta}_0 \Longrightarrow \dot{\theta}_0 = \|V_{E_1}\|/R = \sqrt{\gamma_1 L}/R$, ce qui donne

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\gamma_1}{R}t + \frac{\sqrt{\gamma_1 L}}{R} \Longrightarrow \theta(t) = \frac{\gamma_1}{2R}t^2 + \frac{\sqrt{\gamma_1 L}}{R}t + \theta_0$$

avec θ_0 est la valeur de θ en E_1 et donc $\theta_0 = 0$.

3. Notons par $t_{E_1S_1}$ le temps mis par le coureur pour parcourir le demi cercle (E_1S_1). Comme le passage en S_1 correspond à $\theta = \pi$ alors

$$\frac{\gamma_1}{2R}t_{E_1S_1}^2 + \frac{\sqrt{\gamma_1 L}}{R}t_{E_1S_1} = \pi \Longrightarrow t_{E_1S_1}^2 + 2\sqrt{\frac{L}{\gamma_1}}t - \frac{2\pi R}{\gamma_1} = 0$$

qui est une équation de second dégré dont le discriminant réduit est $\Delta' = \frac{L}{\gamma_1} + \frac{2\pi R}{\gamma_1}$ et la solution physique est la racine positive

$$t_{E_1S_1} = -\sqrt{\frac{L}{\gamma_1}} + \sqrt{\frac{L+2\pi R}{\gamma_1}}.$$

Comme $t_{S_1} = t_{E_1} + t_{E_1S_1}$, nous avons alors

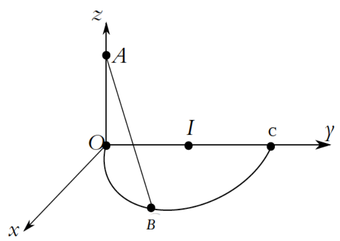
$$t_{S_1} = \sqrt{\frac{L}{\gamma_1}} - \sqrt{\frac{L}{\gamma_1}} + \sqrt{\frac{L+2\pi R}{\gamma_1}} = \sqrt{\frac{L+2\pi R}{\gamma_1}}.$$

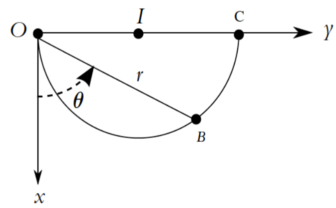
La vitesse au point S_1 est obtenue par

$$\|V_{S_1}\| = R\dot{\theta}(t_{E_1S_1}) = \sqrt{\gamma_1\left(L+2\pi R\right)}$$

Corrigé 2 : Mouvement d'un point matériel fixé au sommet d'une barre

Un point matériel B est fixé à l'extrémité d'u
barre AB de longueur $2b$. Le point B décrit s
le plan (Oxy) du référentiel $\mathcal{R}(O, xyz)$ un der
cercle de centre $I(0, b, 0)$ et de rayon b et ce
la vitesse angulaire ω constante et positive, v
figures ci-contre. A l'instant initial $t = 0$, B
trouve en O. Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base cartésien
et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ la base cylindrique de $\mathcal{R}$.





On utilise les notations des angles ci-après : $\alpha = (\widehat{OAB}), \phi = (\widehat{OIB}), \beta = (\widehat{IOB})$.

1. Considérons le triangle (OIB). Comme $OI = IB$, tous deux sont les rayons du demi-cercle, alors ce triangle est isocèle ce qui implique, en utilisant les notations des angles mentionnées ci-dessus

$$2\beta + \phi = \pi.$$

Nous avons également $\theta + \beta = \pi/2$ ce qui donne finalement $\phi = 2\theta$.

2. Comme B décrit un demi-cercle avec la pulsation constante ω cela donne $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
Notons que ω est la vitesse angulaire de rotation de B par rapport à I et comme la rotation sur le cercle peut être repérée par l'angle ϕ cela implique que $\dot{\phi} = \omega \Longrightarrow \phi = \omega t + \phi(0)$.
Sachant que $\phi(0) = 0$, le point B initialement était en O, alors $\phi(t) = \omega t$.
Nous en déduisons ainsi $\theta(t) = \frac{\phi(t)}{2} = \frac{\omega t}{2}$.
Notons que $\overrightarrow{OB} = r\vec{e}_r = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB}$. Si l'on projet sur $\vec{e}_r$ nous obtenons

$$\left.\begin{array}{rcl} \overrightarrow{OB}\cdot\vec{e}_r & = & r \\ & = & b\cos\beta + b\cos\beta = 2b\cos\beta = 2b\sin\theta \end{array}\right\} \Longrightarrow r(t) = 2b\sin\theta = 2b\sin\frac{\omega t}{2}.$$

Notons que r est toujours positif, comme l'exige la valeur d'une norme, car $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et donc le sinus est toujours positif.

3. Sachant que $\overrightarrow{OB} = r\vec{e}_r$, nous avons

$$\begin{aligned}\vec{V}(B/\mathcal{R}) &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = 2b\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega t}{2}\vec{e}_r + 2b\frac{\omega}{2}\sin\frac{\omega t}{2}\vec{e}_\theta \\ &= b\omega\left(\cos\frac{\omega t}{2}\vec{e}_r + \sin\frac{\omega t}{2}\vec{e}_\theta\right)\end{aligned}$$

On note que $\|\vec{V}(B/\mathcal{R})\| = b\omega$, ce qui était attendu.

4. Nous avons $\|\overrightarrow{OB}\| = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{e}_r = 2b\sin\alpha$, ce qui permet d'écrire

$$\sin\alpha = \frac{r}{2b} = \sin\frac{\omega t}{2} \Longrightarrow \alpha = \frac{\omega t}{2} \text{ ou } \alpha = \pi - \frac{\omega t}{2}$$

on retient la première solution étant donné que $\alpha \in [0, \pi/2[$ et croit en fonction du temps.

5. Le vecteur $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BJ}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OJ} &= r\vec{e}_r + b\left(\cos\alpha\vec{k} - \sin\alpha\vec{e}_r\right) \\ &= (r - b\sin\alpha)\,\vec{e}_r + b\cos\alpha\vec{k} \\ &= (r - b\sin\alpha)\left(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\right) + b\cos\alpha\vec{k}. \\ &= b\sin\frac{\omega t}{2}\left(\cos\frac{\omega t}{2}\vec{i} + \sin\frac{\omega t}{2}\vec{j}\right) + b\cos\frac{\omega t}{2}\vec{k}.\end{aligned}$$

6. La vitesse de J peut s'obtenir donc par

$$\begin{aligned}\vec{V}(J/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d\overrightarrow{OJ}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\ &= \frac{b\omega}{2}\left\{\left[\cos^2\frac{\omega t}{2} - \sin^2\frac{\omega t}{2}\right]\vec{i} + 2\sin\frac{\omega t}{2}\cos\frac{\omega t}{2}\vec{j}\right\} - \frac{b\omega}{2}\sin\frac{\omega t}{2}\vec{k} \\ &= \frac{b\omega}{2}\left\{\cos\omega t\;\vec{i} + \sin\omega t\;\vec{j}\right\} - \frac{b\omega}{2}\sin\frac{\omega t}{2}\;\vec{k}\end{aligned}$$

Quant à l'accélération de J, nous l'obtenons comme suit

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(J/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d\vec{V}(J/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\ &= \frac{b\omega^2}{2}\left\{-\sin\omega t\;\vec{i} + \cos\omega t\;\vec{j}\right\} - \frac{b\omega^2}{4}\cos\frac{\omega t}{2}\;\vec{k}.\end{aligned}$$

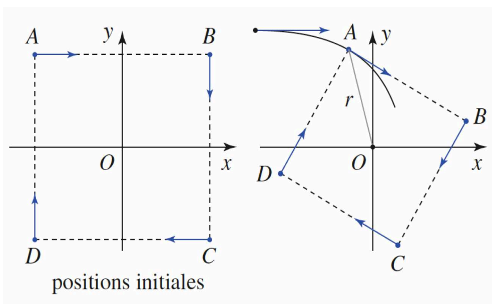
On en déduit les normes

$$\|\vec{V}(J/\mathcal{R})\| = \frac{b\omega}{2}\sqrt{1 + \sin^2\frac{\omega t}{2}} \text{ et } \|\vec{\gamma}(J/\mathcal{R})\| = \frac{b\omega^2}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{4}\cos^2\frac{\omega t}{2}}.$$

Corrigé 3 : Course poursuite

Quatre robots repérés par A, B, C et D sont situés initialement aux sommets d'un carré de côté a et de centre O. Le robot A est programmé pour toujours se diriger vers B avec une vitesse de norme constante v, B se dirige vers C à la même vitesse v, C vers D et D vers A toujours à la même vitesse v, voir figure ci-contre de gauche. On s'intéresse au mouvement de A. Les autres s'en déduisent par une rotation de $\pi/4$.

Indication : Au cours du mouvement des robots, leurs positions forment à tout instant les sommets d'un carré rétrécissant et tournant, figure ci-contre de droite.



1. La position du robot A est repérée par les coordonnées polaires (r, θ). Notons que les positions des autres robots à n'importe quel instant t peuvent être déduite de celles de A par une rotation $\pi/2$ pour B, et π pour C et par une rotation de $3\pi/2$ pour D.

1ère méthode :

Soit $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ la base polaire. Nous avons $r = \|\overrightarrow{OA}\|$ et $\theta = (\widehat{Ox, OA})$. Notons que $\overrightarrow{OA}$ est confondu avec la bissectrice de l'angle du sommet A. On peut en conclure que

$$\begin{aligned}\vec{V}(A) &= \|\vec{V}(A)\| \left(-\cos\frac{\pi}{4}\vec{e}_r - \sin\frac{\pi}{4}\vec{e}_\theta\right)\\ &= -\frac{v\sqrt{2}}{2}\left(\vec{e}_r + \vec{e}_\theta\right)\end{aligned}$$

sachant que $\|\vec{V}(A)\| = v$. Or la vitesse de A exprimée en coordonnées polaires est donnée par

$$\vec{V}(A) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\Longrightarrow \dot{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2}v \text{ et } r\dot{\theta} = -\frac{\sqrt{2}}{2}v.$$

En intégrant r, sachant que $r(t=0) = a/\sqrt{2}$,

$$r(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - vt).$$

Ce qui donne pour θ

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}v}{\frac{\sqrt{2}}{2}(a-vt)}\\ &= -\frac{v}{v-at} \Longrightarrow \theta = \mathrm{Ln}\,(a-vt) + K\end{aligned}$$

et comme $\theta(0) = 3\pi/4 \Longrightarrow K = 3\pi/4 - \mathrm{Ln}(a)$ et donc

$$\theta(t) = \frac{3\pi}{4} - \mathrm{Ln}\left(\frac{a-vt}{a}\right).$$

2ème méthode :

Les données de l'exercice sont $\|\vec{V}(A)\| = v$ et que A, B, C et D constituent à chaque instant les sommets d'un carré dont le côté diminue. Notons par $c = c(t)$ le côté du carré à l'instant t avec $c(t=0) = a$.

Comme les robots se déplacent à vitesse uniforme, alors le côté du carré varie comme suit $c(t) = a - vt$.

De même, à chaque instant t, r constitue la demi-diagonale du carré de ct c et donc $r^2(t) = 2\frac{c^2(t)}{4} = \frac{c^2(t)}{2} \Longrightarrow r(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}c(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - vt)$.

Pour retrouver l'équation horaire de θ, sachant que θ décroit en fonction du temps et donc $\dot{\theta} < 0$, on utilise les composantes radiale et orthoradiale de la vitesse comme suit

$$V_r = \dot{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,v \text{ et } V_\theta = r\dot{\theta}.$$

Comme le module de la vitesse est connu, nous avons donc

$$\begin{aligned}V_r^2 + V_\theta^2 &= v^2\\ \Longrightarrow V_\theta &= \pm\sqrt{v^2 - V_r^2} = \pm\sqrt{v^2 - \frac{1}{2}v^2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}v\end{aligned}$$

sachant que $V_\theta = r\dot{\theta}$ et que $\dot{\theta} < 0$, cela implique

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\frac{V_\theta}{r} = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}v}{\frac{\sqrt{2}}{2}(a-vt)} \\ &= -\frac{v}{a-vt} \\ \Longrightarrow \theta &= \mathrm{Ln}\,(a-vt)+K\end{aligned}$$

Comme $\theta(0) = 3\pi/4$, alors $k = 3\pi/4 - \mathrm{Ln}(a)$ et donc

$$\theta(t) = \frac{3\pi}{4} - \mathrm{Ln}\frac{a-vt}{a}.$$

2. L'instant t_a d'arrivée en O correspond à $r(t_a) = 0$ et donc

$$a - vt_a = 0 \Longrightarrow t_a = \frac{a}{v}.$$

Corrigé 4 : effet Doppler classique - Changement de référentiel

Considérons une source sonore S, immobile dans un référentiel $\mathcal{R}(O, XYZ)$, émettant une onde définie par $s(x,t) = s_0 \cos\left[2\pi f\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$ de fréquence f et dont la vitesse de propagation selon (OX) est v. Un récepteur D est mobile selon (OX) avec une vitesse uniforme V. Soit $\mathcal{R}'(O_1, X'Y'Z')$ le repère lié au récepteur R.

1. $\mathcal{R}'$ est lié au récépteur D et donc se déplace selon OX avec la vitesse uniforme V.
   Considérons que $\mathcal{R}$ est absolu et $\mathcal{R}'$ est relatif. Alors $\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne uniforme par rapport $\mathcal{R}$ et donc $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{0}$ et que $\vec{V}(O_1/\mathcal{R}) = V\vec{i}$.
   La vitesse de l'onde s dans $\mathcal{R}$ est

$$\vec{V}(s/\mathcal{R}) = v\vec{i} = \vec{V}_a$$

   et que l'on cherche

$$\vec{V}(s/\mathcal{R}') = v'\vec{i} = \vec{V}_r.$$

   Or la loi de composition des vitesses, sachant que la vitesse d'entrainement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ est

$$\begin{aligned}\vec{V}_e &= \vec{V}(O_1/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1 s} \\ &= V\vec{i}\end{aligned}$$

   nous donne

$$\begin{aligned}\vec{v}' &= \vec{V}_r = \vec{V}_a - \vec{V}_e = v\vec{i} - V\vec{i} = (v-V)\,\vec{i} \\ \Longrightarrow v' &= v - V.\end{aligned}$$

   Comme $v - V$ est constante, donc s est animé d'un mouvement rectiligne dans $\mathcal{R}'$, ce qui implique $x' = v't + x'_0(=0)$ et nous avons ainsi

$$x' = (v-V)\,t = vt - Vt = x - Vt.$$

2. L'expression de l'onde est

$$\begin{aligned}
s(x,t) &= s_0 \cos\left[2\pi f\left(t-\frac{x}{v}\right)\right] \\
&= s_0 \cos\left[2\pi f\left(t-\frac{x'+Vt}{v'+V}\right)\right] \\
&= s_0 \cos\left[2\pi f\left(t\left\{1-\frac{V}{v'+V}\right\}-\frac{x'}{v'+V}\right)\right] \\
&= s_0 \cos\left[2\pi f\left(t\frac{v'}{v'+V}-\frac{x'}{v'+V}\right)\right] \\
&= s_0 \cos\left[2\pi f\left(\frac{v'}{v'+V}\right)\left(t-\frac{x'}{v'}\right)\right]
\end{aligned}$$

en comprant cet expression à celle de $s(x',t)$ on en déduit que

$$f' = f\frac{v'}{v'+V} \Longrightarrow \frac{f'}{v'} = \frac{f}{v}.$$

Remarque : On peut exprimer la relation précédente par

$$f' = f\frac{v-V}{v} = f\left(1-\frac{V}{v}\right)$$