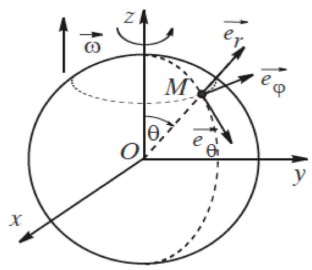
Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2016/2017

Mécanique du Point Matériel
Corrigé de la Série N° 2
Filières SMIA

Corrigé 1 : Déplacement selon un méridien

Une sphère de rayon R tourne sur elle-même à une vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ constante dans un référentiel $\mathcal{R}(O, xyz)$ muni de la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un point matériel M situé initialement au sommet se déplace sur la surface externe selon un méridien, du nord au sud, à vitesse constante v_0 par rapport à la sphère. Voir figure ci-contre.



1. Rappelons que la position de M est repérée dans le système de coordonnées sphériques par (r, θ, φ). Comme M se déplace sur un méridien et que la sphère tourne autour de Oz par rapport à $\mathcal{R}$ avec une vitesse angulaire $\omega\vec{k}$, ceci implique que $\dot{\varphi} = \omega$ et le vecteur rotation de la base sphérique par rapport à $\mathcal{R}$ est $\vec{\Omega} = \omega\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi$.
Comme $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$ ce qui donne pour la vitesse

$$\begin{aligned}
\vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\
&= R\left.\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = R\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r \\
&= R\left(\omega\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi\right) \wedge \vec{e}_r \\
&= R\left(\omega\sin\theta\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\vec{e}_\theta\right).
\end{aligned}$$

Comme $v_0 = \vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{e}_\theta = R\dot{\theta} \Longrightarrow \dot{\theta} = v_0/R$ est constante. Nous en déduisons que les vitesses angulaires autour de Oz et de $\vec{e}_\varphi$ sont constantes. Le vecteur vitesse peut se mettre ainsi sous la forme

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = R\omega\sin\theta\vec{e}_\varphi + v_0\vec{e}_\theta.$$

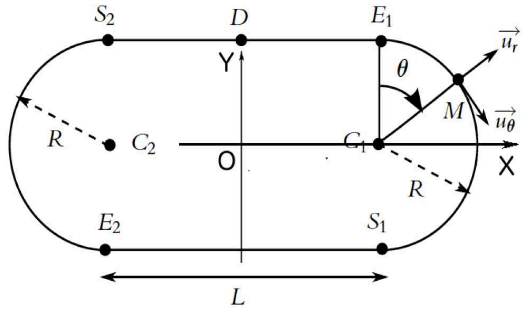
L'accélération peut être obtenue par

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\
&= R\omega\dot{\theta}\cos\theta\vec{e}_\varphi + R\omega\sin\theta\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi + v_0\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta \\
&= \omega v_0\cos\theta\vec{e}_\varphi + R\omega\sin\theta\left(\omega\vec{k} + \frac{v_0}{R}\vec{e}_\varphi\right) \wedge \vec{e}_\varphi + v_0\left(\omega\vec{k} + \frac{v_0}{R}\vec{e}_\varphi\right) \wedge \vec{e}_\theta \\
&= \omega v_0\cos\theta\vec{e}_\varphi + R\omega^2\sin\theta\vec{e}_\rho + \omega v_0\cos\theta\vec{e}_\varphi - \frac{v_0^2}{R}\vec{e}_r \\
&= \left(R\omega^2\sin^2\theta - \frac{v_0^2}{R}\right)\vec{e}_r + R\omega^2\sin\theta\cos\theta\vec{e}_\theta + 2\omega v_0\cos\theta\vec{e}_\varphi.
\end{aligned}$$

Nous avons utiliser $\vec{e}_\rho$ de la base cylindrique comme passage sachant que ce dernier est égal à $\vec{e}_\rho = \sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta$.

Corrigé 2 :

Un cycliste, considéré comme un point matériel noté M, s'entraine sur un vélodrome constitué de deux demi cercles et deux droites , voir figure ci-contre. On considère le repère $\mathcal{R}(O, XYZ)$ tels que les coordonnées des points $D(0, R, 0)$, $E_1(L/2, R, 0)$, $S_1(L/2, -R, 0)$. Le cycliste démarre sans vitesse initiale du point D.



1. Le coureur parcourt la distance (DE_1) avec une accélération constante γ_1.

i- Le mouvement est uniformémment accéléré où $\vec{\gamma}_1 = \gamma_1\vec{i}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \gamma_1 \Longrightarrow \dot{x} = \gamma_1 t + \dot{x}_0 (= 0) \Longrightarrow x = \frac{1}{2}\gamma_1 t^2 + x_0 (= 0); \\ \ddot{y} &= 0 \Longrightarrow y = 0 \text{ où } \dot{y}_0 = 0 \text{ et } y_0 = 0. \end{aligned}$$

ii- Au cours du passage par E_1, le coureur a parcouru une distance égale à $L/2$, ce qui donne

$$\begin{aligned} t_{E_1} &= \sqrt{\frac{L}{\gamma_1}} \\ \|V_{E_1}\| &= \gamma_1 t_{E_1} = \sqrt{\gamma_1 L}. \end{aligned}$$

2. Dans le premier virage, (E_1S_1), le cycliste a une accélération tangentielle, selon $\vec{e}_\theta$, constante égale à γ_1.

i- Le vecteur position sur cette portion du vélodrôme est donné par

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1M} = \frac{L}{2}\vec{i} + R\vec{u}_r \\ \Longrightarrow \vec{V}(M/\mathcal{R}) &= R\dot{\theta}\vec{u}_\theta \text{ et } \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta \end{aligned}$$

ii- Prenons l'origine des temps à l'instant de passage du coureur par E_1. Nous savons que la composante tangentielle de l'accélération est constante et égale à γ_1, ce qui donne

$$R\ddot{\theta} = \gamma_1 \Longrightarrow \dot{\theta}(t) = \frac{\gamma_1}{R}t + \dot{\theta}_0$$

où $\dot{\theta}_0$ est la valeur de la vitesse angulaire en E_1. Comme $\|V_{E_1}\| = R\dot{\theta}_0 \Longrightarrow \dot{\theta}_0 = \|V_{E_1}\|/R = \sqrt{\gamma_1 L}/R$, ce qui donne

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\gamma_1}{R}t + \frac{\sqrt{\gamma_1 L}}{R} \Longrightarrow \theta(t) = \frac{\gamma_1}{2R}t^2 + \frac{\sqrt{\gamma_1 L}}{R}t + \theta_0$$

avec θ_0 est la valeur de θ en E_1 et donc $\theta_0 = 0$.

3. Notons par $t_{E_1S_1}$ le temps mis par le coureur pour parcourir le demi cercle (E_1S_1). Comme le passage en S_1 correspond à $\theta = \pi$ alors

$$\frac{\gamma_1}{2R}t^2_{E_1S_1} + \frac{\sqrt{\gamma_1 L}}{R}t_{E_1S_1} = \pi \Longrightarrow t^2_{E_1S_1} + 2\sqrt{\frac{L}{\gamma_1}}t - \frac{2\pi R}{\gamma_1} = 0$$

qui est une équation de second dégré dont le discriminant réduit est $\Delta' = \frac{L}{\gamma_1} + \frac{2\pi R}{\gamma_1}$ et la solution physique est la racine positive

$$t_{E_1S_1} = -\sqrt{\frac{L}{\gamma_1}} + \sqrt{\frac{L+2\pi R}{\gamma_1}}.$$

Comme $t_{S_1} = t_{E_1} + t_{E_1S_1}$, nous avons alors

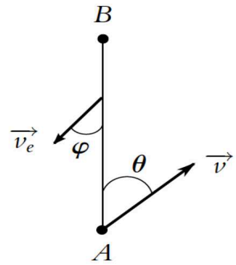
$$t_{S_1} = \sqrt{\frac{L}{\gamma_1}} - \sqrt{\frac{L}{\gamma_1}} + \sqrt{\frac{L+2\pi R}{\gamma_1}} = \sqrt{\frac{L+2\pi R}{\gamma_1}}.$$

La vitesse au point S_1 est obtenue par

$$\|V_{S_1}\| = R\dot{\theta}(t_{E_1S_1}) = \sqrt{\gamma_1 (L + 2\pi R)}$$

Corrigé 3

Un avion doit se déplacer en ligne droite d'un point A vers un point au sol B, voir figure ci-contre. Il subit un vent contraire de vitesse $\vec{v}_e$, faisant un angle φ avec la trajectoire (AB). L'avion vole à une vitesse $\vec{v}$ par rapport à l'air, faisant un angle θ avec la route (AB).
On considère le référentiel lié au sol comme un référentiel galiléen que l'on notera par $\mathcal{R}$.



1. Notons par $\mathcal{R}_1$ le référentiel lié à l'air. La vitesse de l'avion par rapport à $\mathcal{R}$ s'obtient en utilisant la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_a = \vec{v} + \vec{v}_e.$$

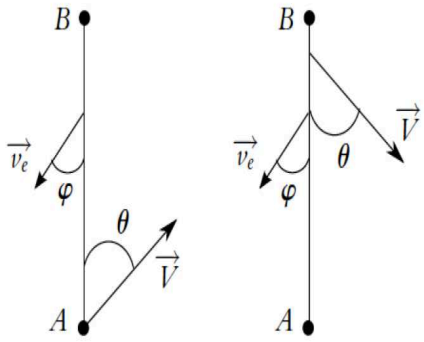
2. La condition pour que l'avion se déplace selon la ligne (AB) est que la composante de $\vec{v}_a$ perpendiculaire à la direction de (AB) soit nulle :

$$v\sin\theta - v_e\sin\varphi = 0$$

3. L'angle de correction est ainsi égal à

$$\sin\theta = \frac{v_e\sin\varphi}{v} \Longrightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{v_e\sin\varphi}{v}\right) = \arcsin\left(\frac{56 \times \sin(20°)}{445}\right) \simeq 2.5°.$$

4. L'avion doit faire un aller et retour entre les deux points A et B distants de $d = 500$km, dans les conditions de la question précédente.



i- Soient t_a et t_r les temps respectifs de l'aller et du retour. A l'aller, la vitesse de l'avion par rapport à $\mathcal{R}$ est $v\cos\theta - v_e\cos\varphi$, ce qui implique que $t_a = d/v\cos\theta - v_e\cos\varphi$. Quant à la vitesse du retour, elle est donnée par $v\cos\theta + v_e\cos\varphi$ et le temps retour est $t_d = d/(v\cos\theta - v_e\cos\varphi)$. Aussi, nous avons

$$t_{ar} = t_a + t_r = d\left(\frac{1}{v\cos\theta - v_e\cos\varphi} + \frac{1}{v\cos\theta + v_e\cos\varphi}\right) = 2.28h.$$

ii- Le temps de l'aller et le retour sans vent s'obtient en prenant $v_e = 0$ et $\varphi = 0$ et donc $\theta = 0$ D'où $t'_{ar} = 2d/v = 2.24h$. On note que, comme attendu, $t_{ar} > t'_{ar}$.
Pour savoir s'il est possible d'avoir $t_{ar} < t'_{ar}$, nous utilisons l'expression

$$t_{ar} = \frac{2d}{v}\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta - \frac{v_e^2}{v^2}\cos^2\varphi} = t'_{ar}\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta - \frac{v_e^2}{v^2}\cos^2\varphi}.$$

Nous avons aussi, $\sin\theta = v_e\sin\varphi/v$ ce qui donne

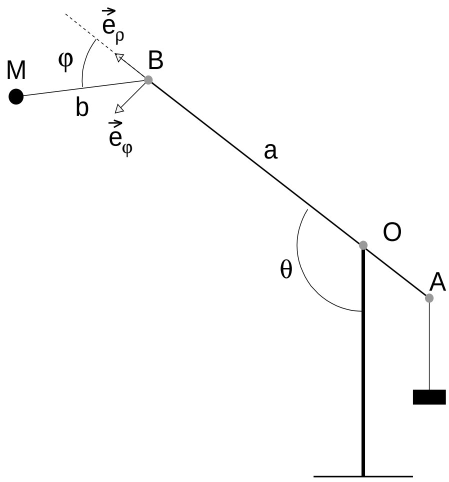
$$t_{ar} = t'_{ar}\frac{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{v^2}\sin^2\varphi}}{1 - \frac{v_e^2}{v^2}} = t'_{ar}f(\varphi).$$

Il suffit de voir que $\varphi \in]0, \pi/2]$ où $\sin\varphi$ est croissante et donc $f(\varphi)$ est décroissante ce qui implique que t_{ar} est toujours supérieur ou égal à t'_{ar}.

Corrigé 5 : Arme à l'ancienne

L'une des armes utilisée au Moyen-Âge pour envoyer des charges lourdes contre les murailles était ce que l'on appelle "un trébuchet" ou le catapulte. Il est composé d'une poutre AB à laquelle est fixée un contrepoids en A. En B est attachée une corde au bout de laquelle une poche contient le projectile M, voir figure ci-contre.
Soit $\mathcal{R}(Oxyz)$ le repère lié au sol et $\mathcal{R}_B(Bx_1y_1z_1)$ le repère lié à la poutre. Le mouvement a lieu dans le plan (Oxy). La base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ est liée à $\mathcal{R}_B$. On donne $OB = a$ et $BM = b$.

Les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$.



1. $\mathcal{R}_B$ est en rotation par rapport à $\mathcal{R}$ et $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_B/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\vec{k}$.
2. $$\begin{aligned} \overrightarrow{BM} &= b\left(\cos\varphi\vec{e}_\rho + \sin\varphi\vec{e}_\varphi\right) \\ \Longrightarrow \vec{V}(M/\mathcal{R}_B) &= \left.\frac{d\overrightarrow{BM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_B} = b\dot{\varphi}\left(-\sin\varphi\vec{e}_\rho + \cos\varphi\vec{e}_\varphi\right). \end{aligned}$$
3. $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = (a + b\cos\varphi)\vec{e}_\rho + b\sin\varphi\vec{e}_\varphi.$$
   La vitesse d'entrainement en M de $\mathcal{R}_B$ par rapport à $\mathcal{R}$ est
   $$\begin{aligned} \vec{V}_e &= \left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_B/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{BM} \\ &= a\dot{\theta}\vec{e}_\varphi + b\dot{\theta}\left(-\sin\varphi\vec{e}_\rho + \cos\varphi\vec{e}_\varphi\right). \end{aligned}$$
4. Le projectile est lâché lorsque $\theta = -\pi$ et $\varphi = 0$ ($AOBM$ vertical).
   a-
   $$\begin{aligned} \vec{V}(M/\mathcal{R})(\theta = -\pi, \varphi) = 0) &= \vec{V}(M/\mathcal{R}_B)(\theta = -\pi, \varphi = 0) + \vec{V}_e(\theta = -\pi, \varphi = 0) \\ &= \left[b\left(\dot{\varphi} + \dot{\theta}\right) + a\dot{\theta}\right]\vec{e}_\varphi \\ \Longrightarrow \|\vec{V}(M/\mathcal{R})(\theta = -\pi, \varphi)\| &= b\left(\dot{\varphi} + \dot{\theta}\right) + a\dot{\theta}. \end{aligned}$$
5. S'il n'y avait qu'un seul bras rigide de longueur $a+b$, alors le mouvement de M sera circulaire et de vitesse égale à $(a+b)\dot{\theta}$. Le fait qu'il y ait une articulation augment la vitesse de $b\dot{\varphi}$.