Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2020/2021

Module de physique - Mécanique du Point Matériel
Filière S1 SMA - Corrigé de la série N° 1
Rappels et Compléments Mathématiques

Corrigé de l'exercice I : Produits scalaire et vectoriel

Considérons les trois vecteurs $\vec{A}_1(1,1,\sqrt{2})$, $\vec{A}_2(0,\sqrt{3},1)$ et $\vec{A}_3(\sqrt{2},0,\sqrt{2})$.

1. Si l'on note par x_i, y_i et z_i les composantes du vecteur $\vec{A}_i$ alors sa norme est

$$\|\vec{A}_i\| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$$

ce qui donne respectivement

$$\|\vec{A}_1\| = \|\vec{A}_2\| = \|\vec{A}_3\| = 2.$$

Ce qui donne pour les vecteurs unitaires

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \left(1/2, 1/2, \sqrt{2}/2\right)\\ \vec{e}_2 &= \left(0, \sqrt{3}/2, 1/2\right)\\ \vec{e}_3 &= \left(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2\right).\end{aligned}$$

2. Nous avons

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}) &= \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}{\|\vec{e}_1\| \times \|\vec{e}_2\|}\\ \cos(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}) &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \simeq 0.787\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_3}) &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \simeq 0.854\\ \cos(\widehat{\vec{e}_2, \vec{e}_3}) &= \frac{\sqrt{2}}{4} \simeq 0.354\end{aligned}$$

3. Nous avons

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3\\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{6}/4 \\ \sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{6}/4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\vec{u}_2 &= \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/4 - 1/2 \\ \sqrt{2}/4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}
\vec{u}_3 &= \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \\
&= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1/4 - \sqrt{6}/4 \\ -1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4. Nous avons

$$\begin{aligned}
\sin(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}) &= \frac{\|\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2\|}{\|\vec{e}_1\| \times \|\vec{e}_2\|} \\
&= \frac{\|\vec{u}_3\|}{\|\vec{e}_1\| \times \|\vec{e}_2\|} \\
&\simeq 0.618
\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
\sin(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_3}) &= \frac{\|\vec{u}_2\|}{\|\vec{e}_1\| \times \|\vec{e}_3\|} \simeq 0.521 \\
\sin(\widehat{\vec{e}_2, \vec{e}_3}) &= \frac{\|\vec{u}_1\|}{\|\vec{e}_2\| \times \|\vec{e}_3\|} \simeq 0.935
\end{aligned}$$

On vérifie facilement ces résultats avec la question 2, en notant que

$$\begin{aligned}
\sin(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}) &= \sqrt{1 - \cos^2(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2})} \simeq 0.617 \\
\sin(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_3}) &= \sqrt{1 - \cos^2(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_3})} \simeq 0.520 \\
\sin(\widehat{\vec{e}_2 \vec{e}_3}) &= \sqrt{1 - \cos^2(\widehat{\vec{e}_2, \vec{e}_3})} \simeq 0.935
\end{aligned}$$

On constate que les résultats sont quasiment les mêmes.

5. Pour qu'une famille de vecteurs constitue une base, il suffit
   — que le nombre de vecteurs de la famille soit égal à la dimension de l'espace vectoriel en question, et qui est dans notre cas 3. Ce qui est vérifié pour $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$;
   — et que la famille soit une famille libre, c'est à dire que tout vecteur peut être écrit comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs. Pour démontrer cette propriété, il suffit que les trois vecteurs ne soient pas coplanaires et donc leur produit mixte soit différent de zéro. Calculons alors le produit mixte

$$\vec{u}_1 \cdot (\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{-\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{1}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{3} - \sqrt{6}\right) \end{vmatrix} \neq 0$$

   D'où les trois vecteurs forment une famille libre.

On en déduit que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ forment une base.
Cette base n'est pas orthonormée car les vecteurs ne sont pas unitaires, d'une part, et ne sont pas orthogonaux deux à deux, d'autre part.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 : DIFFÉRENTIELLE ET DÉRIVÉE D'UN VECTEUR UNITAIRE

Soit $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien et considérons la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

1. Exprimons les vecteurs de la base sphérique dans la base cartésienne :

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \cos\theta\vec{k} + \sin\theta\vec{e}_\rho \\
&= \cos\theta\vec{k} + \sin\theta(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}) \\
&= \cos\varphi\sin\theta\vec{i} + \sin\varphi\sin\theta\vec{j} + \cos\theta\vec{k}.
\end{aligned}$$

nous sommes passés par le vecteur $\vec{e}_\rho$ de la base cylindrique.
De même, pour $\vec{e}_\theta$, nous avons

$$\begin{aligned}
\vec{e}_\theta &= -\sin\theta\vec{k} + \cos\theta\vec{e}_\rho \\
&= -\sin\theta\vec{k} + \cos\theta(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}) \\
&= \cos\varphi\cos\theta\vec{i} + \sin\varphi\cos\theta\vec{j} - \sin\theta\vec{k}.
\end{aligned}$$

et finalement

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}$$

2. Calculons les dérivées partielles suivantes sachant que les vecteurs de la base cartésienne sont fixes :

$$\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta} = \cos\varphi\cos\theta\vec{i} + \sin\varphi\cos\theta\vec{j} - \sin\theta\vec{k};$$

et

$$\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\sin\theta\vec{i} + \cos\varphi\sin\theta\vec{j};$$

et

$$\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta} = -\cos\varphi\sin\theta\vec{i} - \sin\varphi\sin\theta\vec{j} - \cos\theta\vec{k};$$

et

$$\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\cos\theta\vec{i} + \cos\varphi\cos\theta\vec{j};$$

et

$$\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\theta} = 0$$

et

$$\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -\cos\varphi\vec{i} - \sin\varphi\vec{j}.$$

3. Pour établir la différentielle de chacun des vecteurs de la base, on a

$$\begin{aligned}
d\vec{e}_r &= \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi}d\varphi \\
&= \left(\cos\varphi\cos\theta\vec{i} + \sin\varphi\cos\theta\vec{j} - \sin\theta\vec{k}\right)d\theta + \left(-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}\right)\sin\theta d\varphi \\
&= d\theta\vec{e}_\theta + \sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

De la même manière, on établit la différentielle de $\vec{e}_\theta$ comme suit

$$\begin{aligned}
d\vec{e}_\theta &= \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} d\varphi \\
&= \left(-\cos\varphi\sin\theta\vec{i} - \sin\varphi\sin\theta\vec{j} - \cos\theta\vec{k}\right) d\theta + \left(-\sin\varphi\cos\theta\vec{i} + \cos\varphi\cos\theta\vec{j}\right) d\varphi \\
&= -d\theta\vec{e}_r + \cos\theta d\varphi\vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}
d\vec{e}_\varphi &= \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \\
&= d\varphi\left(-\cos\varphi\vec{i} - \sin\varphi\vec{j}\right) \\
&= -d\varphi\vec{e}_\rho = -d\varphi\left(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta\right).
\end{aligned}$$

4. Pour cette question, il suffit de faire apparaitre les différentielles des vecteurs de la base sphérique sous la forme demandée. On a $\vec{k} = \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta$, ce qui donne $\vec{k} \wedge \vec{e}_r = \sin\theta\vec{e}_\varphi$, $\vec{k} \wedge \vec{e}_\theta = \cos\theta\vec{e}_\varphi$ et $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r$, ainsi on peut écrire

$$\begin{aligned}
d\vec{e}_r &= d\theta\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r + d\varphi\vec{k} \wedge \vec{e}_r \\
&= \left(dt\dot{\theta}\vec{e}_\varphi + dt\dot{\varphi}\vec{k}\right) \wedge \vec{e}_r \\
&= dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r
\end{aligned}$$

avec $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e}_\varphi + \dot{\varphi}\vec{k}$.
De même, on a

$$\begin{aligned}
d\vec{e}_\theta &= -d\theta\vec{e}_r + \cos\theta d\varphi\vec{e}_\varphi \\
&= d\theta\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_\theta + d\varphi\vec{k} \wedge \vec{e}_\theta \\
&= dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta.
\end{aligned}$$

Finalement, reprenons la différentielle de $\vec{e}_\varphi$:

$$\begin{aligned}
d\vec{e}_\varphi &= -dt\dot{\varphi}\left(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta\right) \\
&= -dt\dot{\varphi}\left(\sin\theta\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\varphi - \cos\theta\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\varphi\right) \\
&= -dt\dot{\varphi}\left(\sin\theta\vec{e}_\theta - \cos\theta e_r\right) \wedge \vec{e}_\varphi \\
&= dt\dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{e}_\varphi \\
&= dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

Les dérivées par rapport au temps s'obtiennent facilement en divisant par dt :

$$\left.\tfrac{d\vec{e}_r}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r \quad \left.\tfrac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta \quad \left.\tfrac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi.$$

5. Considérons cette fois-ci la base cylindrique. Le seul angle qui varie est φ, d'où le vecteur rotation de la base cylindrique par rapport à la base cartésienne est $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$. En appliquant les résultats précédents, on obtient

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\
\left.\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho \\
\left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= 0
\end{aligned}$$

6. Soit $\vec{V} = V_r\vec{e}_r + V_\theta\vec{e}_\theta + V_\varphi\vec{e}_\varphi$. Sa dérivée par rapport au temps est

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{V}}{dt} &= \frac{dV_r}{dt}\vec{e}_r + V_r\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dV_\theta}{dt}\vec{e}_\theta + V_\theta\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \frac{dV_\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + V_\varphi\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \\
&= \frac{dV_r}{dt}\vec{e}_r + \frac{dV_\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dV_\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + V_r\vec{\Omega}\wedge\vec{e}_r + V_\theta\vec{\Omega}\wedge\vec{e}_\theta + V_\varphi\vec{\Omega}\wedge\vec{e}_\varphi \\
&= \frac{dV_r}{dt}\vec{e}_r + \frac{dV_\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dV_\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \vec{\Omega}\wedge(V_r\vec{e}_r + V_\theta\vec{e}_\theta + V_\varphi\vec{e}_\varphi) \\
&= \frac{dV_r}{dt}\vec{e}_r + \frac{dV_\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dV_\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \vec{\Omega}\wedge\vec{V}.
\end{aligned}$$

qui reste une relation générale.

Corrigé de l'exercice 3 : Equations différentielles

Soit $\mathcal{R}(O, XYZ)$ un repère orthonormé. Le mouvement d'un point matériel est décrit par les équations différentielles suivantes

$$\left\{\begin{array}{lcl} \ddot{x}(t) &=& -\omega\dot{y} \\ \ddot{y}(t) &=& \omega\dot{x} \\ \ddot{z}(t) &=& 0 \end{array}\right. \qquad \text{avec} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x(0) &=& y(0) = z(0) = 0 \\ \dot{x}(0) &=& v_{0x} > 0, \dot{y}(0) = 0, \dot{z} = v_{0z} > 0. \end{array}\right.$$

où ω est une constante positive.

1. On intègre $\ddot{y}(t) = \omega\dot{x}$ et on obtient $\dot{y}(t) = \omega x + K$ comme $\dot{y}(0) = 0$ et $x(0) = 0$ cela implique $K = 0$. Aussi nous obtenons

$$\ddot{x}(t) \quad = \quad -\omega\dot{y} = -\omega^2 x \Longrightarrow \ddot{x}(t) + \omega^2 x = 0.$$

C'est une équation différentielle de second degré à coefficients constants sans second membre. L'équation caractéristique est donnée par $r^2 + \omega^2 = 0$ dont les racines sont complexes distinctes $r_{1,2} = \pm\omega$. La solution de l'équation différentielle en y est alors

$$x(t) \quad = \quad A_x e^{i\omega t} + B_x e^{-i\omega t}$$

comme $x(0) = 0 \Longrightarrow A_x + B_x = 0$ et $\dot{x}(0) = v_{0x} \Longrightarrow i\omega A_x - i\omega B_x = 0 \Longrightarrow A_x - B_x = -iv_{0x}/\omega$ ce qui implique que $A_x = -B_x = -iv_{0x}/2\omega$ ce qui donne comme solutions

$$x(t) \quad = \quad -iv_{0x}/2\omega\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) = \frac{v_{0x}}{\omega}\text{sin}\omega t.$$

Quant à y, nous avons deux possibilités d'établir l'équation horaire $y(t)$, soit de partir de procéder comme c'est fait pour $x(t)$ soit de substituer dans l'équation différentielle de y l'expression de $x(t)$ et de résoudre l'équation obtenue.
Première possibilité : Partons de l'équation différentielle de x :

$$\ddot{x}(t) = -\omega\dot{y} \Longrightarrow \dot{x}(t) \quad = \quad -\omega y + K_1$$

et comme $\dot{x}(0) = v_{0x}$ et $y(0) = 0$ cela implique que $K_1 = v_{0x}$. L'équation différentielle en y devient

$$\ddot{y} \quad = \quad \omega\dot{x} = -\omega^2 y + \omega v_{0x} \Longrightarrow \ddot{y} + \omega^2 y = \omega v_{0x}$$

qui est une équation de second ordre à coefficients constants mais avec second membre cette fois-ci.
La solution générale $y(t)$ est la superposition de la solution sans second membre $y_{ssm}(t)$ et d'une solution particulière $y_p(t)$. La solution sans second membre, par symétrie avec $x(t)$, est $y_{ssm}(t) = A_y e^{i\omega t} + B_y e^{-i\omega t}$. Quant à la solution particulière, il suffit de constater que $y_p = v_{0x}/\omega$ est solution ce qui donne comme solution générale $y(t) = A_y e^{i\omega t} + B_y e^{-i\omega t} + v_{0x}/\omega$. Comme $y(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = 0$ alors

$$\left.\begin{array}{lcl} A_y + B_y &=& -v_{0x}/\omega \\ A_y - B_y &=& 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow A_y = B_y = -\frac{v_{0x}}{2\omega}$$

ce qui donne pour la solution générale

$$y(t) = -\frac{v_{0x}}{2\omega}\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)+\frac{v_{0x}}{\omega}=\frac{v_{0x}}{\omega}\left(1-\cos\omega t\right).$$

Deuxième possibilité : En utilisant le résultat de $x(t)$ obtenu, on peut écrire

$$\ddot{y} = \omega\dot{x}=v_{0x}\omega\cos\omega t \Longrightarrow \dot{y}=v_{0x}\sin\omega t+K_3$$

et comme $\dot{y}(0)=0 \Longrightarrow K_3=0$. Nous obtenons ainsi

$$y(t) = -\frac{v_{0x}}{\omega}\cos\omega t+K_4$$

et comme $y(0)=0 \Longrightarrow k_4=v_{0x}/\omega$. La solution finale est donc

$$y(t) = \frac{v_{0x}}{\omega}\left(1-\cos\omega t\right).$$

Corrigé de l'exercice 4 : Déplacement élémentaire

0.3cm

Considérons un repère cartésien $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$ et $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$ respectivement les bases cylindrique et sphérique. Soit M un point repéré par $\overrightarrow{OM}$ par rapport à $\mathcal{R}$. On considère un déplacement infinitésimal de M en M' tel que M' est très proche de M. On note alors le déplacement élémentaire par $\overrightarrow{OM}'-\overrightarrow{OM}=d\overrightarrow{MM'}=d\overrightarrow{OM}$

1. La base cartésienne est fixe et donc la dérivée de ces vecteurs par rapport au temps dans $\mathcal{R}$ est nulle. D'où, le déplacement élementaire dans cette base est

$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}.$$

2. Le vecteur rotation de la base cylindrique dans $\mathcal{R}$ est $\vec{\Omega}=\dot{\varphi}\vec{k}$. Ceci peut être démontré facilement en explicitant la base cylindrique dans la base cartésienne.
Le déplacement élémentaire dans cette base est

$$\begin{aligned}d\overrightarrow{OM} &= d\left(\rho\vec{e}_\rho+z\vec{k}\right)=d\rho\vec{e}_\rho+\rho d\vec{e}_\rho+dz\vec{k}\\ &= d\rho\vec{e}_\rho+\rho dt\vec{\Omega}\wedge\vec{e}_\rho+dz\vec{k}\\ &= d\rho\vec{e}_\rho+\rho d\varphi\vec{k}\wedge\vec{e}_\rho+dz\vec{k}=d\rho\vec{e}_\rho+\rho d\varphi\vec{e}_\varphi+dz\vec{k}\end{aligned}$$

3. Pour ce qui est de la base sphérique, le vecteur rotation est $\vec{\Omega}=\dot{\theta}\vec{e}_\varphi+\dot{\varphi}\vec{k}=\dot{\theta}\vec{e}_\varphi+\dot{\varphi}\left(\cos\theta\vec{e}_r-\sin\theta\vec{e}_\theta\right)$.
Ainsi pour le déplacement élémentaire dans cette base, on trouve

$$\begin{aligned}d\overrightarrow{OM} &= d\left(r\vec{e}_r\right)=dr\vec{e}_r+rd\vec{e}_r\\ &= dr\vec{e}_r+rdt\vec{\Omega}\wedge\vec{e}_r\\ &= dr\vec{e}_r+r\left(d\theta\vec{e}_\varphi\wedge\vec{e}_r+d\varphi\left[\cos\theta\vec{e}_r-\sin\theta\vec{e}_\theta\right]\wedge\vec{e}_r\right)\\ &= dr\vec{e}_r+r\left(d\theta\vec{e}_\theta+d\varphi\vec{e}_\varphi\right)\\ &= dr\vec{e}_r+rd\theta\vec{e}_\theta+rd\varphi\sin\theta\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 5 : Opérateurs différentiels

Considérons une fonction $f(x,y,z)$ (un champ scalaire) et un champ vectoriel $\vec{A}(x,y,z)$.

1. Soient $f(x,y,z)$ une fonction à plusieurs variables et $\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$, $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ étant la base cartésienne d'un repère $\mathcal{R}(O,xyz)$. On rappelle que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{grad}}(f) &= \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}=\vec{\nabla}(f)\\ \mathbf{div}(\vec{A}) &= \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\\ \overrightarrow{\mathbf{rot}}(\vec{A}) &= \begin{pmatrix}\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\\ \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\\ \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}.\end{aligned}$$

Pour ce qui est du sens physique :

Gradient : Noter bien que le gradient s'applique à un champ scalaire $f(x, y, z)$ (une fonction à plusieurs variables). Il généralise la notion de dérivée d'une fonction à une variable à une fonction à plusieurs variables. Il indique la tangente locale à l'hypersurface définie par le champ scalaire. $\overrightarrow{\textbf{grad}}$ se dirige le long de la plus grande tangente au champ.

Divergence : Elle s'applique à un champ vectoriel $\vec{A}$. On montre que (Théorème de Green-Ostrogradsky) que

$$\iint_S \vec{A} \cdot \overrightarrow{dS} \quad = \quad \iiint_V \textbf{div}(\vec{A}) dv$$

où $\overrightarrow{dS}$ et dv sont respectivement le vecteur unitaire à la surface fermée S et l'élément de volume autour du point (x, y, z). S est une surface fermée délimitant le volume V.
On en conclue que l'intégrale de la divergence de $\vec{A}$ sur V donne le flux de $\vec{A}$ à travers la surface S délimitant le volume V.
Si $\vec{A}$ représente le champ des vitesses dans un élément de volume dv, alors $\textbf{div}(\vec{v})$ représente l'accroissement total de volume par unité de temps et par unité de volume.

Rotationel : *En s'appuyant sur le théorème de Stokes*

$$\oint \vec{A} \cdot \overrightarrow{dM} \quad = \quad \iint (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \overrightarrow{dS}$$

on en conclue que le flux de $\overrightarrow{\textbf{rot}}\vec{A}$ à travers une surface fermée S est égal à la circulation de $\vec{A}$ à travers un chemin fermé délimitant la surface S.

2. Pour réécrire l'expression de l'opérateur $\overrightarrow{\textbf{grad}}$ dans les autres bases, il suffit de constater, si l'on note $\overrightarrow{dM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, que

$$\begin{aligned} df(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right) \\ &= \overrightarrow{\textbf{grad}}(f) \cdot \overrightarrow{dM}. \end{aligned}$$

Notons que df est un scalaire (un nombre) et donc ne dépend pas du système de coordonnées choisi. Nous allons utiliser cette propriété pour répondre à cette question.

Coordonnées cylindriques : Nous avons

$$\begin{aligned} df(\rho, \varphi, z) &= \frac{\partial f}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}dz \\ &= \overrightarrow{\textbf{grad}}_{cyl}(f) \cdot \overrightarrow{dM}_{cyl} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dM}_{cyl} &= d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{k} \\ \Longrightarrow df(\rho, \varphi, z) &= \frac{\partial f}{\partial \rho}d\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\rho d\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}dz. \end{aligned}$$

Il suffit de prendre

$$\overrightarrow{\textbf{grad}}_{cyl}(f) \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

ce qui donne

$$\overrightarrow{\textbf{grad}}_{cyl} \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}_{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k}} .$$

Notez bien que l'on peut écrire aussi

$$\vec{\nabla}_{cyl} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}_{\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k}}$$

ce qui permet de retrouver **div** *et* $\overrightarrow{\textbf{rot}}$ *en coordonnées cylindriques en utilisant les définitiions en terme de* $\vec{\nabla}$*. Noter également* $\vec{\nabla}$ *est un "vecteur" différentiel.*

Coordonnées sphériques : Nous procédons de la même manière et nous avons

$$df(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi.$$

Comme

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dM}_{sph} &= dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi \\ \Longrightarrow df &= \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}rd\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}r\sin\theta d\varphi \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\overrightarrow{\textbf{grad}}_{sph} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \end{pmatrix}_{\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi}.$$

3. Soit $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = r\vec{e}_r$.

i $\overrightarrow{\textbf{grad}}f$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\textbf{grad}}(f) &= \vec{\nabla}_{cart}(f) \\ &= 2(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 2\overrightarrow{OM} \end{aligned}$$

$\textbf{div}(\vec{A})$:

$$\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{i} + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{j} + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}$$

et

$$\begin{aligned} \textbf{div}(\vec{A}) &= \left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right) \\ &= \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - 3\frac{(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ &= \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{\textbf{rot}}(\vec{A})$:

Avant de calculer le rotationel de $\vec{A}$, notons que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{-3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

et de cette dernière relation on peut déduire par symétrie les autres dérivées partielles croisées :

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{-3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{-3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ \frac{-3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{-3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ \frac{-3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{-3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

ii A partir des résultats déterminés, on peut noter que

— le gradient de f est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$, la plus grande tangente à f au point (x, y, z) est portée par le vecteur position ;

— la divergence de $\vec{A}$ est nulle alors son flux est consevatif ;

— le rotationel de $\vec{A}$ est nul alors sa circulation sur un chemin fermé est nulle.

4. *Indications :*
Soit $\vec{A} = A_\rho\vec{e}_\rho + A_\varphi\vec{e}_\varphi + A_z\vec{k}$ et $\vec{\nabla} = \vec{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$. Noter que $\vec{\nabla}$ est un opérateur différentiel, et donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{div}(\vec{A}) &= \vec{\nabla}\cdot\vec{A} \\
&= \vec{e}_\rho\cdot\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + A_\rho\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\rho} + \cdots\right) + \\
&\quad +\frac{1}{\rho}\vec{e}_\varphi\cdot\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\vec{e}_\rho + A_\rho\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + A_\varphi\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} + \cdots\right) + \\
&\quad +\vec{k}\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}\vec{e}_\rho + \cdots + \frac{\partial A_z}{\partial z}\vec{k}\right) \\
&= \frac{\partial A_\rho}{\partial\rho}\vec{e}_\rho\cdot\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}A_\rho\vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_\varphi + \frac{\partial A_z}{\partial z}\vec{k}\cdot\vec{k} \\
&= \frac{\partial A_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}A_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
&= \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

refaire le même raisonnement pour les autres cas.