Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2017/2018

Module de physique - Mécanique du Point Matériel
Corrigé de la série N° 1
Filière S1 SMA

Corrigé de l'éxercice 1 : Opérations sur les vecteurs

1. Soit un vecteur $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)$. On sait que la norme est donnée par $\|\vec{V}\| = \sqrt{\sum_{i=1,3} v_i^2}$. En appliquant ce résultat aux trois vecteurs $\vec{A}(3, 2, \sqrt{3})$, $\vec{B}(2, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ et $\vec{C}(1, 2, 2)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\vec{A}\| &= \sqrt{3^2 + 2^2 + \sqrt{3}^2} = 4 \\
\|\vec{B}\| &= \sqrt{2^2 + \sqrt{3}^2 + \sqrt{2}^2} = 3 \\
\|\vec{C}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3
\end{aligned}$$

On sait que le vecteur unitaire $\vec{u}_V$ de la direction du vecteur $\vec{V}$, est définie par $\vec{u}_V = \vec{V}/\|\vec{V}\|$. De la même manière, en appliquant ce résultat, on obtient

$$\begin{aligned}
\vec{u}_A &= (\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}) \\
\vec{u}_B &= (\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}) \\
\vec{u}_C &= (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})
\end{aligned}$$

2. Pour déterminer les cosinus des angles entre les trois vecteurs pris deux à deux, nous utilisons la définition du produit scalaire suivante $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos(\widehat{\vec{A}, \vec{B}})$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\cos(\widehat{\vec{A}, \vec{B}}) &= \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|} \\
&= \frac{3 \times 2 + 2 \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times \sqrt{2}}{4 \times 3} \\
&\simeq 0.993
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
\cos(\widehat{\vec{B}, \vec{C}}) &= \frac{\vec{B} \cdot \vec{C}}{\|\vec{B}\|\|\vec{C}\|} \\
&= \frac{2 \times 1 + \sqrt{3} \times 2 + \sqrt{2} \times 2}{3 \times 3} \\
&\simeq 0.921
\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
\cos(\widehat{\vec{C}, \vec{A}}) &= \frac{\vec{C} \cdot \vec{A}}{\|\vec{C}\|\|\vec{A}\|} \\
&= \frac{1 \times 3 + 2 \times 2 + 2 \times \sqrt{3}}{3 \times 4} \\
&\simeq 0.872
\end{aligned}$$

3. On sait que les composantes du vecteur produit vectoriel entre $\vec{u}_B$ et $\vec{u}_C$ sont données par

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \vec{u}_B \wedge \vec{u}_C \\
&= \left(\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} \right) \\
&= \left(\frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{9}, \frac{\sqrt{2}-4}{9}, \frac{4-\sqrt{3}}{9} \right)
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
\vec{e}_2 &= \vec{u}_C \wedge \vec{u}_A \\
&= \left(\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \right) \\
&= \left(\frac{2(\sqrt{3}-2)}{12}, \frac{6-\sqrt{3}}{12}, -\frac{1}{3} \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\vec{e}_3 &= \vec{u}_A \wedge \vec{u}_B \\
&= \left(\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix} \right) \\
&= \left(\frac{2\sqrt{2}-3}{12}, \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{12}, \frac{4\sqrt{3}-3}{12} \right)
\end{aligned}$$

4. Calculons $\sin(\widehat{\vec{u}_A, \vec{u}_B})$. On a

$$\|\vec{e}_3\| = \|\vec{u}_A\|\|\vec{u}_B\|\sin(\widehat{\vec{u}_A, \vec{u}_B}) \Longrightarrow \sin(\widehat{\vec{u}_A, \vec{u}_B}) \begin{aligned}[t] &= \|\vec{e}_3\| \\ &\simeq 0.1198 \end{aligned}$$

puisque $\vec{u}_A$ et $\vec{u}_B$ sont unitaires. On utilise la même démarche pour les autres angles :

$$\sin(\widehat{\vec{u}_B, \vec{u}_C}) = \|\vec{e}_1\| = 0.3886$$

et

$$\sin(\widehat{\vec{u}_C, \vec{u}_A}) = \|\vec{e}_2\| = 0.4895$$

Pour vérifier ces derniers résultats, on utilise les cosinus de ces mêmes angles déjà calculés auparavant et on trouve

$$\left\{ \begin{aligned}
\sqrt{1-\cos^2(\widehat{\vec{u}_A, \vec{u}_B})} &= 0.1181 \simeq \|e_3\| \\
\sqrt{1-\cos^2(\widehat{\vec{u}_B, \vec{u}_C})} &= 0.3896 \simeq \|e_1\| \\
\sqrt{1-\cos^2(\widehat{\vec{u}_C, \vec{u}_A})} &= 0.4895 \simeq \|e_2\|
\end{aligned} \right.$$

ce qui vérifie bien que les angles calculés dans cette questions sont les mêmes que ceux calculés dans la question 2.

5. Pour qu'une famille de vecteurs constitue une base, il suffit
   — que le cardinal de la famille, c'est à dire le nombre de vecteurs de la famille, soit égal à la dimension de l'espace vectoriel en question, et qui est dans notre cas 3. Ce qui est vérifié pour $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$;

— et que la famille soit une famille libre, c'est à dire que tout vecteur peut être écrit comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs. Pour démontrer cette propriété, il suffit que les trois vecteurs ne soient pas coplanaires et donc leur produit mixte soit différent de zéro. Calculons alors le produit mixte

$$\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3) \quad = \quad \begin{vmatrix} \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{9} & \frac{2(\sqrt{3}-2)}{12} & \frac{2\sqrt{2}-3}{12} \\ \frac{\sqrt{2}-4}{9} & \frac{6-\sqrt{3}}{12} & \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{4-\sqrt{3}}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4\sqrt{3}-3}{12} \end{vmatrix} \simeq 3.4\,10^{-4}$$

et qui est donc différent de 0. D'où les trois vecteurs forment une famille libre.

On en déduit que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ forment une base.

6. Elle n'est pas orthogonale car les produits scalaires entre ces vecteurs pris deux à deux ne sont pas nuls. Elle n'est pas non plus normée car les vecteurs de sa base ne n'ont pas une norme égale à l'unité.

Corrigé de l'exercice 2 : Equations différentielles

Soit $\mathcal{R}(O, XYZ)$ un repère orthonormé. Le mouvement d'un point matériel est décrit par les équations différentielles suivantes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \ddot{x}(t) & = & -\omega\dot{y} \\ \ddot{y}(t) & = & \omega\dot{x} \\ \ddot{z}(t) & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x(0) & = & y(0) = z(0) = 0 \\ \dot{x}(0) & = & v_{0x} > 0, \dot{y}(0) = 0, \dot{z} = v_{0z} > 0. \end{array} \right.$$

où ω est une constante positive.

1. On intègre $\ddot{y}(t) = \omega\dot{x}$ et on obtient $\dot{y}(t) = \omega x + K$ comme $\dot{y}(0) = 0$ et $x(0) = 0$ cela implique $K = 0$. Aussi nous obtenons

$$\ddot{x}(t) \quad = \quad -\omega\dot{y} = -\omega^2 x \Longrightarrow \ddot{x}(t) + \omega^2 x = 0.$$

C'est une équation différentielle de second degré à coefficients constants sans second membre. L'équation caractéristique est donnée par $r^2 + \omega^2 = 0$ dont les racines sont complexes distinctes $r_{1,2} = \pm\omega$. La solution de l'équation différentielle en y est alors

$$x(t) \quad = \quad A_x e^{i\omega t} + B_x e^{-i\omega t}$$

comme $x(0) = 0 \Longrightarrow A_x + B_x = 0$ et $\dot{x}(0) = v_{0x} \Longrightarrow i\omega A_x - i\omega B_x = 0 \Longrightarrow A_x - B_x = -iv_{0x}/\omega$ ce qui implique que $A_x = -B_x = -iv_{0x}/2\omega$ ce qui donne comme solutions

$$x(t) \quad = \quad -iv_{0x}/2\omega \left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) = \frac{v_{0x}}{\omega}\sin\omega t.$$

Quant à y, nous avons deux possibilités d'établir l'équation horaire $y(t)$, soit de partir de procéder comme c'est fait pour $x(t)$ soit de substituer dans l'équation différentielle de y l'expression de $x(t)$ et de résoudre l'équation obtenue.

Première possibilité : Partons de l'équation différentielle de x :

$$\ddot{x}(t) = -\omega\dot{y} \Longrightarrow \dot{x}(t) \quad = \quad -\omega y + K_1$$

et comme $\dot{x}(0) = v_{0x}$ et $y(0) = 0$ cela implique que $K_1 = v_{0x}$. L'équation différentielle en y devient

$$\ddot{y} \quad = \quad \omega\dot{x} = -\omega^2 y + \omega v_{0x} \Longrightarrow \ddot{y} + \omega^2 y = \omega v_{0x}$$

qui est une équation de second ordre à coefficients constants mais avec second membre cette fois-ci.

La solution générale $y(t)$ est la superposition de la solution sans second membre $y_{ssm}(t)$ et d'une solution particulière $y_p(t)$. La solution sans second membre, par symétrie avec $x(t)$, est $y_{ssm}(t) = A_y e^{i\omega t} + B_y e^{-i\omega t}$. Quant à la solution particulière, il suffit de constater que $y_p = v_{0x}/\omega$ est solution ce qui donne comme solution générale $y(t) = A_y e^{i\omega t} + B_y e^{-i\omega t} + v_{0x}/\omega$. Comme $y(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = 0$ alors

$$\left.\begin{array}{rcl} A_y + B_y & = & -v_{0x}/\omega \\ A_y - B_y & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow A_y = B_y = -\frac{v_{0x}}{2\omega}$$

ce qui donne pour la solution générale

$$y(t) = -\frac{v_{0x}}{2\omega}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) + \frac{v_{0x}}{\omega} = \frac{v_{0x}}{\omega}\left(1 - \cos\omega \mathrm{t}\right).$$

Deuxième possibilité : En utilisant le résultat de $x(t)$ obtenu, on peut écrire

$$\ddot{y} = \omega\dot{x} = v_{0x}\omega\cos\omega t \Longrightarrow \dot{y} = v_{0x}\sin\omega t + K_3$$

et comme $\dot{y}(0) = 0 \Longrightarrow K_3 = 0$. Nous obtenons ainsi

$$y(t) = -\frac{v_{0x}}{\omega}\cos\omega t + K_4$$

et comme $y(0) = 0 \Longrightarrow k_4 = v_{0x}/\omega$. La solution finale est donc

$$y(t) = \frac{v_{0x}}{\omega}\left(1 - \cos\omega t\right).$$

Corrigé 3 : Différentielle et dérivée d'un vecteur unitaire

Soit $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien et considérons la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

1. Exprimons les vecteurs de la base sphérique dans la base cartésienne :

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos\theta\vec{k} + \sin\theta\vec{e}_\rho \\ &= \cos\theta\vec{k} + \sin\theta(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}) \\ &= \cos\varphi\sin\theta\vec{i} + \sin\varphi\sin\theta\vec{j} + \cos\theta\vec{k}. \end{aligned}$$

nous sommes passés par le vecteur $\vec{e}_\rho$ de la base cylindrique.
De même, pour $\vec{e}_\theta$, nous avons

$$\begin{aligned} \vec{e}_\theta &= -\sin\theta\vec{k} + \cos\theta\vec{e}_\rho \\ &= -\sin\theta\vec{k} + \cos\theta(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}) \\ &= \cos\varphi\cos\theta\vec{i} + \sin\varphi\cos\theta\vec{j} - \sin\theta\vec{k}. \end{aligned}$$

et finalement

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}$$

2. Calculons les dérivées partielles suivantes sachant que les vecteurs de la base cartésienne sont fixes :

$$\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta} = \cos\varphi\cos\theta\vec{i} + \sin\varphi\cos\theta\vec{j} - \sin\theta\vec{k};$$

et

$$\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\sin\theta\vec{i} + \cos\varphi\sin\theta\vec{j};$$

et

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\cos\varphi\sin\theta\vec{i} - \sin\varphi\sin\theta\vec{j} - \cos\theta\vec{k};$$

et

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\cos\theta\vec{i} + \cos\varphi\cos\theta\vec{j};$$

et

$$\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0$$

et

$$\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\cos\varphi\vec{i} - \sin\varphi\vec{j}.$$

3. Pour établir la différentielle de chacun des vecteurs de la base, on a

$$\begin{aligned} d\vec{e}_r &= \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi}d\varphi \\ &= \left(\cos\varphi\cos\theta\vec{i} + \sin\varphi\cos\theta\vec{j} - \sin\theta\vec{k}\right)d\theta + \left(-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}\right)\sin\theta d\varphi \\ &= d\theta\vec{e}_\theta + \sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

De la même manière, on établit la différentielle de $\vec{e}_\theta$ comme suit

$$\begin{aligned} d\vec{e}_\theta &= \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi}d\varphi \\ &= \left(-\cos\varphi\sin\theta\vec{i} - \sin\varphi\sin\theta\vec{j} - \cos\theta\vec{k}\right)d\theta + \left(-\sin\varphi\cos\theta\vec{i} + \cos\varphi\cos\theta\vec{j}\right)d\varphi \\ &= -d\theta\vec{e}_r + \cos\theta d\varphi\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} d\vec{e}_\varphi &= \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi}d\varphi \\ &= d\varphi\left(-\cos\varphi\vec{i} - \sin\varphi\vec{j}\right) \\ &= -d\varphi\vec{e}_\rho = -d\varphi\left(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta\right). \end{aligned}$$

4. Pour cette question, il suffit de faire apparaitre les différentielles des vecteurs de la base sphérique sous la forme demandée. On a $\vec{k} = \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta$, ce qui donne $\vec{k}\wedge\vec{e}_r = \sin\theta\vec{e}_\varphi$, $\vec{k}\wedge\vec{e}_\theta = \cos\theta\vec{e}_\varphi$ et $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi\wedge\vec{e}_r$, ainsi on peut écrire

$$\begin{aligned} d\vec{e}_r &= d\theta\vec{e}_\varphi\wedge\vec{e}_r + d\varphi\vec{k}\wedge\vec{e}_r \\ &= \left(dt\dot{\theta}\vec{e}_\varphi + dt\dot{\varphi}\vec{k}\right)\wedge\vec{e}_r \\ &= dt\vec{\Omega}\wedge\vec{e}_r \end{aligned}$$

avec $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e}_\varphi + \dot{\varphi}\vec{k}$.
De même, on a

$$\begin{aligned} d\vec{e}_\theta &= -d\theta\vec{e}_r + \cos\theta d\varphi\vec{e}_\varphi \\ &= d\theta\vec{e}_\varphi\wedge\vec{e}_\theta + d\varphi\vec{k}\wedge\vec{e}_\theta \\ &= dt\vec{\Omega}\wedge\vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

Finalement, reprenons la différentielle de $\vec{e}_\varphi$:

$$\begin{aligned}
d\vec{e}_\varphi &= -dt\dot{\varphi}\left(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta\right) \\
&= -dt\dot{\varphi}\left(\sin\theta\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\varphi - \cos\theta\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\varphi\right) \\
&= -dt\dot{\varphi}\left(\sin\theta\vec{e}_\theta - \cos\theta e_r\right) \wedge \vec{e}_\varphi \\
&= dt\dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{e}_\varphi \\
&= dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

Les dérivées par rapport au temps s'obtiennent facilement en divisant par dt :

$$\left.\tfrac{d\vec{e}_r}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r \quad \left.\tfrac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta \quad \left.\tfrac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi.$$

5. Considérons cette fois-ci la base cylindrique. Le seul angle qui varie est φ, d'où le vecteur rotation de la base cylindrique par rapport à la base cartésienne est $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$. En appliquant les résultats précédents, on obtient

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\
\left.\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho \\
\left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= 0
\end{aligned}$$

6. Soit $\vec{V} = V_r\vec{e}_r + V_\theta\vec{e}_\theta + V_\varphi\vec{e}_\varphi$. Sa dérivée par rapport au temps est

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{V}}{dt} &= \frac{dV_r}{dt}\vec{e}_r + V_r\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dV_\theta}{dt}\vec{e}_\theta + V_\theta\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \frac{dV_\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + V_\varphi\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \\
&= \frac{dV_r}{dt}\vec{e}_r + \frac{dV_\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dV_\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + V_r\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r + V_\theta\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\theta + V_\varphi\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\varphi \\
&= \frac{dV_r}{dt}\vec{e}_r + \frac{dV_\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dV_\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \vec{\Omega} \wedge \left(V_r\vec{e}_r + V_\theta\vec{e}_\theta + V_\varphi\vec{e}_\varphi\right) \\
&= \frac{dV_r}{dt}\vec{e}_r + \frac{dV_\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dV_\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}.
\end{aligned}$$

qui reste une relation générale.

Corrigé 4 : Déplacement élémentaire

Considérons un repère cartésien $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$ et $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$ respectivement les bases cylindrique et sphérique. Soit M un point repéré par $\overrightarrow{OM}$ par rapport à $\mathcal{R}$. On considère un déplacement infinitésimal de M en M' tel que M' est très proche de M. On note alors le déplacement élémentaire par $\overrightarrow{OM}' - \overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{MM}' = d\overrightarrow{OM}$

1. La base cartésienne est fixe et donc la dérivée de ces vecteurs par rapport au temps dans $\mathcal{R}$ est nulle. D'où, le déplacement élementaire dans cette base est

$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

2. Le vecteur rotation de la base cylindrique dans $\mathcal{R}$ est $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$. Ceci peut être démontré facilement en explicitant la base cylindrique dans la base cartésienne.
   Le déplacement élémentaire dans cette base est

$$\begin{aligned}
d\overrightarrow{OM} &= d\left(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}\right) = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\vec{e}_\rho + dz\vec{k} \\
&= d\rho\vec{e}_\rho + \rho dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\rho + dz\vec{k} \\
&= d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho + dz\vec{k} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{k}
\end{aligned}$$

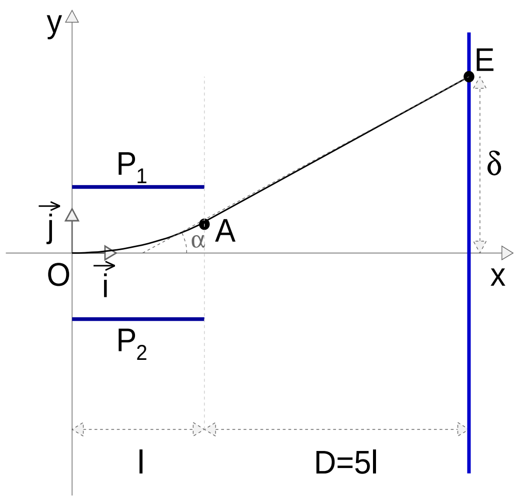
3. Pour ce qui est de la base sphérique, le vecteur rotation est $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e}_\varphi + \dot{\varphi}\vec{k} = \dot{\theta}\vec{e}_\varphi + \dot{\varphi}\left(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta\right)$. Ainsi pour le déplacement élémentaire dans cette base, on trouve

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{OM} &= d\left(r\vec{e}_r\right) = dr\vec{e}_r + rd\vec{e}_r \\ &= dr\vec{e}_r + rdt\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r \\ &= dr\vec{e}_r + r\left(d\theta\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r + d\varphi\left[\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta\right] \wedge \vec{e}_r\right) \\ &= dr\vec{e}_r + r\left(d\theta\vec{e}_\theta + d\varphi\vec{e}_\varphi\right) \\ &= dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + rd\varphi\sin\theta\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Exercice 4 : Tube cathodique

Nous étudions dans cet exercice le mouvement des électrons dans un tube cathodique d'un oscilloscope, voir figure ci-dessous. Les électrons partent du point O avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$, ce qui implique que les composantes de la vitesse à l'instant initial selon Ox et Oy sont respectivement $v_{0x} = v_0$ et $v_{0y} = 0$. La vitesse à un instant quelconque t sera notée $\vec{v}(t) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ où $v_x = d\gamma_x/dt$ et $v_y = d\gamma_y/dt$.

De même, l'accélération des électrons entre les deux plaques est $\vec{\gamma} = \gamma_0\vec{i} = \gamma_x\vec{i} + \gamma_y\vec{j}$, ce qui implique que l'accélération selon Oy est $\gamma_y = \gamma_0$ alors que selon Ox, elle est nulle $\gamma_x = 0$.



1. Pour établir les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement des électrons entre les plaques, nous partons de l'expression des composantes de l'accélération

$$\frac{dv_x}{dt} = \gamma_x = 0 \Longrightarrow \int dv_x = 0 \Longrightarrow v_x = \text{Cte} \Longrightarrow v_x = v_{0x}.$$

De cette dernière relation, on déduit l'équation horaire

$$\frac{dx}{dt} = v_x = v_{0x} \Longrightarrow \int dx = v_{0x} \Longrightarrow x(t) = v_{0x}t + \text{Cte}$$

la constante est détermimée à partir des conditions initiales, $x(t=0) = x_0 = 0$, ce qui implique $x(t) = v_{0x}t$.
On procède de la même manière pour l'équation horaire $y(t)$

$$\frac{dv_y}{dt} = \gamma_y = \gamma_0 \Longrightarrow \int dv_y = \gamma_0 \Longrightarrow v_y = \gamma_0 t + \text{Cte}$$

or $v_y(t=0) = v_{0y} = 0$ ce qui implique que la constante est nulle et $v_y = \gamma_0 t$. Pour $y(t)$, sachant que $y(t=0) = 0$,

$$\frac{dy}{dt} = v_y = \gamma_0 t \Longrightarrow \int dy = v_{0y}\int tdt \Longrightarrow y(t) = \frac{1}{2}\gamma_0 t^2.$$

On en conclut que les équations horaires du mouvement des électrons sont

$$\begin{cases} x(t) &= v_0 t \\ y(t) &= \frac{1}{2}\gamma_0 t^2 \end{cases}$$

Pour déduire l'équation de la trajectoire, il suffit de substituer t dans l'expression de y par son expression en fonction de x, sachant que $t = x/v_0$

$$y = \frac{1}{2}\gamma_0 t^2 = \frac{1}{2}\frac{\gamma_0}{v_0^2}x^2$$

qui est l'équation d'une parabole de sommet O.

2. Calculons la vitesse des électrons au point A, situé à la sortie des plaques, $x_A = l$

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= v_{xA}\vec{i} + v_{yA}\vec{j} \\ &= v_0\vec{i} + \gamma_0 t_A\vec{j} \end{aligned}$$

où t_A est le temps mis par les électrons pour atteindre le point A, $t_A = l/v_0$ ce qui donne

$$\vec{v}_A = v_0\vec{i} + \frac{\gamma_0 l}{v_0}\vec{j}$$

Pour déduire α, il suffit de projeter $\vec{v}_A$ sur l'axe Ox, d'une part, et d'utiliser la définition du produit scalaire de $\vec{v}_A$ par $\vec{i}$, d'autre part

$$\begin{aligned} \vec{v}_A \cdot \vec{i} &= v_0 \quad \text{(projection sur } \vec{i}) \\ &= |v_A|\cos\alpha \quad (\text{définition de } \vec{v}_A \cdot \vec{i}) \\ \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{v_0}{|\vec{v}_A|} \end{aligned}$$

or

$$|\vec{v}_A| = \sqrt{v_0^2 + \frac{\gamma_0^2 l^2}{v_0^2}} = v_0\sqrt{1 + \frac{\gamma_0^2 l^2}{v_0^4}}$$

ce qui donne

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma_0^2 l^2}{v_0^4}}}\right)$$

3. L'accélération des électrons entre les points A et E est nulle ce qui implique que le mouvement est rectiligne uniforme. Dans la suite, on considère les équations horaires entre les deux points A et E sans l'expliciter. En effet

$$\frac{dv_x}{dx} = 0 \Longrightarrow v_x(t) = \mathrm{K}$$

or $v_x(t_A) = \vec{v}_A \cdot \vec{i} = v_0$ ce qui implique que $v_x(t) = v_0$. De même

$$\frac{dx}{dt} = v_x = v_0 \Longrightarrow x(t) = v_0 t + \mathrm{K}$$

et on détermine la constante sachant qu'à $t = t_A$ on a $x = x_A = l$, ce qui donne $x(t = t_A) = l = v_0 t_A + K \Longrightarrow K = l - v_0 t_A$ or $t_A = l/v_0$ ce qui implique $k = l - v_0\frac{l}{v_0} = 0$ et

$$x(t) = v_0 t$$

lequel résultat est prévu car le mouvement selon Ox est uniforme entre O et E.
On procède de la même manière pour l'équation horaire $y(t)$:

$$\frac{dv_y}{dy} = 0 \Longrightarrow v_y(t) = \mathrm{K}$$

or $v_y(t_A) = \vec{v}_A \cdot \vec{j} = \frac{\gamma_0 l}{v_0}$ ce qui implique que
$v_y(t) = \frac{\gamma_0 l}{v_0}$. De même

$$\frac{dy}{dt} = v_y = \frac{\gamma_0 l}{v_0} \Longrightarrow y(t) = \frac{\gamma_0 l}{v_0} t + \mathrm{K}$$

et on détermine la constante sachant qu'à $t = t_A$ on a $y = y_A = \frac{1}{2}\gamma_0 t_A^2 = \frac{1}{2}\gamma_0 \frac{l^2}{v_0^2}$. Ainsi

$$\begin{aligned} y(t = t_A) &= y_A = \frac{\gamma_0 l}{v_0} t_A + K \\ &\Longrightarrow K = y_A - \frac{\gamma_0 l}{v_0} t_A = \frac{1}{2}\gamma_0 \frac{l^2}{v_0^2} - \frac{\gamma_0 l}{v_0}\frac{l}{v_0} = -\frac{1}{2}\gamma_0 \frac{l^2}{v_0^2} \end{aligned}$$

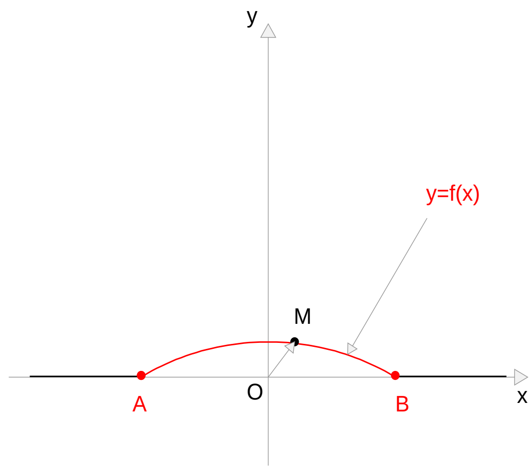
ainsi l'équation horaire $y(t)$ s'obtient comme suit

$$y(t) = \frac{\gamma_0 l}{v_0} t - \frac{1}{2}\gamma_0 \frac{l^2}{v_0^2} = \frac{\gamma_0 l}{v_0}\left(t - \frac{1}{2}\frac{l}{v_0}\right)$$

Pour déterminer la déviation δ, il suffit de reprendre l'équation horaire $y(t)$ à l'instant $t = t_E = \frac{l+D}{v_0} = \frac{6l}{v_0}$:

$$\delta = y(t = t_E) = \frac{\gamma_0 l}{v_0}\left(\frac{6l}{v_0} - \frac{1}{2}\frac{l}{v_0}\right) = \frac{11}{2}\frac{\gamma_0 l^2}{v_0^2}.$$

Corrigé 5 : Tube cathodique



Nous nous intéressons au segment $[A, B]$ de la route dont le profil est décrit par $y = f(x)$, comme indiqué dans la figure ci-dessus.
La position de M est repérée par $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, étant donné que le mouvement a lieu dans le plan (Oxy).

1. La vitesse du point M s'exprime dans le repère cartésien comme suit

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} \\ &= \dot{x}\vec{i} + \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}\vec{j} \\ &= \dot{x}\left(\vec{i} + f'(x)\vec{j}\right).\end{aligned}$$

2. Calculons l'accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$:

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \ddot{x}\left(\vec{i} + f'(x)\vec{j}\right) + \dot{x}\frac{d}{dt}f'(x)\vec{j} \\ &= \ddot{x}\left(\vec{i} + f'(x)\vec{j}\right) + \dot{x}\dot{x}\frac{d}{dx}f'(x)\vec{j} \\ &= \ddot{x}\vec{i} + \left(\ddot{x}f'(x) + \dot{x}^2 f''(x)\right)\vec{j}\end{aligned}$$

ce qui donne pour la composante de l'accélération selon Oy

$$\gamma_y(M/\mathcal{R}) = \ddot{x}f'(x) + \dot{x}^2 f''(x).$$

Pour réexprimer $\gamma_y(M/\mathcal{R})$ comme demandé, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}v^2 = \dot{x}^2\left(1 + f'^2(x)\right) \Longrightarrow \dot{x}^2 &= \frac{v^2}{1 + f'^2(x)} \\ \Longrightarrow \frac{d}{dt}\dot{x}^2 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{1 + f'^2(x)}\right) \\ \Longrightarrow 2\dot{x}\ddot{x} &= \dot{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{1 + f'^2(x)}\right) \\ \Longrightarrow \ddot{x} &= \frac{-v^2 f'(x) f''(x)}{\left(1 + f'^2(x)\right)^2}\end{aligned}$$

En remplaçant $\dot{x}$ et $\ddot{x}$ par leurs expressions dans celle de $\gamma_y(M/\mathcal{R})$, on obtient

$$\begin{aligned}\gamma_y(M/\mathcal{R}) &= \frac{-v^2 f'^2(x) f''(x)}{\left(1 + f'^2(x)\right)^2} + \frac{v^2 f''(x)}{1 + f'^2(x)} \\ &= \frac{v^2 f''(x)}{\left(1 + f'^2(x)\right)^2}\end{aligned}$$

d'où l'expression recherchée.