Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia-Marrakech
Département de Physique

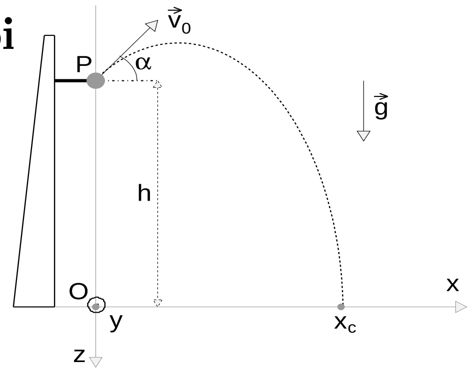
Année Universitaire 2015/2016
Mercredi 13 janvier 2016

Contrôle de Mécanique du point matériel
Filière SMA
Temps imparti 2H00

Questions de cours (Bonus : 3points)

1. **1.5p**
2. **1.5p**

Corrigé de l'exercice 1 : Saut d'un plongeoi



Un baigneur assimilé à un point matériel P de masse m saute d'un plongeoir situé à une hauteur h au dessus de l'eau avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$, voir figure ci-contre. Le point de chute à la surface d'eau est x_c. Soit $\mathcal{R}(Oxyz)$ le repère lié au plongeoire, muni de la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, considéré galiléen. Le baigneur est soumis uniquement à la pesanteur lors de la chute.

1. **Chute du plongeur :** 4.0p

a- Comme le mouvement a lieu dans le plan Oxz, la vitesse du baigneur lors de la chute par rapport à $\mathcal{R}$ est $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{z}\vec{k}$ **0.25p** et l'accélération est égale à $\gamma = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{z}\vec{k}$ **0.25p**. 0.5p

b- Comme $\mathcal{R}$ est galiléen et la seule force est le poids, le PFD donne 2.5p

$$m\vec{\gamma} = m\vec{g} \implies m\left(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{z}\vec{k}\right) = mg\vec{k}$$
$$\implies \ddot{x}\vec{i} + \ddot{z}\vec{k} = g\vec{k} \quad \textbf{0.25p}$$

Les équations horaires s'obtiennent en projetant sur les axes Ox et Oz

$$\ddot{z} = g \implies \dot{z} = gt + C_1 \implies z = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$$

avec $C_1 = \vec{v}_0 \cdot \vec{k} = v_0 \sin\alpha$, $C_2 = z_0 = -h$ ce qui implique que $z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0(\sin\alpha)t - h$ **1.0p**. De même,

$$\ddot{x} = 0 \implies \dot{x} = K_1 \implies x = K_1 t + K_2$$

avec $K_1 = \vec{v}_0 \cdot \vec{i} = v_0 \cos\alpha$ et $K_2 = x_0 = 0$ ce qui implique que $x(t) = v_0(\cos\alpha)t$ **0.75p**.
Pour obtenir l'équation de la trajectoire, il suffit d'éliminer le temps, avec $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$, ce qui donne

$$z = \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha - h \quad \textbf{0.25p}$$

qui n'est d'autre que l'équation d'une parabole **0.25p**.

c- Pour retrouver t_c, il suffit de résoudre $z(t = t_c) = 0$ ce qui donne $\boxed{1.0\text{p}}$

$$\frac{1}{2}gt_c^2 + v_0(\sin\alpha)\,t_c - h = 0$$

qui est une équation de second degré dont le discriminant est $\Delta = v_0^2\sin^2\alpha + 2gh > 0$ et comme le temps est positif, la solution est la racine positive

$$t_C = \frac{-v_0\sin\alpha + \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2gh}}{g}. \quad \textbf{0.5p}$$

La coordonnée x_c s'obtient par $x_c = x(t = t_c) = v_0\cos\alpha\left(\frac{-v_0\sin\alpha+\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha+2gh}}{g}.\right)$. **0.5p**

Plongueur dans l'eau : On prend $\alpha = 0$ pour la suite de l'exercice. $\boxed{6.0\text{p}}$

a- Si $\alpha = 0$ alors $x(t) = v_0t$, $z(t) = \frac{1}{2}gt^2 - h$ et $z(t = t_c) = 0$ ce qui implique que $t_c = \frac{\sqrt{2gh}}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ **0.5p**. $\boxed{0.5\text{p}}$

b- la vitesse selon Oz à $t = t_c$ est donnée par $\vec{v}_c = \dot{z}(t = t_c)\vec{k} = \sqrt{2gh}\vec{k}$ **0.5p**. $\boxed{0.5\text{p}}$

c- Le PDF donne $\boxed{1.0\text{p}}$

$$m\left(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{z}\vec{k}\right) = mg\vec{k} - k\left(\dot{x}\vec{i} + \dot{z}\vec{k}\right) - \frac{1}{\lambda}mg\vec{k} = -k\dot{x}\vec{i} - \left(k\dot{z} - mg\left(1 - \frac{1}{\lambda})\right)\right)\vec{k} \quad \textbf{0.5p}$$

et par projection sur les axes Ox et Oz, en posant $\tau = m/k$, nous obtenons

$$\begin{cases} \text{proj. Ox} \implies \ddot{x} + k\dot{x} = 0 & \textbf{0.25p} \\ \text{proj. Oz} \implies \ddot{z} + \frac{1}{\tau}\dot{z} = g\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) & \textbf{0.25p} \\ \implies \dot{v}_z + \frac{1}{\tau}v_z = g\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \end{cases}$$

d- L'équation différentielle vérifiée par v_z est une équation différentielle de premier ordre avec second membre. La solution générale est la somme de la solution sans second membre $\boxed{1.5\text{p}}$

$$\dot{v}_{smz} + \frac{1}{\tau}v_{smz} = 0 \implies \frac{dv_{smz}}{v_{smz}} = -\frac{1}{\tau}dt \implies v_{smz}(t) = Ce^{-\frac{t}{\tau}} \quad \textbf{0.5p}$$

et la solution particulière $v_{pz} = g\tau\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)$ **0.5p**, ce qui donne

$$v_z = Ce^{-\frac{t}{\tau}} + g\tau\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right). \quad \textbf{0.25p}$$

La constante C est déterminée par la condition $v_z(t = t_c) = v_c = \sqrt{2gh}$, ce qui donne $C = e^{\frac{t_c}{\tau}}\left(\sqrt{2gh} - g\tau\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\right)$. Ainsi la solution est donnée par

$$v_z(t) = e^{-\frac{t-t_c}{\tau}}\left(\sqrt{2gh} - g\tau\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\right) + g\tau\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right). \quad \textbf{0.25p}$$

e- Si $t \to +\infty$ alors $e^{-t/\tau} \to 0$ et $\boxed{1.0\text{p}}$

$$v_z \to v_L = g\tau\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right). \quad \textbf{1.0p}$$

Comme $\lambda < 1$ alors $v_L < 0$, c'est à dire qu'àprès un temps très long, le baigneur remonte à la surface, notons au passage que v_L est une grandeur algébrique.

f- L'expression de $v_z(t)$ peut se remettre sous la forme $\boxed{1.5\text{p}}$

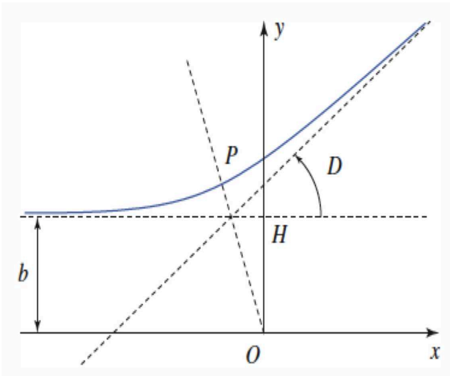
$$v_z(t) = e^{-\frac{t-t_c}{\tau}} (v_c + |v_L|) - |v_L| \quad \mathbf{0.5p}$$

et le baigneur commence à remonter lorsque $v_z(t = t_1)$ s'annulle et donc

$$\begin{aligned} e^{\frac{t_1-t_c}{\tau}} &= \frac{v_c - |v_L|}{|v_L|} \\ \Longrightarrow \frac{t_1 - t_c}{\tau} &= \ln\left[\frac{v_c - |v_L|}{|v_L|}\right] \\ \Longrightarrow t_1 &= t_c + \tau \ln\left[\frac{v_c - |v_L|}{|v_L|}\right]. \quad \mathbf{1.0p} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2 (10 points)

On considère une particule M chargée de masse m et de charge q venant de l'infini avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$. La particule M s'approche avec le paramètre d'impact b d'une autre particule B placée en O de masse $m_B \gg m$ et de charge Q et dont la trajectoire est representée sur la figure ci-contre. Soit $\mathcal{R}(Oxyz)$ le repère du laboratoire considéré galiléen. Nous avons ainsi $b = OH$ et $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$, où $\vec{i}$ est le vecteur unitaire de Ox. La particule M n'est soumise qu'à la force électrostatique, dite aussi coulombienne, donnée par $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{r^3}\vec{r}$ où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ (On néglige la pesanteur). On pose $k = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}$ avec $k > 0$.



1. La seule force à laquelle est soumise la particule M est la force coulombienne et en appliquant le théorème du moment cinétique sachant que $\mathcal{R}$ est galiléen, nous obtenons $\boxed{1.5\text{p}}$

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\vec{\sigma}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} \\ &= \vec{r} \wedge \frac{k}{r^3}\vec{r} = \vec{0} \quad \mathbf{0.75} \end{aligned}$$

d'où le moment cinétique par rapport à O est constant.
Comme $\vec{\sigma}$ est constant alors $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ sont constamment dans le même plan d'où le mouvement a lieu sur ce plan. **0.25**
Soit M_0 la position de M à l'infini et $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$ sa vitesse. Alors $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM_0}$. $\vec{\sigma}$ est constant alors

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= \vec{\sigma}(t=0) = \vec{\sigma}_0 \\ &= \overrightarrow{OM_0} \wedge m\vec{v}_0 \\ &= \left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM_0}\right) \wedge m\vec{v}_0 \\ &= \left(b\vec{j} - \|HM_0\|\vec{i}\right) \wedge mv_0\vec{i} \\ &= -mv_0 b\vec{k}. \quad \mathbf{0.5} \end{aligned}$$

2. La vitesse du point M à un instant t est donnée par $\boxed{1.0\text{p}}$

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi. \quad \mathbf{0.5}$$

Ce qui donne pour le moment cinétique

$$\begin{aligned}\vec{\sigma} &= r\vec{e}_r \wedge m\left(\dot{r}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\right)\\ &= mr^2\dot{\varphi}\vec{k}. \quad \mathbf{0.5}\end{aligned}$$

L'énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)$.

3. Calculons le travail élémentaire de $\vec{F}$ $\boxed{1.0\text{p}}$

$$\begin{aligned}\delta W &= \vec{F}\cdot d\vec{r}\\ &= \frac{k}{r^2}\vec{e}_r\cdot\left(dr\vec{e}_r + rd\varphi\vec{e}_\varphi\right)\\ &= \frac{k}{r^2}dr\end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned}dE_p &= -\delta W\\ &= -\frac{k}{r^2}dr \Longrightarrow E_p = \frac{k}{r} + C(=0). \quad \mathbf{1.0p}\end{aligned}$$

4. L'énergie mécanique est $\boxed{1.0\text{p}}$

$$\begin{aligned}E_m &= E_c + E_p\\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{k}{r}. \quad \mathbf{0.5p}\end{aligned}$$

Au sommet de la trajectoire la vitesse est orthoradiale et donc sa composante selon $\vec{e}_r$ est nulle et l'énergie mécanique devient

$$E_m = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{k}{r}. \quad \mathbf{0.5p}$$

5. L'énergie mécanique est conservée parce que la seule force à laquelle est soumise la particule $\boxed{2.0\text{p}}$ dérive d'un potentiel. **0.25p**
La distance minimale d'approche est obtenue en utilisant la conservation de E_m entre l'infini et au sommet de la trajectoire où $r = r_{min}$, sachant qu'à l'infini l'énergie potentielle est nulle.

De même $\dot{\varphi} = \sigma/mr^2 = mv_0b/mr^2 = v_0b/r^2$ **0.25p**.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mr_{min}^2\frac{v_0^2b^2}{r_{min}^4} + \frac{k}{r_{min}} &= \frac{1}{2}mv_0^2\\ \Longrightarrow r_{min}^2 - \frac{2k}{mv_0^2}r_{min} - b^2 &= 0 \quad \mathbf{1.0p}\end{aligned}$$

qui est une équation de second degré dont le discriminant réduit est $\Delta = \frac{k^2}{m^2v_0^4} + b^2 > 0$ et donc l'équation admet deux racines réelles. Comme $r_{min} \geq 0$ alors seule la racine positive est retenue

$$r_{min} = \frac{k}{mv_0^2} + \sqrt{\frac{k^2}{m^2v_0^4} + b^2} \quad \mathbf{0.5p}$$

$\boxed{3.5}$

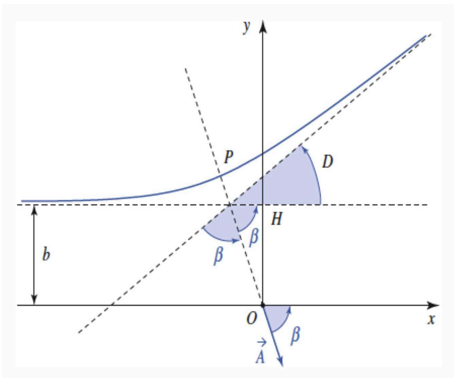
6. **a-** Calculons la dérivée de $\vec{A}$ $\boxed{2.0\text{p}}$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= -\frac{1}{k}\left(\left.\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \wedge \vec{\sigma} + \vec{V}(M/\mathcal{R}) \wedge \left.\frac{d\vec{\sigma}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}\right) - \left.\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\
&= -\frac{1}{k}\left(\frac{k}{mr^2}\vec{e}_r \wedge mr^2\dot{\varphi}\vec{k}\right) - \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\
&= \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = 0 \quad \textbf{1.0p}
\end{aligned}$$

donc $\vec{A}$ est conservé. A l'infini, $\vec{e}_r = -\vec{i}$ et la conservation de $\vec{A}$ permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= -\frac{v_0\vec{i} \wedge (-mv_0 b)\vec{k}}{k} + \vec{i} \\
&= -\frac{mv_0^2 b}{k}\vec{j} + \vec{i} \quad \textbf{0.5p}
\end{aligned}$$

La représentation de $\vec{A}$ sur le graphique de la trajectoire est illustré ci-dessous **0.5p**



b- La relation entre D et β est $2\beta + D = \pi \Longrightarrow D = \pi - 2\beta$ **0.5p**. $\boxed{0.5\text{p}}$

c- Pour déterminer D, il suffit de déterminer β comme suit, sachant que $\beta \in [0, \pi/2[$ donc $\text{tg}\beta \geq 0$ $\boxed{1.0\text{p}}$

$$\begin{aligned}
\text{tg}\beta &= \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \left|\frac{\vec{A}.\cdot\vec{j}}{\vec{A}\cdot\vec{i}}\right| \\
&= \frac{mv_0^2 b}{k} \quad \textbf{0.5p}
\end{aligned}$$

ce qui donne enfin

$$\begin{aligned}
\text{tg}\beta &= \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{D}{2}\right) = 1/\text{tg}\frac{D}{2} \\
\Longrightarrow \text{tg}\frac{D}{2} &= \frac{k}{mv_0^2 b} \quad \textbf{0.5p}
\end{aligned}$$