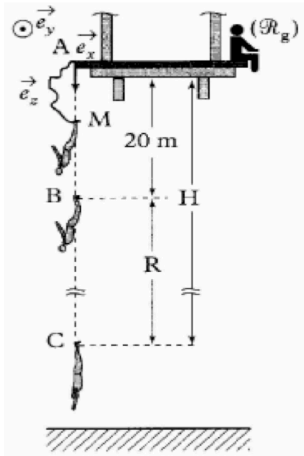
Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2014/2015
Le 2 février 2015

Corrigé du Contrôle
Mécanique du point matériel - Filière SMP/SMC Temps imparti 2H00

Exercice 1 : Saut à la corde élastique (5pt)

Un sportif de masse m, considéré comme un point matériel M, pratique le saut à l'aide d'une corde élastique du haut d'un pont, voir figure ci-contre. M tombe sans vitesse initiale du haut du pont en A avec une corde élastique, de longueur au repos $l_0 = 20$m, accrochée aux pieds.
Entre les points A et B, la corde élastique n'est pas encore tendue et M est en chute libre. A partir du point B, la corde élastique peut être considérée comme un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur $k = 120$N/m. On suppose que le référentiel $\mathcal{R}(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est galiléen. $\vec{e}_z$ est orienté vers le bas dans la direction de la chute de M. On néglige la résistance de l'air. La position du sportif est repérée par $\overrightarrow{AM} = z\vec{e}_z$. L'énergie potentielle de M au point A est nulle. On donne l'accélération de la pesanteur $g = 9.81\text{ms}^{-2}$.



$\boxed{1.5p}$

1. La position de S est repérée par $\overrightarrow{AS} = z\vec{e}_z$. Les équations différentielles vérifiées par $z(t)$ sont obtenues en distinguant les cas suivants :
   — pour $0 < z < l_0$, S est en chute libre et la résistance de l'air est négligée donc
   $$m\ddot{z}\vec{e}_z = mg\vec{e}_z \Longrightarrow \ddot{z} \;=\; g. \quad \textbf{0.5p}$$
   — pour $z > l_0$, S est soumis au poids et à la force de l'élastique, donc
   $$m\ddot{z}\vec{e}_z \;=\; mg\vec{e}_z - k(z - l_0)\vec{e}_z \Longrightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k}{m}l_0 \quad \textbf{0.5p}$$
   qui est une équation différentielle de second ordre à coefficients constants et avec second membre.

   Quant aux solutions générales, elles sont données par
   — si $z < l_0 \Longrightarrow z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + k_1 t + k_2$ **0.25p**;
   — si $z > l_0$: la solution générale est la somme de la solution sans second membre $z_{ssm}(t)$ et une solution particulière $z_p(t)$. En effet, la solution sans second membre s'obtient en résolvant l'équation caractéristique $r^2 + \omega_0^2 = 0 \Longrightarrow r_{1,2} = \pm i\omega_0$ avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. La solution est alors
   $$z_{ssm}(t) = a\cos(\omega_0 t - \psi)$$

La solution particulière est $z_p(t) = \frac{m}{k}g - l_0$ et la solution générale a la forme

$$z(t) = a\cos(\omega_0 t - \psi) + \frac{m}{k}g - l_0 \quad \textbf{0.25p}$$

.

2. **Cette question peut être traitée par trois méthodes, veuillez bien en tenir compte.**

$\boxed{1.5p}$

Méthode 1 : Théorème de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique du système est $E_m = E_c + E_p$. Pour $z < l_0$, la seule force qui travaille est le poids. Son énergie potentielle est

$$\begin{aligned} dE_p &= -m\vec{g}\cdot d\overrightarrow{AS} = -mg\vec{e}_z \cdot dz\vec{e}_z = -mgdz \\ \Longrightarrow E_p &= -mgz + k \end{aligned}$$

avec $k = E_p(z=0) = E_p(A) = 0 \Longrightarrow E_p = -mgz$ **0.25p**.

L'énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$ et donc $E_m = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz$ **0.25p**. L'énergie mécanique est conservée car la seule force qui travaille est le poids et il est conservatif[1]. Sachant que l'énergie mécanique initiale $E_m(t=0) = E_m(A) = E_c(A) + E_p(A) = 0$, la conservation de l'énergie mécanique donne

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= 0 \Longrightarrow E_m(B) = E_m(A) = 0 \quad \textbf{0.25p} \\ \Longrightarrow \frac{1}{2}mV_B^2 - mgl_0 &= 0 \Longrightarrow V_B = \sqrt{2gl_0} \quad \textbf{0.5p}. \end{aligned}$$

A.N : $V_B = \sqrt{2 \times 9.81 \times 20} \sim 19.81\mathbf{ms}^{-1}$ **0.25p**.

Méthode 2 : Théorème de l'énergie cinétique

Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} dE_c &= \delta W(m\vec{g}) \\ \Longrightarrow dE_c &= mg\vec{e}_k \cdot dz\vec{e}_k \quad \textbf{0.25p} \\ \Longrightarrow E_c(B) - E_c(A) &= mg\int_{z_A}^{z_B} dz = mgz_B \quad \textbf{0.5p} \\ \Longrightarrow \frac{1}{2}mV_B^2 &= mgl_0 \Longrightarrow V_B = \sqrt{2gl_0} \quad \textbf{0.5p} \end{aligned}$$

A.N : $V_B = \sqrt{2 \times 9.81 \times 20} \sim 19.81\mathbf{ms}^{-1}$ **0.25p**.

1. On accepte aussi la réponse : E_m ne dépend pas explicitement du temp.

Méthode 3 : Equation horaire

Dans ce cas, nous avons, sachant que $k_1 = 0$ **et** $k_2 = 0$**,**

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 \text{ et } \dot{z}(t) = gt \quad \mathbf{0.25p}$$

Comme $z_B = l_0 = \frac{1}{2}gt_B^2 \Longrightarrow t_B = \sqrt{\frac{2l_0}{g}}$ **0.5p alors**

$$V_B = \dot{z}_B = gt_B = g\sqrt{\frac{2l_0}{g}} = \sqrt{2gl_0} \quad \mathbf{0.5p}$$

A.N : $V_B = \sqrt{2 \times 9.81 \times 20} \sim 19.81\mathbf{ms}^{-1}$ **0.25p**.

3. **Cette question peut être traitée également par deux méthodes.**

2.0p

Méthode 1 : Théorème de l'énergie mécanique

Pour ce faire nous avons besoin de l'énergie potentielle de la force élastique $\vec{F} = -k(z - l_0)\vec{e}_z$. D'où

$$dE_p(\vec{F}) = -\vec{F} \cdot d\overrightarrow{AS} = k\,(z - l_0)\,dz \Longrightarrow E_p(\vec{F}) = \frac{1}{2}\,(z - l_0)^2 + \text{Cst}.$$

Comme $E_p(\vec{F}) = 0$ pour $z = l_0$ alors Cst=0. D'où l'energie potentielle de S est donnée par $E_p = E_p(m\vec{g}) + E_p(\vec{F}) = -mgz + \frac{1}{2}k\,(z - l_0)^2$ **0.25p**
et l'énergie mécanique est

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz + \frac{1}{2}k\,(z - l_0)^2 \quad \mathbf{0.25p}.$$

Au point C, la vitesse de S est nulle et donc son énergie mécanique est réduite à son énergie potentielle $E_m(C) = E_p(C) = -mgz_C + \frac{1}{2}k(z_C - l_0)^2$ **0.25p**.
La conservation de l'énergie mécanique donne, sachant que $z_C = H$,

$$\begin{aligned} E_m(C) = E_m(A) &= 0 \quad \mathbf{0.25p} \\ \Longrightarrow -mgH + \frac{1}{2}k(H - l_0)^2 &= 0 \\ \Longrightarrow H^2 - 2H(l_0 + \frac{m}{k}g) + l_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

qui est un polynôme de second degré dont le discriminant réduit est égal à

$$\Delta' = (l_0 + \frac{m}{k}g)^2 - l_0^2 = \frac{m}{k}g\left(2l_0 + \frac{m}{k}g\right) > 0.$$

Les deux racines sont

$$H_\pm = (l_0 + \frac{m}{k}g) \pm \sqrt{\frac{m}{k}g\left(2l_0 + \frac{m}{k}g\right)} \quad \mathbf{0.25p}$$

On vérifie que $H_- < l_0$ ce qui l'élimine puisque $H > l_0$ 0.25p et donc la solution est

$$H = H_+ = (l_0 + \frac{m}{k}g) + \sqrt{\frac{m}{k}g\left(2l_0 + \frac{m}{k}g\right)} \quad \mathbf{0.25p}$$

A.N : $H = (20. + \frac{70.}{120.} \times 9.81) + \sqrt{\frac{70.\times 9.81}{120.}[2 \times 20. + \frac{70.\times 9.81}{120.}]} = 41.9$**m.** 0.25p

<u>**Méthode 2 : Théorème de l'énergie cinétique**</u>

Dans ce cas les forces qui travaillent sont le poids $mg\vec{e}_z$ et la force élastique $\vec{F} = -k(z - l_0)\vec{e}_z$ et nous avons ainsi

$$\begin{aligned}
dE_c &= \delta W(m\vec{g}) + \delta W(\vec{F}) \\
&= \left(m\vec{g} + \vec{F}\right) \cdot d\overrightarrow{AS} \\
&= (mg\vec{e}_z - k(z - l_0)\vec{e}_z) \cdot dz\vec{e}_z \\
&= mgdz - k(z - l_0)dz \\
\Longrightarrow E_c(C) - E_c(B) &= \int_{z_B}^{z_C} (mg - k(z - l_0))\, dz. \quad \mathbf{0.5p}
\end{aligned}$$

Comme $V_C = 0$ et $z_C - z_B = H - l_0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}mV_B^2 &= mg\,(H - l_0) - \frac{1}{2}k\left[(z_C - l_0)^2 - (z_B - l_0)^2\right] \\
\Longrightarrow -mgl_0 &= mg(H - l_0) - \frac{1}{2}k(H - l_0)^2 \quad \mathbf{0.25p} \\
\Longrightarrow -mgH + \frac{1}{2}k(H - l_0)^2 &= 0 \\
\Longrightarrow H^2 - 2H(l_0 + \frac{m}{k}g) + l_0^2 &= 0 \quad \mathbf{0.25p}
\end{aligned}$$

qui est un polynôme de second degré dont le discriminant réduit est égal à

$$\Delta' = (l_0 + \frac{m}{k}g)^2 - l_0^2 = \frac{m}{k}g\left(2l_0 + \frac{m}{k}g\right) > 0.$$

Les deux racines sont

$$H_\pm = (l_0 + \frac{m}{k}g) \pm \sqrt{\frac{m}{k}g\left(2l_0 + \frac{m}{k}g\right)} \quad \mathbf{0.25p}$$

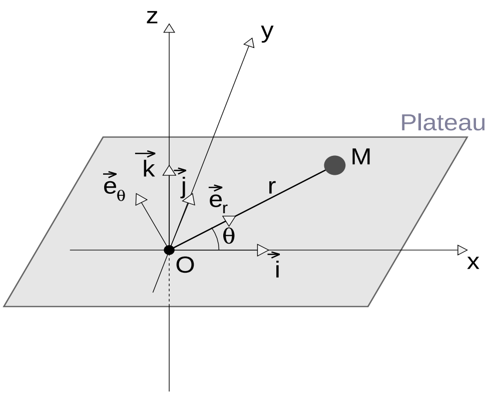
On vérifie que $H_- < l_0$ ce qui l'élimine puisque $H > l_0$ 0.25p et donc la solution est

$$H = H_+ = (l_0 + \frac{m}{k}g) + \sqrt{\frac{m}{k}g\left(2l_0 + \frac{m}{k}g\right)} \quad \mathbf{0.25p}$$

A.N : $H = (20. + \frac{70.}{120.} \times 9.81) + \sqrt{\frac{70.\times 9.81}{120.}[2 \times 20. + \frac{70.\times 9.81}{120.}]} = 41.9$**m.** 0.25p

Exercice 2 : Mouvement à force centrale (11p)

Une bille M de masse m assimilée à un point matériel est attachée au point O par un fil tendu inextensible, voir figure ci-contre. M glisse sans frottement sur un plateau horizontal (Oxy) d'un repère $\mathcal{R}(Oxyz)$ supposé galiléen. La bille M reste tout au long de son mouvement sur le plan (Oxy). La position de M est repérée par les coordonées polaires r et θ, $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$. A l'instant initial $t = 0$, M est lancée à partir d'une position M_0 située à la distance r_0 du point O avec une vitesse initiale $\vec{V}_0(M/\mathcal{R}) = V_0\vec{e}_\theta$, et l'on tire le fil de manière à rapprocher régulièrement M du point O tel que $r(t) = r_0 - V_r t$, où V_r est la vitesse radiale qui est constante et postive.



On admet que le fil exerce la force $\vec{T} = -T\vec{e}_r$ sur M et qu'il reste tendu tout au long du mouvement, T étant le module de $\vec{T}$.

Toutes les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.

Les résultats finaux doivent être considérés justes même si r n'est pas substitué par $(r_0 - V_r t)$.

1.0p

1. Le vecteur position est $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$. L'expression du vecteur vitesse est

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$
$$= -V_r\vec{e}_r + (r_0 - V_r t)\,\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \textbf{0.5p}$$

et l'expression du vecteur accélération est donnée par

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{d}{dt}\vec{V}(M/\mathcal{R})\right|_{\mathcal{R}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$
$$= -(r_0 - V_r t)\,\dot{\theta}^2\vec{e}_r + \left[(r_0 - V_r t)\,\ddot{\theta} - 2V_r\dot{\theta}\right]\vec{e}_\theta. \quad \textbf{0.5p}$$

1.5p

2. Les forces appliquées à la bille M sont
   - Le poids de la bille $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$ **0.5p**;
   - La réaction du plateau sur la bille, elle est normale au plateau car la bille se déplace sans frottement et donc $\vec{R} = R\vec{k}$ **0.5p**;
   - La force qu'exerce le fil sur la bille, $\vec{T} = -T\vec{e}_r$ **0.5p**.

1.0p

3. L'expression du moment cinétique de M par rapport à O dans $\mathcal{R}$ est donnée par

$$\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R})$$
$$= r\vec{e}_r \wedge m\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right) = mr^2\dot{\theta}\vec{k} = m\,(r_0 - V_r t)^2\,\dot{\theta}\vec{k}. \quad \textbf{0.5p}$$

A l'instant $t = 0$, $\vec{\sigma}_0 = \overrightarrow{OM}_0 \wedge m\vec{V}_0 = mr_0V_0\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = mr_0V_0\vec{k}$ **0.5p**.

$\boxed{5p}$

4. Le PFD :

$$\begin{aligned}
m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \vec{P}+\vec{T}+\vec{R}\\
\Longrightarrow m\left[-r\dot{\theta}^2\vec{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta\right] &= -mg\vec{k}-T\vec{e}_r+R\vec{k}\\
m\left\{-\left(r_0-V_rt\right)\dot{\theta}^2\vec{e}_r+\left[\left(r_0-V_rt\right)\ddot{\theta}-2V_r\dot{\theta}\right]\vec{e}_\theta\right\} &= -mg\vec{k}-T\vec{e}_r+R\vec{k} \quad \mathbf{0.5p}
\end{aligned}$$

a- En projetant le PFD sur $\vec{k}$ nous obtenons $-mg+R=0\Longrightarrow R=mg$ **0.5p**.

b- Appliquons le théorème du moment cinétique

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= \mathcal{M}_o(\vec{T}+\vec{P}+\vec{R})=\mathcal{M}_o(\vec{T})=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{T}=-rT\vec{e}_r\wedge\vec{e}_r=\vec{0}\\
\Longrightarrow \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) &= \overrightarrow{Constante}. \quad \mathbf{1.0p}
\end{aligned}$$

La constante des aires est $C=\sigma_0/m=r_0V_0=r^2\dot{\theta}$ **0.5p**.

c- La projection du PFD sur $\vec{e}_\theta$ donne

$$\begin{aligned}
r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta} &= 0\\
r^2\ddot{\theta}+2r\dot{r}\dot{\theta} &= 0\\
\Longrightarrow r^2\frac{d\dot{\theta}}{dt}+\frac{dr^2}{dt^2}\dot{\theta} &= 0\\
\Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) &= 0\Longrightarrow r^2\dot{\theta}=\text{constante} \quad \mathbf{0.5p}
\end{aligned}$$

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
r^2\dot{\theta} &= C=\frac{\sigma_0}{m}=r_0V_0\\
\Longrightarrow \dot{\theta} &= \frac{r_0V_0}{\left(r_0-V_rt\right)^2} \quad \mathbf{0.5p}\\
\Longrightarrow \theta &= +\frac{r_0V_0}{V_r\left(r_0-V_rt\right)}+K
\end{aligned}$$

or $\theta(t=0)=0=+\frac{V_0}{V_r}+K\Longrightarrow K=-\frac{V_0}{V_r}$, ce qui donne

$$\theta(t) = \frac{V_0}{V_r}\left(\frac{r_0}{\left(r_0-V_rt\right)}-1\right)=\frac{V_0t}{r_0-V_rt}. \quad \mathbf{0.5p}$$

d- La projection du PFD sur $\vec{e}_r$ donne

$$\begin{aligned}
-mr\dot{\theta}^2=-T\Longrightarrow T &= mr\left(\frac{r_0V_0}{r^2}\right)^2\\
&= m\frac{r_0^2V_0^2}{r^3} \quad \mathbf{1.0p}
\end{aligned}$$

2.5p

5. L'expression de l'énergie cinétique est donnée par

$$\begin{aligned} E_C(M/\mathcal{R}) &= \frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(V_r^2 + \frac{r_0^2V_0^2}{r^2}\right). \quad \textbf{1.0p} \end{aligned}$$

Quant à l'énergie potentielle, la seule force qui travaille est $\vec{T}$. Sachant que $d\overrightarrow{OM} = rd\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta$, le travail élémentaire de $\vec{T}$ est

$$\begin{aligned} \delta W(\vec{T}) &= \vec{T}\cdot d\overrightarrow{OM} \\ &= -m\frac{r_0^2V_0^2}{r^3}\vec{e}_r\cdot(dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta) \\ &= -m\frac{r_0^2V_0^2}{r^3}dr \quad \textbf{0.25p} \end{aligned}$$

Or $dE_p = -\delta W$, ce qui implique

$$dE_p = m\frac{r_0^2V_0^2}{r^3}dr \Longrightarrow E_p = -m\frac{r_0^2V_0^2}{2r^2} + K$$

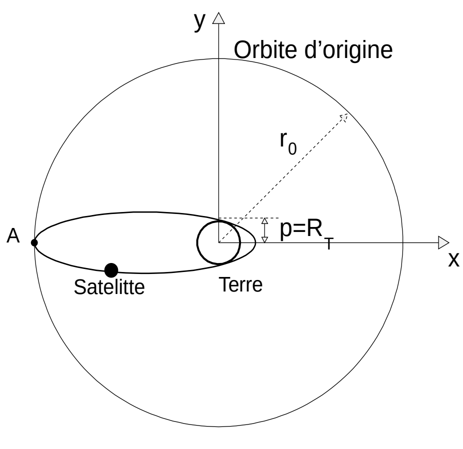
et comme $E_p(r\to+\infty)\to 0 \Longrightarrow K = 0 \Longrightarrow E_p = -m\frac{r_0^2V_0^2}{2r^2}$ **0.5p**.
L'énergie mécanique est ainsi égale à

$$\begin{aligned} E_m &= E_c + E_p \\ &= \frac{1}{2}m\left(V_r^2 + \frac{r_0^2V_0^2}{r^2}\right) - m\frac{r_0^2V_0^2}{2r^2} = \frac{1}{2}mV_r^2 \quad \textbf{0.5p} \end{aligned}$$

On note que E_m est constante et donc conservée. **0.25p**

Exercice 3 : Retombée d'un satellite sur Terre (4p+Bonus 1p)

Considérons un satellite S de masse m touché par une panne et on souhaite le faire retomber sur la Terre dans une zone non habitée. L'orbite du satellite est circulaire et de rayon r_0. Pour cela, à partir d'un point A de son orbite d'origine, on réduit sa vitesse brutalement et l'on souhaite qu'il retombe sur la Terre après avoir tourné d'un angle de 90° dans sa nouvelle orbite elliptique, voir figure ci-contre. On note par R_T, M_T respectivement le rayon et la masse de la Terre. G est la constante gravitationnelle.
Le point A sur l'orbite d'origine est l'apogée de la nouvelle orbite elliptique. On note par (ρ,φ) les coordonnées polaires du satelitte dans son orbite elliptique. Le paramètre p de l'orbite elliptique est $p = R_T$.



$\boxed{1.0\text{p}}$

1. Les coordonnées polaires du point A sont

$$\varphi_A \quad = \quad \pi \quad \mathbf{0.5p} \text{ et } \rho_A = \rho(\varphi = \pi) = \frac{p}{1 + e\cos\pi} = \frac{p}{1-e}. \quad \mathbf{0.5p}$$

$\boxed{1.5\text{p}}$

2. A appartient à l'orbite d'origine donc $\|\overrightarrow{OA}\| = r_0$ **0.5p** et nous avons aussi $\|\overrightarrow{OA}\| = \rho_A$, ce qui donne en utilisant l'expression de ρ_A établie à la question précédente

$$\rho_A \quad = \quad r_0 = \frac{p}{1-e} = \frac{R_T}{1-e} \Longrightarrow e = 1 - \frac{R_T}{r_0}. \quad \mathbf{1.0p}$$

$\boxed{1.0\text{p}}$

3. En utilisant l'expression de l'énergie mécanique en fonction de e et en substituant e par son expression en fonction de r_0 et R_T, nous obtenons

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{GM_T m}{2p}\left(e^2 - 1\right) \\ &= \frac{GM_T m}{2R_T}\left(\left[1 - \frac{R_T}{r_0}\right]^2 - 1\right) \\ &= \frac{GM_T m}{2R_T}\left(\left[\frac{R_T}{r_0}\right]^2 - 2\frac{R_T}{r_0}\right) \\ &= -\frac{GM_T m}{2}\left(\frac{2r_0 - R_T}{r_0^2}\right) \quad \mathbf{1.0p} \end{aligned}$$

qui est la relation recherchée.

$\boxed{1.5\text{p}}$

4. L'énergie mécanique en A est

$$E_m(A) \quad = \quad \frac{1}{2}mV_A^2 - \frac{GM_T m}{r_0}. \quad \mathbf{0.5p}$$

L'énergie mécanique se conserve ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mV_A^2 - \frac{GM_T m}{r_0} &= -\frac{GM_T m}{2}\left(\frac{2r_0 - R_T}{r_0^2}\right) \\ \Longrightarrow \frac{1}{2}mV_A^2 &= -\frac{GM_T m}{2}\left(\frac{2r_0 - R_T}{r_0^2}\right) + \frac{GM_T m}{r_0} \\ \Longrightarrow \frac{1}{2}mV_A^2 &= \frac{GM_T m}{2}\frac{R_T}{r_0^2} \\ \Longrightarrow V_A &= \frac{\sqrt{GM_T R_T}}{r_0} \quad \mathbf{1.0p} \end{aligned}$$