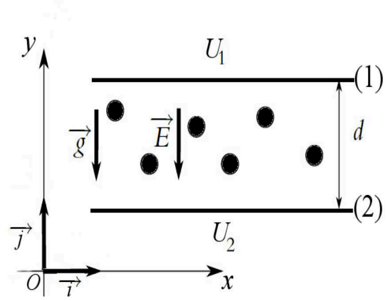
Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2017/2018

Contrôle de Mécanique du Point Matériel
Filière SMIA/S1 - Temps imparti : 2 heures

Corrigé : Mouvement de gouttelettes chargées (5pts)

Considérons des gouttelettes d'huile fines sphériques, de rayon R et de masse volumique ρ_h, dispersées dans l'espace séparant deux plaques horizontales, notées (1) et (2), d'un condensateur plan, distantes de d, voir figure ci-contre. Les gouttelettes sont chargées négativement, $-q$. En l'absence du champ électrique $\vec{E}$, une gouttelette est soumise à l'action de son poids, $\vec{P} = \frac{4\pi}{3}R^3\rho_h\vec{g}$, à la poussée d'Archimède de l'air ambiant, $\vec{F_a} = -\frac{4\pi}{3}R^3\rho_{air}\vec{g}$, ρ_{air} étant sa masse volumique et à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -k\vec{v}$, avec $k = \alpha R$. $\vec{v}$ est la vitesse de la gouttelette dans $\mathcal{R}(O, xyz)$. On pose $\Delta U = U_1 - U_2$.



On donne $\alpha = 3.4\,10^{-4}$ **en S.I.**[1]**,** $g = 9.81$ **m.s**$^{-2}$**,** $\rho_{air} = 1.3$ **kg.m**$^{-3}$**,** $\rho_h = 1.3\,10^3$ **kg.m**$^{-3}$**, et** $d = 2\,10^{-2}$**m.**

1. On considère le cas où $\Delta U = 0$ et donc $\vec{E} = \vec{0}$.

   a. Comme les durées mises en jeu dans cette expérience peuvent être négligées devant la période de rotation de la Terre, alors le mouvement de $\mathcal{R}$peut être considéré comme rectiligne uniforme et donc galiléen **0.25pt**.

   b. En l'absence du champ électrique, les forces appliquées à la gouttelette sont le poids, $\vec{P}$, la poussée d'Archimède $\vec{F_a}$ et la force de frottement visqueux $\vec{f}$. Le PFD peut s'écrire comme suit

$$
\begin{aligned}
m\vec{\gamma} &= \vec{P} + \vec{F_a} + \vec{f} \\
\Longrightarrow \frac{4\pi}{3}R^3\rho_h\frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{4\pi}{3}R^3\rho_h\vec{g} - \frac{4\pi}{3}R^3\rho_a\vec{g} - k\vec{v} \\
\Longrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{3k}{4\pi R^3\rho_h}\vec{v} &= \frac{\rho_h - \rho_a}{\rho_h}\vec{g} \\
\Longrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{3\alpha}{4\pi R^2\rho_h}\vec{v} &= \frac{\rho_h - \rho_a}{\rho_h}\vec{g} \\
\Longrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\frac{4\pi R^2\rho_h}{3\alpha}}\vec{v} &= \frac{4\pi R^2\rho_h}{3\alpha} \times \frac{\frac{\rho_h - \rho_a}{\rho_h}\vec{g}}{\frac{4\pi R^2\rho_h}{3\alpha}} \\
\Longrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\frac{4\pi R^2\rho_h}{3\alpha}}\vec{v} &= \frac{4\pi R^2}{3\alpha} \times \frac{(\rho_h - \rho_a)\vec{g}}{\frac{4\pi R^2\rho_h}{3\alpha}} \\
\Longrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} &= \frac{\vec{v}_l}{\tau} \quad \textbf{0.5pt}
\end{aligned}
$$

   avec

$$
\begin{aligned}
\tau &= \frac{4\pi R^2\rho_h}{3\alpha} \quad \textbf{0.25pt} \\
\vec{v}_l &= \frac{4\pi R^2}{3\alpha} \times (\rho_h - \rho_a)\vec{g}. \quad \textbf{0.25pt}
\end{aligned}
$$

   c. La solution de l'équation différentielle vérifiée par $\vec{v}$ est la somme de la solution sans second membre

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{v}_{sm}}{dt} + \frac{\vec{v}_{sm}}{\tau} &= 0 \\
\Longrightarrow \vec{v}_{sm} &= c\vec{s}t\, e^{-t/\tau} \quad \textbf{0.25pt}
\end{aligned}
$$

1. S.I. : Système d'unités Internationales.

et une solution particulière $\vec{v}_p = \vec{v}_l$ **0.25pt**. Ce qui donne

$$\vec{v} = \vec{v}_{sm} + \vec{v}_p = \vec{cst}\, e^{-t/\tau} + \vec{v}_l \quad \textbf{0.25pt}$$

comme $\vec{v}(t=0) = \vec{0}$ alors $\vec{cst} + \vec{v}_l = 0 \Longrightarrow \vec{cst} = -\vec{v}_l$ et $\vec{v} = \vec{v}_l \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ **0.25pt**.

Comme $\lim_{t\to+\infty} e^{-t/\tau} = 0$ alors $\lim_{t\to+\infty} \vec{v} = \vec{v}_l$ **0.25pt**.

Application numérique : Nous avons

$$v_l = \frac{4\pi R^2}{3\alpha} \times (\rho_h - \rho_a)g \Longrightarrow R = \sqrt{\frac{3 v_l \alpha}{4\pi(\rho_h - \rho_a)g}} = 1.13\,10^{-6}\mathbf{m}. \quad \textbf{0.5pt}$$

2. On applique ΔU de manière que la particule soit immobilisée.

a. $\vec{E}$ est uniforme. Calculons son travail entre les deux plaques (1) et (2) :

$$\begin{aligned} \delta W(\vec{E}) &= \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} \quad \textbf{0.25pt} \\ \Longrightarrow dU &= -\vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} \\ \Longrightarrow \int_{(1)}^{(2)} dU &= -E\int_{(1)}^{(2)} dl = -Ed = -\Delta U \Longrightarrow E = \Delta U/d. \quad \textbf{0.25pt} \end{aligned}$$

b. Comme la gouttelette est en équilibre alors $\vec{v} = \vec{0}$ et $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$. La force de frottement est donc nulle. D'où le bilan des forces est $\vec{P}$, $\vec{F}_a$ et la force électrique $-q\vec{E}$. Le PFD est donc

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{F}_a - q\vec{E} &= \vec{0} \quad \textbf{0.5pt} \\ \Longrightarrow -\frac{4\pi R^3}{3}\rho_h g\vec{j} + \frac{4\pi R^3}{3}\rho_a g\vec{j} - q\frac{\Delta U}{d}\vec{j} &= \vec{0} \\ \Longrightarrow \frac{4\pi R^3}{3}(\rho_h - \rho_a)g - q\frac{\Delta U}{d} &= 0. \end{aligned}$$

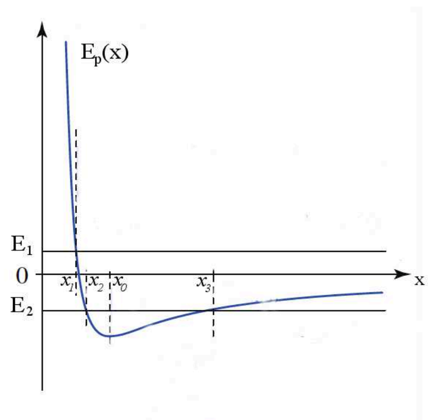
Ce qui nous permet de déduire la valeur de la charge électrique comme suit

$$q = \frac{4d\pi R^3(\rho_h - \rho_a)g}{3\Delta U}. \quad \textbf{0.5pt}$$

Application numérique : $\Delta U = 3200$V. Nous avons alors

$$q = 4.18\,10^{-19}C. \quad \textbf{0.5pt}$$

Corrigé : Système conservatif (4pints)



Considérer toutes les réponses justes autre que celles proposées.

1. **E$_m$=E$_1$:** **1.0pt**
   Nous savons que $E_m = E_p(x) + E_c(x) = Cst$ puisque le champ de force est conservatif. De même $E_c(x) \geq 0 \forall x$, ce qui implique que $E_m \geq E_p(x)$. A partir de cette dernière relation, on peut déterminer le domaine de valeurs permises pour x et en déduire la nature du mouvement.

$$\begin{aligned} E_m &= E_1 > 0 \\ \Longrightarrow x &\in \in [x_1, +\infty[\end{aligned}$$

   ainsi M peut prendre les positions $x \geq x_1$ et donc M peut s'éloigner à l'infini.

   E$_m$=E$_2 < 0$: **1.0pt**

$$E_m = E_2 \Longrightarrow x \in [x_2, x_3].$$

   Les seules valeurs permises pour x sont bornées et donc le mouvement est un mouvement d'oscillations dans cette intervalle.

   Comme dans le premier cas, M peut évoluer à l'infini et s'éloigner donc de x_1, l'état de M dans ce cas est un état libre.
   Dans le deuxième cas, M évolue entre les positions x_2 et x_3 et donc M ne peut pas évoluer en dehors de cette intervalle, alors l'état de M est lié.

2. Aux voisinages de x_0, nous avons $E_p(x) \geq E_p(x_0) \forall x$, alors x_0 est un minimum et donc $\left.\frac{dE_p(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = 0$.
   En faisant un développement limité aux voisinages de x_0, nous obtenons au second ordre l'expression

$$\begin{aligned} E_p(x) &= E_p(x_0) + \left.\frac{dE_p(x)}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E_p(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2 + \mathcal{O}[(x-x_0)^3] \\ &\simeq E_0 + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 \end{aligned}$$ **0.25pt**

   On en déduit que la force qui est appliquée, si l'on note $\vec{i}$ le vecteur unitaire de l'axe (Ox) est

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}(E_p(x)) = -\frac{dE_p(x)}{dx}\vec{i} = -k(x-x_0)\vec{i}.$$ **0.25pt**

   qui n'est d'autre qu'une force élastique. L'application du PFD donne

$$m\ddot{x} = -k(x-x_0) \Longrightarrow (x \ddot{-} x_0) + \frac{k}{m}(x-x_0) = 0$$ **0.5pt**

   dont la solution est $x - x_0 = A\cos(\omega t - \varphi)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Donc le mouvement de M au voisinage de $x = x_0$ est un mouvement sinusoidal de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ **0.5pt.**

Corrigé : Sortie spatiale (11 points)

Considérons une station spatiale S de masse M en orbite autour de la Terre. Soit $\mathcal{R}(O, x_0y_0z_0)$ le référentiel géocentrique. La station est considérée comme un point matériel et repérée dans $\mathcal{R}$ par $\overrightarrow{OS}$. Elle n'est soumise qu'à l'action de la force gravitationnelle de la Terre $\vec{F} = GM_TM\frac{\overrightarrow{OS}}{\|\overrightarrow{OS}\|^3}$, M_T et R_T respectivement la masse et le rayon de la Terre, G est la constante gravitationnelle.

1. Etant donnée que la période de rotation de l'orbite est négligeable devant la période de rotation de la Terre autour du soleil, alors la trajectoire de $\mathcal{R}$ peut être considérée comme rectiligne uniforme et donc $\mathcal{R}$ peut être considéré galiléen. **0.25pt**
2. Le théorème du moment cinétiqte nous donne

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}).$$

Comme $\vec{F}//\overrightarrow{OS} \Longrightarrow \overrightarrow{OS} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ donc $\left.\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$ et donc $\vec{\sigma}_O$ est une intégrale première **0.25pt**.
Comme $\vec{\sigma}_O$ est constant, et $\overrightarrow{OM}$ est constamment perpendiculaire à $\vec{\sigma}_O$ alors $\overrightarrow{OM}$ appartient constamment au plan perpendiculaire à $\vec{\sigma}_O$. Ce qui justifie bien que le mouvement est plan. **0.25pt**
3. Nous avons

$$\overrightarrow{OS} = \rho\vec{e}_\rho \quad \Longrightarrow \quad \vec{V}(S/\mathcal{R}) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad \textbf{0.5pt}$$

et

$$\vec{\sigma}_O(S/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OS} \wedge M\vec{V}(S/\mathcal{R}) = M\rho^2\dot{\varphi}\vec{k}. \quad \textbf{0.5pt}$$

Ce qui implique que $C = \rho^2\dot{\varphi}$
4. L'énergie cinétique est égale à

$$E_c = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}M\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) = \frac{1}{2}M\left(\dot{\rho}^2 + \frac{C^2}{\rho^2}\right). \quad \textbf{0.5pt}$$

L'énergie potentielle s'obtient comme suit

$$\begin{aligned} dE_p &= -\vec{F}\cdot d\overrightarrow{OS} \\ &= GM_TM\frac{\vec{e}_\rho}{\rho^2}\cdot(d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi) \\ &= GM_TM\frac{d\rho}{\rho^2} \Longrightarrow E_p = -GM_TM\frac{1}{\rho} + Cst(=0). \quad \textbf{0.5pt} \end{aligned}$$

Ce qui donne pour l'énergie mécanique

$$\begin{aligned} E_m &= E_c + E_p \\ &= \frac{1}{2}M\left(\dot{\rho}^2 + \frac{C^2}{\rho^2}\right) - GM_TM\frac{1}{\rho} \quad \textbf{0.25pt} \end{aligned}$$

5. L'énergie mécanique est une intégrale première étant donnée que la seule force mise en jeu est conservative et donc

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= M\left(\ddot{\rho} - \frac{C^2}{\rho^3} + GM_TM\frac{1}{\rho^2}\right)\dot{\rho} = 0 \\ \Longrightarrow \ddot{\rho} - \frac{C^2}{\rho^3} + GM_TM\frac{1}{\rho^2} &= 0 \text{ puisque } \dot{\rho} \neq 0. \quad \textbf{0.5pt} \end{aligned}$$

Pour la résolution de l'équation voir le cours $\Longrightarrow$ la trajectoire est une conique d'équation polaire

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)} \quad \textbf{0.5pt}$$

où $p = C^2/GM_T$.
Si $e = 0 \Longrightarrow$ la trajectoire est un cercle
Si $0 < e < 1 \Longrightarrow$ la trajectoire est une ellipse
Si $e = 1 \Longrightarrow$ la trajectoire est une parabole

Si $e > 1 \Longrightarrow$ la trajectoire est une hyperbole **0.5pt**

6. Voir le cours. **1.0pt**.

On considère dans la suite que l'orbite de la station est circulaire de rayon R.

7. Puisque le mouvement est circulaire alors $\rho = R$ et l'expression de la vitesse devient

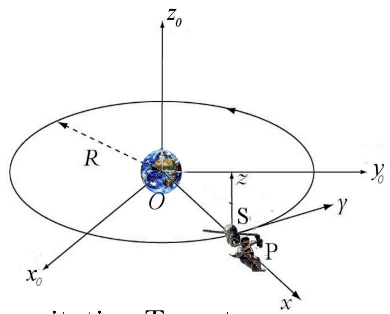
$$\vec{V}(S/\mathcal{R}) = R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = R\omega\vec{e}_\varphi.$$ **0.25pt**

Nous avons $C = \rho^2\dot{\varphi} = R^2\omega = Cst$ et donc ω constante et donc $V(S/\mathcal{R}) = Cst$ ce qui montre bien que le mouvement est uniforme. **0.25pt**
Nous avons également dans ce cas

$$\left.\begin{array}{rcl} p & = & R \\ p & = & \frac{R^4\omega^2}{GM_T} \end{array}\right\} \Longrightarrow R^3\omega^2 = GM_T$$

$$\Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM_T}{R^3}}.$$ **0.5pt**

Un cosmonaute noté P de masse m effectue une sortie de la station et l'on se propose d'étudier son mouvement par rapport au référentiel lié à la station que l'on notera par $\mathcal{R}_1(S, xyz)$ dont le vecteur rotation est donné par $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \omega\vec{k}$, voir figure ci-contre. Le cosmonaute est relié par un cable au point S. Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base cartésienne liée à $\mathcal{R}_1$ telle que la position du cosmonaute soit repérée par $\overrightarrow{SP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, sachant que $\overrightarrow{OS} = R\vec{i}$.



On considère que le cosmonaute est soumis à la seule action de la gravitation Terrestre,

$$\vec{F} = -GM_Tm\frac{\overrightarrow{OP}}{\|\overrightarrow{OP}\|^3} = -GM_Tm\frac{(R+x)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{[(R+x)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

8. L'accélération d'entrainement est donnée par

$$\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}(S/\mathcal{R}) + \omega\vec{k} \wedge \left(\omega\vec{k} \wedge \overrightarrow{SP}\right).$$

Or

$$\vec{\gamma}(S/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\vec{V}(S/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = -R\omega^2\vec{e}_\rho = -R\omega^2\vec{i}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_e &= -R\omega^2\vec{i} + \omega\vec{k} \wedge \left(\omega\vec{k} \wedge \left[x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right]\right) \\ &= -R\omega^2\vec{i} + \omega^2\vec{k} \wedge \left(x\vec{j} - y\vec{i}\right) \\ &= -R\omega^2\vec{i} - \omega^2\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) \\ &= -\omega^2\left[(R+x)\vec{i} + y\vec{j}\right]. \end{aligned}$$ **0.75pt**

L'accélération de Coriolis est donnée par

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_e &= 2\omega\vec{k}\wedge\left(\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}\right)\\ &= 2\omega\left(\dot{x}\vec{j}-\dot{y}\vec{i}\right). \quad \textbf{0.25pt}\end{aligned}$$

9. En utilisant le résultat de la question **7.**, l'expression de $\vec{F}$ devient

$$\vec{F} = -R^3\omega^2 m\frac{(R+x)\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{[(R+x)^2+y^2+z^2]^{3/2}}.$$

Le PFD dans $\mathcal{R}_1$, qui n'est pas galiléen, nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}m\vec{\gamma}(P/\mathcal{R}_1) &= -m\vec{\gamma}_e-m\vec{\gamma}_c+\vec{F}\\ \Longrightarrow m\left(\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}\right) &= m\omega^2\left[(R+x)\vec{i}+y\vec{j}\right]-2m\omega\left(\dot{x}\vec{j}-\dot{y}\vec{i}\right)-R^3\omega^2 m\frac{(R+x)\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{[(R+x)^2+y^2+z^2]^{3/2}}.\end{aligned}$$

Par projection sur $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \omega^2(R+x)+2\omega\dot{y}-R^3\omega^2\frac{(R+x)}{[(R+x)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\\ \ddot{y} &= \omega^2 y-2\omega\dot{x}-R^3\omega^2\frac{y}{[(R+x)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\\ \ddot{z} &= -R^3\omega^2\frac{z}{[(R+x)^2+y^2+z^2]^{3/2}} \quad \textbf{0.5pt}\end{aligned}$$

10. Le développement limité à l'ordre 1 donne

$$\begin{aligned}\ddot{x} &\simeq \omega^2(R+x)+2\omega\dot{y}-R^4\omega^2\left(1+\frac{x}{R}\right)\left[\frac{1}{R^3}\left(1-3\frac{x}{R}\right)\right]\\ &\simeq \omega^2(R+x)+2\omega\dot{y}-R\omega^2\left(1+\frac{x}{R}-3\frac{x}{R}\right)=2\omega\dot{y}+2\omega^2 x \quad \textbf{0.5pt}\\ \ddot{y} &\simeq \omega^2 y-2\omega\dot{x}-R^4\omega^2\frac{y}{R}\left[\frac{1}{R^3}\left(1-3\frac{x}{R}\right)\right]\\ &\simeq \omega^2 y-2\omega\dot{x}-\omega^2 y=-2\omega\dot{x} \quad \textbf{0.5pt}\\ \ddot{z} &\simeq -R^4\omega^2\frac{z}{R}\left[\frac{1}{R^3}\left(1-3\frac{x}{R}\right)\right]\\ &\simeq -\omega^2 z \quad \textbf{0.25pt}\end{aligned}$$

11. L'intégration de la deuxième équation donne

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -2\omega x+K_1 \Longrightarrow K_1=\dot{y}_0+2\omega x_0\\ \Longrightarrow \ddot{x} &= -4\omega^2 x+2\omega(\dot{y}_0+2\omega x_0)+3\omega^2 x\\ \Longrightarrow \ddot{x}+\omega^2 x &= 2\omega\dot{y}_0+4\omega x_0\end{aligned}$$

La solution générale x de cette dernière équation est la somme de la solution sans second membre x_{sm} et une solution particulière x_p avec

$$\ddot{x}_{sm}+\omega^2 x_{sm} = 0 \Longrightarrow x_{xm}=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

et $x_p=\frac{2}{\omega}(\dot{y}_0+2\omega x_0)$ et donc

$$x(t)=A\sin\omega t+B\cos\omega t+\frac{2}{\omega}(\dot{y}_0+2\omega x_0).$$

A et B sont déterminées à partir des consitions initiales

$$\begin{aligned} x_0 &= B + \frac{2}{\omega}(\dot{y}_0 + 2\omega_0 x_0) \Longrightarrow B = x_0 - \frac{2}{\omega}(\dot{y}_0 + 2\omega x_0) = -3x_0 - \frac{2\dot{y}_0}{\omega} \\ \dot{x}_0 &= \omega A \Longrightarrow A = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t + \left[-3x_0 - \frac{2\dot{y}_0}{\omega}\right]\cos\omega t + \frac{2}{\omega}(\dot{y}_0 + 2\omega x_0) \\ &= \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t - \left[3x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{\omega}\right]\cos\omega t + 4x + \frac{2}{\omega}\dot{y}_0 \\ &= \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t + \left[3x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{\omega}\right](1 - \cos\omega t) + x_0 \end{aligned}$$ **0.25pt**

Ce qui donne en remplaçant x dans $\dot{y}$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -2\dot{x}_0\sin\omega t - 2\omega\left[3x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{\omega}\right](1 - \cos\omega t) - 2\omega x_0 + \dot{y}_0 + 2\omega x_0 \\ \Longrightarrow y &= 2\frac{\dot{x}_0}{\omega}\cos\omega t - 2\left[3x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{\omega}\right](\omega t - \sin\omega t) + \dot{y}_0 t + K_3. \end{aligned}$$

K_3 est déterminée à partir de y_0 :

$$y_0 = 2\frac{\dot{x}_0}{\omega} + K_3 \Longrightarrow K_3 = y_0 - 2\frac{\dot{x}_0}{\omega}$$

ce qui implique finalement

$$\begin{aligned} y &= 2\frac{\dot{x}_0}{\omega}\cos\omega t - 2\left[3x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{\omega}\right](\omega t - \sin\omega t) + \dot{y}t + y_0 - 2\frac{\dot{x}_0}{\omega} \\ \Longrightarrow y &= -2\frac{\dot{x}_0}{\omega}(1 - \cos\omega t) - 2\left[3x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{\omega}\right](\omega t - \sin\omega t) + \dot{y}_0 t + y_0 \end{aligned}$$ **0.25pt**

Quant à z, nous avons

$$\begin{aligned} \ddot{z} + \omega^2 z &= 0 \\ \Longrightarrow z &= A\sin\omega t + B\cos\omega t \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} z_0 = B \Longrightarrow B = z_0 \\ \dot{z}_0 = A\omega \Longrightarrow A = \frac{\dot{z}_0}{\omega} \end{cases}$$

ce qui donne comme solution

$$z = \frac{\dot{z}_0}{\omega}\sin\omega t + z_0\cos\omega t.$$ **0.25pt**

12. Avec les conditions initiales $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$ et perd le contact avec la station sachant que $x_0 \neq 0$, $y_0 = z_0 = 0$, nous avons

$$\begin{cases} x(t) = 4x_0 - 3x_0\cos\omega t \\ y(t) = -6x_0(\omega t - \sin\omega t) + y_0 \\ z(t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{x(t)-4x_0}{3x_0} = \cos\omega t \\ \left(\frac{y(t)-y_0}{-6x_0} - \omega t\right) = \sin\omega t \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{x - 4x_0}{3x_0}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{6x_0} + \omega t\right)^2 = 1$$ **0.5pt**

On voit bien que le mouvement le long de Sx est sinusoidal alors que le long de Sy il y a superposition entre un mouvement sinusoidal et d'un terme lineaire avec le temps qui tend donc à éloigner le cosmonaute le long de Sy. En résumé, le cosmonaute reste sur le plan Sxy, est animé d'un mouvement sinusoidal le long de Sx mais il s'éloigne le long de Sy. **0.5pt**