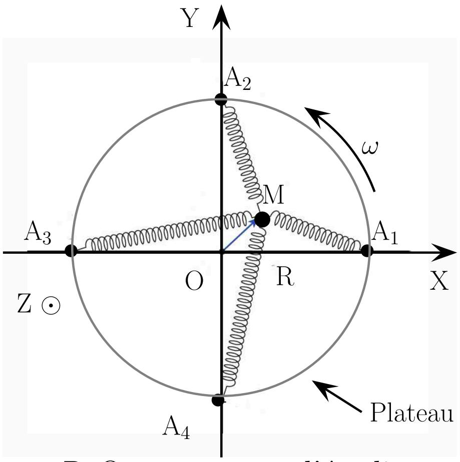
Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2016/2017
Jeudi 12 janvier 2017

Corrigé et barème du contrôle de Mécanique du Point Matériel
Filière SMIA
Temps imparti 2H00

Corrigé : Point matériel sur un plateau tournant (9 points)

On considère **un plateau horizontal** de forme circulaire, de centre O et de rayon R, en rotation circulaire uniforme de vitesse angulaire ω, voir figure ci-contre. Soit $\mathcal{R}$(OXYZ) le repère lié au plateau tel que le plan (OXY) est horizontal et $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sa base cartésienne. On considère un repère terrestre $\mathcal{R}_0(\mathrm{OX_0Y_0Z_0})$ considéré galiléen dont la base cartésienne est $(\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0=\vec{k})$. $\mathcal{R}$ est en rotation par rapport à $\mathcal{R}_0$ avec $\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)=\omega\vec{k}$. Un point matériel M de masse m, mobile sans frottement sur le plateau, est attaché aux extrémités de 4 ressorts identiques A_1M, A_2M, A_3M et A_4M dont les points d'attache sont situés sur la circonférence du plateau. Les ressorts sont de masse négligeable et de constante de raideur k.



Lorsque le point M est en O, les ressorts sont au repos et ont une longueur R. On se propose d'étudier le mouvement de M relativement au référentiel $\mathcal{R}(O,XYZ)$ lié au plateau. La position de M est repérée dans $\mathcal{R}$ par $\overline{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

1. La position de M est repérée par $\overline{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$, ce qui implique $\boxed{1.0\text{pt}}$

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}. \quad \textbf{0.5pt}$$

La vitesse d'entrainement $\vec{V}_e$ est donnée par, sachant que $O_1\equiv O$

$$\begin{aligned}\vec{V}_e &= \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)\wedge\overrightarrow{OM}\\ &= \omega\vec{k}\wedge\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\\ &= \omega\left(x\vec{j}-y\vec{i}\right). \quad \textbf{0.5pt}\end{aligned}$$

2. L'accélération relative est donnée par $\boxed{1.5\text{pt}}$

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}}\\ &= \ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}. \quad \textbf{0.5pt}\end{aligned}$$

L'accélération d'entrainement s'exprime comme suit, étant donné que $\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)$ est constant

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_e &= \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)\wedge\left(\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0)\wedge\overrightarrow{OM}\right)\\ &= \omega^2\vec{k}\wedge\left(\vec{k}\wedge[x\vec{i}+y\vec{j}]\right)\\ &= \omega^2\vec{k}\wedge\left(x\vec{j}-y\vec{i}\right)\\ &= -\omega^2\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right) = -\omega^2\overrightarrow{OM} \quad \textbf{0.5pt}\end{aligned}$$

L'accélération de Coriolis est donnée par

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_c &= 2\vec{\Omega}\wedge\vec{V}_r \\ &= 2\omega\vec{k}\wedge\left(\dot{x}\vec{j}-\dot{y}\vec{i}\right) \\ &= -2\omega\left(\dot{y}\vec{i}-\dot{x}\vec{j}\right) \quad \textbf{0.5pt}\end{aligned}$$

3. Pour établir l'expression de la résultante des forces de rappel exercées par les quatre ressorts sur M, nous allons d'abord calculer l'énergie potentielle totale des quatre ressorts. Soitent $(x_{A_i}, y_{A_i}, 0)$ les cordonnées du point d'attache A_i, du ressort (A_iM), $i = 1, \cdots, 4$. Notons que $x_{A_i}^2 + y_{A_i}^2 = R^2$. L'énergie potentielle du $i^{\text{ème}}$ ressort (A_iM) est donnée par $E_{p_i}(x,y) = \frac{1}{2}k\left(\|\overrightarrow{A_iM}\| - R\right)^2$ $\boxed{3.0\text{pt}}$

a. Nous avons $\overrightarrow{A_iM} = (x - x_{A_i})\vec{i} + (y - y_{A_i})\vec{j} \Longrightarrow \|\overrightarrow{A_iM}\| = \sqrt{(x - x_{A_i}) + (y - y_{A_i})^2}$ ce qui donne

$$\begin{aligned}E_{p_i}(x,y) &= \frac{1}{2}k\left(\sqrt{(x-x_{A_i}) + (y-y_{A_i})^2} - R\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2 - 2x_{A_i}x + x_{A_i}^2 + y^2 - 2y_{A_i}y + y_{A_i}^2} - R\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}kR^2\left(\sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{R^2} - 2\frac{x_{A_i}x + y_{A_i}y}{R^2}} - 1\right)^2. \quad \textbf{0.5pt}\end{aligned}$$

b. Le mouvement de M se fait aux voisinages de O alors $E_{p_i}(x,y)$ ne contient que les termes en x^2, y^2 et xy. Il suffit alors que l'argument de la racine carrée ne contienne que x et y car nous avons une puissance deux de ce qui est à l'intérieur des parenthèses, d'où

$$\begin{aligned}E_{p_i}(x,y) &\simeq \frac{1}{2}kR^2\left(\sqrt{1 - 2\frac{x_{A_i}x + y_{A_i}y}{R^2}} - 1\right)^2 \\ &\simeq \frac{1}{2}kR^2\left(1 - \frac{x_{A_i}x + y_{A_i}y}{R^2} - 1\right)^2 \\ &= \frac{k}{2R^2}\left(x_{A_i}x + y_{A_i}y\right)^2. \quad \textbf{0.5pt}\end{aligned}$$

c. Les coordonnées des points d'attache sont

$$A_1(R,0), \quad A_2(0,R), \quad A_3(-R,0), \quad A_4(0,-R)$$

ce qui donne

$$\left.\begin{aligned}E_{p_1} &= \tfrac{1}{2}kx^2 \quad \textbf{0.25pt} \\ E_{p_2} &= \tfrac{1}{2}ky^2 \quad \textbf{0.25pt} \\ E_{p_3} &= \tfrac{1}{2}kx^2 \quad \textbf{0.25pt} \\ E_{p_4} &= \tfrac{1}{2}ky^2 \quad \textbf{0.25pt}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow E_{p_t} = \sum_{i=1}^{4} E_{p_i} = k\left(x^2 + y^2\right). \quad \textbf{0.5pt}$$

d. L'expression de la résultante des forces de rappel appliquées à M est alors égale à

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\overrightarrow{\mathbf{grad}}(E_{p_t}) \\ &= -2k\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right). \quad \textbf{0.5pt}\end{aligned}$$

4. Les forces appliquées à M sont la force résultante de rappel $\vec{F} = -2k\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right)$, le poids $\boxed{1.5}$ $\vec{P} = -mg\vec{k}$ et $\vec{R} = R_n\vec{k}$, puisqu'il n'y a pas de frottement. Comme $\mathcal{R}$ n'est pas galiléen, alors il faut tenir compte des forces d'inertie : la force d'inertie d'entrainement $\vec{F}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e = m\omega^2\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right)$ et la force d'inertie de Coriolis, $\vec{F}_{ic} = -m\vec{\gamma}_c = 2m\omega\left(\dot{y}\vec{i} - \dot{x}\vec{j}\right)$. Le PFD donne alors

$$\begin{aligned}
m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \vec{F} + \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} \\
\Longrightarrow m\left(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}\right) &= -2k\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) - mg\vec{k} + R_n\vec{k} + m\omega^2\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) + 2m\omega\left(\dot{y}\vec{i} - \dot{x}\vec{j}\right) \\
&= \left[(-2k + m\omega^2)x + 2m\omega\dot{y}\right]\vec{i} + \left[(-2k + m\omega^2)y - 2m\omega\dot{x}\right]\vec{j} + \left[R_n - mg\right]\vec{k} \quad \textbf{0.5pt}
\end{aligned}$$

en projetant respectivement sur Ox et sur Oy et en divisant par m nous obtenons

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x} + \left(\tfrac{2k}{m} - \omega^2\right)x - 2\omega\dot{y} &= 0 \\
\ddot{y} + \left(\tfrac{2k}{m} - \omega^2\right)y + 2\omega\dot{x} &= 0
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned}
\ddot{x} + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)x - 2\omega\dot{y} &= 0 \quad \textbf{0.5pt} \\
\ddot{y} + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)y + 2\omega\dot{x} &= 0 \quad \textbf{0.5pt}
\end{aligned}$$

d'où les équations recherchées.

5. On pose $z = x + iy \Longrightarrow \dot{z} = \dot{x} + i\dot{y}$ et $\ddot{z} = \ddot{x} + i\ddot{y}$, ce qui donne $\boxed{1.5\text{pt}}$

$$\begin{aligned}
(\ddot{x} + i\ddot{y}) + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)(x + iy) + 2\omega\left(\dot{-y} + i\dot{x}\right) &= 0 \\
\Longrightarrow (\ddot{x} + i\ddot{y}) + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)(x + iy)\, 2i\omega\left(+i\dot{y} + \dot{x}\right) &= 0 \\
\Longrightarrow \ddot{z} + 2i\omega\dot{z} + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)z &= 0 \quad \textbf{0.25pt}
\end{aligned}$$

qui est une équation différentielle de second ordre à coefficients constants et sans second membre. L'équation caractéristique est $r^2 + 2i\omega r + (\omega_0^2 - \omega^2) = 0$ dont le discriminant réduit $\Delta' = -\omega^2 - (\omega_0^2 - \omega^2) = -\omega_0^2 < 0$ et donc deux racines complexes $r_1 = -i\omega + i\omega_0 = i(\omega_0 - \omega)$ et $r_2 = -i\omega_0 - i\omega_0 = -i(\omega_0 + \omega)$ **0.25pt** et la solution est de la forme

$$z = Ae^{i(\omega_0 - \omega)t} + Be^{-i(\omega_0 + \omega)t}$$

et en tenant compte des conditions initiales $x(0) = x_0, y(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = 0 \Longrightarrow z(0) = x_0$ et $\dot{z}(0) = 0$ ce qui implique

$$\left\{\begin{aligned}
A + B &= x_0 \\
A(\omega_0 - \omega) - B\left(\omega_0 + \omega\right) &= 0
\end{aligned}\right.$$

en posant $B = x_0 - A$ et en substituant dans la deuxième équation nous obtenons

$$\begin{aligned}
A\left(\omega_0 - \omega + \omega_0 + \omega\right) - x_0\left(\omega_0 + \omega\right) &= 0 \\
\Longrightarrow A &= \frac{\omega_0 + \omega}{2\omega_0}x_0 \\
\Longrightarrow B &= \frac{\omega_0 - \omega}{2\omega_0}x_0.
\end{aligned}$$

et la solution en z est

$$z(t) = \frac{\omega_0 + \omega}{2\omega_0}x_0 e^{i(\omega_0 - \omega)t} + \frac{\omega_0 - \omega}{2\omega_0}x_0 e^{-i(\omega_0 + \omega)t} \quad \textbf{1.0pt}$$

6. Les équations horaires en coordonnées originelles sont alors, sachant que x est la partie réelle et y en est la partie imaginaire : $\boxed{0.5\text{pt}}$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\omega_0+\omega}{2\omega_0}x_0\cos\left[(\omega_0+\omega)t\right] + \frac{\omega_0-\omega}{2\omega_0}x_0\cos\left[(\omega_0-\omega)t\right] \quad \textbf{0.25pt} \\ y(t) &= \frac{\omega_0+\omega}{2\omega_0}x_0\sin\left[(\omega_0+\omega)t\right] - \frac{\omega_0-\omega}{2\omega_0}x_0\sin\left[(\omega_0-\omega)t\right] \quad \textbf{0.25pt} \end{aligned}$$

Corrigé Etude classique de l'atome d'hydrogène (11 points)

L'atome d'hydrogène est formé par un électron de charge $-e$ et de masse m en orbite autour d'un noyau de charge $+e$. Le noyau est considéré fixe et l'origine du référentiel d'étude $\mathcal{R}(O,xyz)$, supposé galiléen. La position de l'électron est repérée par M telle que $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ avec $r = \|\overrightarrow{OM}\|$. La force subie par l'électron de la part du noyau a pour expression $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}e_r$ où $k = e^2/4\pi\epsilon_0$, ϵ_0 étant la permitivité électrique. On néglige les effets de la gravitation.

1. Etant donnée que la trajectoire de l'électron est une orbite donc elle est contenue dans un plan et par conséquent la trajectoire est plane. On oriente $\mathcal{R}$ de manière que le plan du mouvement soit le plan (Oxy) **0.5pt**. $\boxed{0.5\text{pt}}$

2. Le travail élémentaire de $\vec{F}$, sachant que $\overrightarrow{dM} = dr\vec{e}_r + d\varphi\vec{e}_\varphi$, est alors $\boxed{1.0\text{pt}}$

$$\delta W(\vec{F}) \;=\; \vec{F}\cdot\overrightarrow{dM} = -\frac{kdr}{r^2} \Longrightarrow -dE_p = \frac{kdr}{r^2} \Longrightarrow E_p = -\frac{k}{r} + Cst.$$

Comme $E_p(\infty) = 0 \Longrightarrow Cst = 0 \Longrightarrow E_p = -\frac{k}{r}$. ce qui montre que $\vec{F}$ dérive du potentiel **1.0pt**.
Pour ceux qui ont montré que le rotationnel de $\vec{F}$ est nul avant de procéder au calcul de E_p, Pour que $\vec{F}$ dérive d'un potentiel il suffit que $\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$:

$$\overrightarrow{rot}(\vec{F}) = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} -\frac{k}{r^2} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. = \vec{0}.$$

Donner +0.5 point.

3. L'expression du moment cinétique demandée est donnée par $\boxed{1.25}$

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) &= \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) \\ &= mr\vec{e}_r \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) \\ &= mr^2\dot{\varphi}\vec{k}. \quad \textbf{0.5pt} \end{aligned}$$

Pour montrer que $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$ est constant, il suffit d'utiliser le théorème du moment cinétique **0.25pt**

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \\ &= \overrightarrow{OM}\wedge\vec{F} \\ &= r\vec{e}_r \wedge \frac{-k}{r^2}\vec{e}_r = \vec{0} \Longrightarrow \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{Cst}. \quad \textbf{0.25pt} \end{aligned}$$

On note $C = \|\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})\|/m$. Comme $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$ est constant, son module est constant et donc C est constant. **0.25pt**

4. Nous avons $\boxed{1.0\text{pt}}$

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) e_r + \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right) \vec{e}_\varphi. \quad \textbf{1.0pt}$$

5. Comme les effets de la gravitation sont nuls, le poids est négligeable. M est soumis alors à la seule force $\vec{F}$. $\mathcal{R}$ est galiléen. $\boxed{1.25\text{pt}}$
6. Le PFD donne

$$\begin{aligned} m\gamma(M/\mathcal{R}) &= \vec{F} \\ \Longrightarrow m\left[\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) e_r + \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right) \vec{e}_\varphi\right] &= -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = -\frac{k}{r^2} & \text{projection selon } \vec{e}_r \quad \textbf{0.5pt} \\ m\left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right) = 0 & \text{projection selon } \vec{e}_\varphi \quad \textbf{0.5pt}. \end{cases}$$

En reprenant l'équation orthoradiale, selon $\vec{e}_\varphi$, nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned} r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} &= 0 \\ \Longrightarrow r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} &= 0 \\ \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) &= 0 \\ \Longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\|\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})\|}{m} &= 0 \end{aligned}$$

qui exprime dont que le module de $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$ est constant **0.5pt**.

7. Dans la suite de l'exercice, on se place dans le cas où l'orbite de l'électron est circulaire de rayon R. En utilisant l'équation du mouvement radiale $\boxed{5.0\text{pt}}$

a.

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = -\frac{k}{r^2}$$

et comme l'orbite est circulaire alors $r = R \Longrightarrow \dot{r} = 0$ ce qui donne

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{k}{mR^3}. \quad \textbf{0.5pt}$$

Le module de la vitesse $v^2 = \|\vec{V}(M/\mathcal{R})\|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = R^2\dot{\varphi}^2$ ce qui donne

$$v^2 = R^2\dot{\varphi}^2 = \frac{k}{mR} \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{k}{mR}}. \quad \textbf{0.5pt}$$

b. Calculons le moment cinétique :

$$\|\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})\| = mR^2\dot{\varphi} = mRv = mR\sqrt{\frac{k}{mR}} = \sqrt{mkR} \quad \textbf{1.0pt}$$

c. L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique $E_c = 1/2mv^2$, et de l'énergie potentielle E_p. Alors l'énergie mécanique E est

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{R} = \frac{1}{2}m\frac{k}{mR} - \frac{k}{R} = -\frac{k}{2R}. \quad \textbf{1.0pt}$$

8. En 1913 Niels Bohr a fait l'hypothèse que L ne peut prendre que des valeurs discrètes $L_n = n\hbar$ où $n \in \mathbb{N}$ et $\hbar$ est la constante de Planck. Nous avons ainsi

$$\left.\begin{array}{rcl} L^2 & = & mkR \Longrightarrow L_n^2 = mkR_n \\ L_n^2 & = & n^2\hbar^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow R_n = \frac{\hbar^2}{mk} n^2 \Longrightarrow \mathcal{R}_B = \frac{\hbar^2}{mk}. \quad \textbf{0.5pt}$$

De même,

$$E = -\frac{k}{2R} \Longrightarrow E_n = -\frac{k}{2R_n} = -\frac{mk^2}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2} \Longrightarrow \mathcal{E}_B = \frac{mk^2}{2\hbar^2}. \quad \textbf{0.5pt}$$

Application numérique :

$$R_B = \frac{\hbar^2}{mk} = \frac{(1.055 \times 10^{-34})^2}{9.11 \times 10^{-31} \times 2.31 \times 10^{-28}} = 5.29 \times 10^{-11} \quad \textbf{0.5pt}$$

or $R_B = R_1 = \simeq 5.29 \times 10^{-11}\text{m} = \simeq 0.53\text{Å}$. De même

$$\mathcal{E}_{\mathcal{B}} = \frac{mk^2}{2\hbar^2} = \frac{9.11 \times 10^{-31} \times 2.31 \times 10^{-28}}{2 \times (1.055 \times 10^{-34})^2} = 2.19 \times 10^{-18}\text{J}. \quad \textbf{0.25pt}$$

Comme $E_1 = \mathcal{E}_b = 2.19 \times 10^{-18}$J. En électron-volts

$$E_1 = -\frac{2.19 \times 10^{-18}}{1.602 \times 10^{-19}} = -13.63 \text{ eV}. \quad \textbf{0.5pt}$$

Corrigé Bonus(2pt) : pour ceux qui ont terminé

Un automobiliste roule à une vitesse de $V = 70\text{kmh}^{-1}$ et il a freiné. A quelle distance d va-t-il s'arrêter ? $\boxed{2.0\text{pt}}$

L'automobiliste freine alors les forces appliquées à la voiture sont son poids $\vec{P} = M\vec{g}$ et la réaction du sol $\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N$ **0.25pt**. Comme La voiture glisse alors $\|\vec{R}_T\| = k_d\|\vec{R}_N\|$ **0.25pt**(loi de Coulomb). De même, $\vec{P}+\vec{R}_N = \vec{0}$ **0.25pt** étant donné qu'elles sont perpendiculaires à la direction du mouvement (qui porte l'accélération). La seule force qui travaille lors du freinage est $\vec{R}_T$. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique :

$$E_C^f - E_C^i = W_i^f(\vec{R}_T) = \int_i^f \vec{R}_T \cdot d\overrightarrow{OM}. \quad \textbf{0.25pt}$$

Comme $\vec{R}_T$ est constante alors

$$\int_i^f \vec{R}_T \cdot d\overrightarrow{OM} = -\|\vec{R}_T\| \int_i^f \|d\overrightarrow{OM}\| = -\|\vec{R}_T\|d. \quad \textbf{0.25pt}$$

Comme $E_C^f - E_C^i = \frac{1}{2}MV_f^2 - \frac{1}{2}mV_i^2 = -\frac{1}{2}mV_i^2$, nous avons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mV_i^2 &= d\|\vec{R}_T\| = dk_dMg \Longrightarrow d = \frac{V_i^2}{2k_dg} \quad \textbf{0.5pt} \\ &= \frac{\left(\frac{70\times10^3}{3600}\right)^2}{2 \times 0.6 \times 9.81} \simeq 32\textbf{m} \quad \textbf{0.25pt} \end{aligned}$$