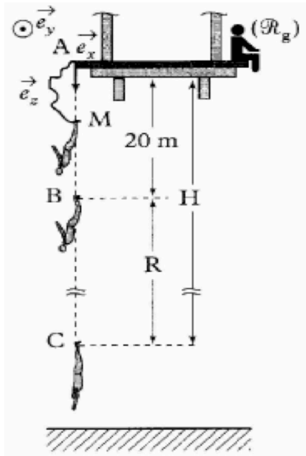
Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2014/2015
Lundi 02 février 2015

Contrôle de Mécanique du point matériel
Filière SMP/SMC
Temps imparti 2H00

Exercice 1 : Saut à la corde élastique

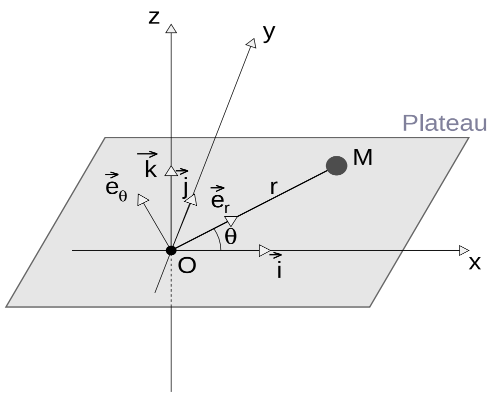
Un sportif de masse m, considéré comme un point matériel M, pratique le saut à l'aide d'une corde élastique du haut d'un pont, voir figure ci-contre. M tombe sans vitesse initiale du haut du pont en A avec une corde élastique, de longueur au repos $l_0 = 20$m, accrochée aux pieds.
Entre les points A et B, la corde élastique n'est pas encore tendue et M est en chute libre. A partir du point B, la corde élastique peut être considérée comme un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur $k = 120$N/m. On suppose que le référentiel $\mathcal{R}(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est galiléen. $\vec{e}_z$ est orienté vers le bas dans la direction de la chute de M. On néglige la résistance de l'air. La position du sportif est repérée par $\overrightarrow{AM} = z\vec{e}_z$. L'énergie potentielle de M au point A est nulle. On donne l'accélération de la pesanteur $g = 9.81\text{ms}^{-2}$.



1. Etablir les équations différentielles vérifiées par $z(t)$ en distinguant les cas où la corde élastique est tendue ou non. Donner les solutions générales sans calculer les contantes d'intégration.
2. Etablir l'expression de la vitesse atteinte par M au point B, $V_B = V_B(g, l_0)$. Donner son application numérique.
3. Déterminer l'expression de la hauteur totale H de la chute. Donner son application numérique dans le cas où $m = 70$Kg.

Exercice 2 : Mouvement à force centrale

Une bille M de masse m assimilée à un point matériel est attachée au point O par un fil tendu inextensible, voir figure ci-contre. M glisse sans frottement sur un plateau horizontal (Oxy) d'un repère $\mathcal{R}(Oxyz)$ supposé galiléen. La bille M reste tout au long de son mouvement sur le plan (Oxy). La position de M est repérée par les coordonées polaires r et θ, $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$. A l'instant initial $t = 0$, M est lancée à partir d'une position M_0 située à la distance r_0 du point O avec une vitesse initiale $\vec{V}_0(M/\mathcal{R}) = V_0\vec{e}_\theta$, et l'on tire le fil de manière à rapprocher régulièrement M du point O tel que $r(t) = r_0 - V_r t$, où V_r est la vitesse radiale qui est constante et postive.



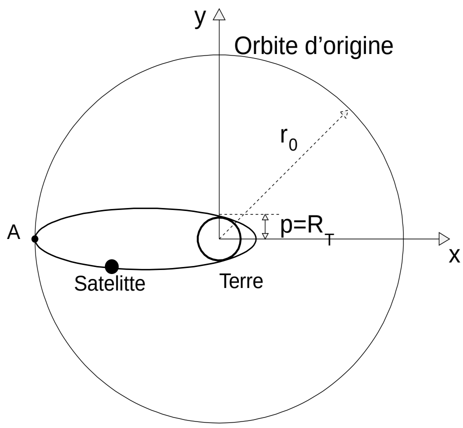
On admet que le fil exerce la force $\vec{T} = -T\vec{e}_r$ sur M et qu'il reste tendu tout au long du mouvement, T étant le module de $\vec{T}$.

Toutes les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.

1. Déterminer les expressions des vecteurs vitesse et accélération de M dans $\mathcal{R}$.
2. Faire le bilan des forces appliquées à M dans $\mathcal{R}$.
3. Etablir l'expression du moment cinétique de M par rapport au point O dans $\mathcal{R}$, $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$, et trouver sa valeur à l'instant $t = 0$, $\vec{\sigma}_0$.
4. Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans $\mathcal{R}$ et :
   a- Déterminer l'expression de la réaction $\vec{R}$ du plateau sur M.
   b- Montrer que le moment cinétique $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$ est conservé et déduire la constante des aires C.
   c- Projeter le PFD sur $\vec{e}_\theta$ et montrer que $r^2\dot{\theta}$ est constante. En déduire que l'équation horaire $\theta(t)$ est donnée par :
   $$\theta(t) = \frac{V_0 t}{r_0 - V_r t}$$
   sachant que $\theta(t = 0) = 0$.
   d- Projeter le PFD sur $\vec{e}_r$ et déterminer l'expression de $T = T(r)$.
5. Etablir l'expression de l'énergie cinétique $E_c(M/\mathcal{R})$ et celle de l'énergie potentielle $E_p(M\mathcal{R})$, sachant que $E_p(r \to +\infty) = 0$. En déduire l'expression de l'énergie mécanique $E_m(M/\mathcal{R})$. Conclure.

Exercice 3 : Retombée d'un satellite sur Terre

Considérons un satellite S de masse m touché par une panne et on souhaite le faire retomber sur la Terre dans une zone non habitée. L'orbite du satellite est circulaire et de rayon r_0. Pour cela, à partir d'un point A de son orbite d'origine, on réduit sa vitesse brutalement et l'on souhaite qu'il retombe sur la Terre après avoir tourné d'un angle de 90° dans sa nouvelle orbite elliptique, voir figure ci-contre. On note par R_T, M_T respectivement le rayon et la masse de la Terre. G est la constante gravitationnelle.
Le point A sur l'orbite d'origine est l'apogée de la nouvelle orbite elliptique. On note par (ρ, φ) les coordonnées polaires du satelitte dans son orbite elliptique. Le paramètre p de l'orbite elliptique est $p = R_T$.



1. Quelles sont les coordonnées polaires ρ_A et φ_A du point A ?
2. En déduire l'excentricité e en fonction de r_0 et R_T.
3. En utilisant l'expression de e établie à la question 2., montrer que l'expression de l'énergie mécanique E_m est donnée par :
   $$E_m = -\frac{GM_T m}{2}\left(\frac{2r_0 - R_T}{r_0^2}\right).$$
4. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, quelle est la vitesse à donner au satellite en A pour qu'il s'écrase à l'endroit souhaité indiqué sur la figure ?

On donne : $E_m = \frac{GM_T m}{2p}(e^2 - 1)$**.**