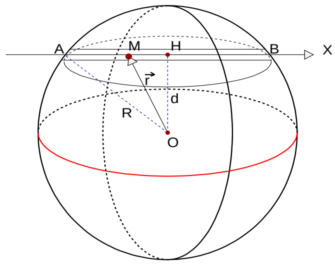
Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2014/2015

Module de Mécanique du Point Matériel
Eléments du Corrigé de la Série N° 4
Filières SMA/SMC/SMP

Corrigé de l'exercice 1

Considérons un point matériel situé à l'intérieur de la terre à une distance r de son centre, voir figure ci-dessous.



1. Soit M la position du point matériel telle que $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$. Rappelons que M va subir l'effet d'attraction de la sphère de rayon r et donc de masse M_r, si l'on considère que la masse volumique de la terre est constante $\rho_T = M_T/\left(4\pi R_T^3/3\right)$

$$M_r = \rho_T \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3} \times \frac{M_T}{\frac{4\pi R_T^3}{3}} = M_T \times \frac{r^3}{R_T^3}$$

ce qui donne pour l'attraction gravitationnelle que va subir M l'expression

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -K_G \frac{mM_r}{r^2}\vec{e}_r \\ &= -K_G \frac{mM_T \frac{r^3}{R_T^3}}{r^2}\vec{e}_r = -K_G m M_T \frac{r}{R_T^3}\vec{e}_r = -mg_0 \frac{r}{R_T}\vec{e}_r \end{aligned}$$

avec $g_0 = \frac{K_G M_T}{R_T^2}$.
Comme l'attraction gravitationnelle est conservative, alors

$$\begin{aligned} dE_p &= -\vec{F}\cdot d\vec{r} \\ &= mg_0 \frac{r}{R_T}\vec{e}_r \cdot (dr\vec{e}_r + rd\vec{e}_r) = mg_0 \frac{rdr}{R_T} \Longrightarrow E_p = mg_0 \frac{r^2}{2R_T} + K \end{aligned}$$

avec $K = E_P(r=0) = 0 \Longrightarrow E_p = mg_0 \frac{r^2}{2R_T}$.

2. Notons par $\vec{u}$ le vecteur unitaire de Ox. La position de M peut être repérée par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = d\,\vec{k}_0 + x\vec{u}$. La vitesse est égale à

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\ &= \dot{x}\vec{u} + x\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{u} + x\left(\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{u}\right) = \dot{x}\vec{u} + x\omega\vec{k} \wedge \vec{u}\end{aligned}$$

ce qui donne pour le module de la vitesse $V = |\vec{V}(M/\mathcal{R})| = \sqrt{\dot{x}^2 + x^2\omega^2}$ sachant que $\vec{u} \perp \vec{k}$.
L'énergie cinétique est égale à $E_c = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + x^2\omega^2\right)$.

3. L'énergie mécanique est donnée par $E_m = E_c + E_p$

$$\begin{aligned}E_m &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + x^2\omega^2\right) + mg_0\frac{r^2}{2R_T} \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + x^2\omega^2\right) + mg_0\frac{x^2 + d^2}{2R_T}\end{aligned}$$

La seule force à laquelle est soumise M est la force gravitationnelle, qui est conservative, et comme E_m ne dépend pas explicitement du temps, alors elle est conservée.
La valeur de E_m est constante et égale à sa valeur à l'instant initial, sachant que $\dot{x}_0 = 0$ et $x_0 = \sqrt{R_T^2 - d^2}$,

$$\begin{aligned}E_m &= E_m(t=0) = \frac{1}{2}mx_0^2\omega^2 + mg_0\frac{x_0^2 + d^2}{2R_T} \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2\left(R_T^2 - d^2\right) + mg_0\frac{R_T}{2}\end{aligned}$$

4. La vitesse du véhicule M est maximale, son énergie cinétique aussi, si l'énergie potentielle du véhicule est minimale, car l'énergie mécanique est conservée.
Rappelons que r varie entre d et R_T, $r \in [d, R_T]$, voir figure. Comme E_p est une fonction strictement croissante en fonction de r dans cet intervalle, alors E_p est minimale pour $r = d$ et donc

$$r = d \Longrightarrow E_p(r=d) = E_p^{min} \quad \text{et} \quad E_c(r=d) = E_c^{max} = \frac{1}{2}mV_{max}^2$$

ce qui donne en utilisant $E_m = E_m^0 = E_p^{min} + E_c^{max}$,

$$\begin{aligned}E_c^{max} &= E_m^0 - E_p^{min} \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2\left(R_T^2 - d^2\right) + mg_0\frac{R_T}{2} - mg_0\frac{d^2}{2R_T}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mV_{max}^2 &= \frac{1}{2}m\left(R_T^2-d^2\right)\left(\omega^2+\frac{g_0}{R_T}\right)\\ \Longrightarrow V_{max} &= \sqrt{\left(R_T^2-d^2\right)\left(\omega^2+\frac{g_0}{R_T}\right)}\end{aligned}$$

5. L'énergie cinétique étant conservée, sa dérivée par rapport au temps est nulle

$$\begin{aligned}\frac{dE_m}{dt} &= m\left(\dot{x}\ddot{x}+\omega^2 x\dot{x}\right)+x\dot{x}\frac{mg_0}{R_T}\\ &= m\dot{x}\left[\ddot{x}+\left(\omega^2+\frac{mg_0}{R_T}\right)x\right]=0\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \ddot{x}+\left(\omega^2+\frac{g_0}{R_T}\right)x=0 \quad \text{sachant que} \quad m\dot{x}\neq 0$$

qui est une équation différentielle de second ordre à coefficients constants. Les racines de l'équation caractéristique sont des nombres complexes imaginaires purs $\pm i\sqrt{\omega^2+\frac{g_0}{R_T}}$, ce qui donne pour solution

$$x(t) = A\cos[\sqrt{\omega^2+\frac{g_0}{R_T}}t-\alpha_0]$$

A et α_0 sont déterminées à partir des conditions initiales

$$\left.\begin{aligned} x(t=0)=x_0 &= \sqrt{R_T^2-d^2}=A\cos\alpha_0\\ \dot{x}(t=0)=0 &= A\sqrt{\omega^2+\frac{g_0}{R_T}}\sin\alpha_0\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \alpha_0=0 \quad \text{et} \quad A=x_0=\sqrt{R_T^2-d^2}$$

d'où la solution

$$x(t) = \left(\sqrt{R_T^2-d^2}\right)\cos[\sqrt{\omega^2+\frac{g_0}{R_T}}t].$$

Mouvement dans un champ de force centrale

Corrigé de l'exercice 2 : Orbite géostationnaire

On rappelle qu'une orbite géostationnaire est celle d'un satellite restant toujours à la verticale d'un même point du globe terrestre.
On note par S le satellite que l'on considère comme un point matériel. La période de rotation de la Terre est $T=86164s$, son rayon $R_T\simeq 6.4\times 10^3 km$ et sa masse $M_T\simeq 6\times 10^{24}kg$. La constante gravitationnelle est $G\simeq 6.7\times 10^{-11}S.I.$.

1. Comme le satellite doit rester toujours à la verticale d'un même point du globe terrestre, sa vitesse angulaire est la même que celle de la rotation de la Terre sur elle même. Comme la période de rotation de la Terre est T, alors

$$\Omega_g = \frac{2\pi}{T}\Longrightarrow \Omega_g=\frac{2\times\pi}{86164}\simeq 7.3\times 10^{-5}\mathrm{s}^{-1}.$$

Le référentiel d'étude R_g est le référentiel géocentrique. Il est galiléen car les distances parcourue par le satellite sont négligeables par rapport aux paramètres de la trajectoire de la Terre autour du soleil et donc R_g peut être considéré en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel héliocentrique (Copernic).

2. On se propose d'établir les expressions du rayon de l'orbite géostationnaire R_g ainsi que son altitude h_g.

a) Le satellite est soumis à l'action de l'attraction gravitationnelle qui est une force centrale et donc le moment par rapport à l'origine O de $\mathcal{R}_g$, qui est confondu avec le centre de la terre, est nul. Grâce au théorème du moment cinétique, le moment cinétique du satellite par rapport à O dans $\mathcal{R}_g$ est constant ce qui implique que la trajectoire a lieu dans le plan perpendiculaire au moment cinétique. Ce qui démontre bien que le mouvement est plan.
Comme le mouvement est plan, on utilise les coordonnées polaires ρ et φ. Comme $\Omega_g = \dot{\varphi}$ est constante et le mouvement est circulaire de rayon R_g, alors

$$\overrightarrow{OM} = R_g \vec{e}_\rho \Longrightarrow \vec{V}(S/\mathcal{R}_g) = R_g \Omega_g \vec{e}_\varphi \Longrightarrow \vec{\gamma}(S/\mathcal{R}_g) = -R_g \Omega_g^2 \vec{e}_\rho.$$

Le PFD permet d'écrire

$$\begin{aligned} m\vec{\gamma}(S/\mathcal{R}_g) &= -G\frac{M_T m_S}{R_g^2}\vec{e}_\rho \\ \Longrightarrow R_g \Omega_g^2 &= G\frac{M_t}{R_g^2} \Longrightarrow R_g = \left(\frac{GM_T}{\Omega_g^2}\right)^{1/3} \end{aligned}$$

L'altitude est déduite comme suit $h_g = R_g - R_T$. Ce qui donne pour les applications numériques

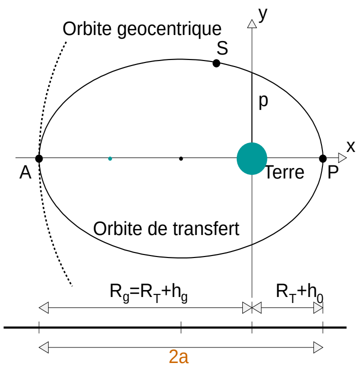
$$R_g = \simeq 42253\text{km} \quad \text{et} \quad h_g \simeq 35853\text{km}.$$

b) La vitesse du satellite est $v_g = R_g \Omega_g$. Son application numérique est $v_g \simeq 3.1\text{km s}^{-1}$.

c) Le plan de l'orbite contient le centre de la Terre. Pour avoir comme axe de rotation l'axe des pôles, l'orbite doit être dans le plan de l'équateur.

Corrigé de l'exercice 3 : orbite elliptique

Avant de placer un satellite sur une orbite géostationnaire, le lanceur des satellites, comme Ariane pour l'exemple, l'injecte à la périgée d'une orbite elliptique, dite orbite de transfert, à une altitude $h_0 = 200km$ de la base de lancement et avec une vitesse, que l'on note v_0, telle que l'apogée A de l'orbite de transfert soit sur l'orbite géostationnaire. Au moment où le satellite se trouve en A, on actionne des moteurs qui réajuste sa vitesse et le transfèrent sur l'orbite géostationnaire, voir figure ci-contre.



Les notations et les résultats de l'exercice précédents concernant une orbite géostationnaire sont utilisés sans démonstration.

1. Comme le satellite est injecté à la périgée de l'orbite elliptique à la hauteur h_0, et que la Terre occupe l'un des foyers de l'ellipse, alors

$$2a = h_0 + R_T + R_g$$

Notez bien que $\rho_{min} = R_T + h_0$ et $\rho_{max} = R_g$, et comme l'excentricité e de l'ellipse est donnée en fonction de ces deux quantités par

$$e = \frac{\rho_{max} - \rho_{min}}{\rho_{max} + \rho_{min}} = \frac{R_g - R_T - h_0}{R_g + R_T + h_0} = \frac{h_g - h_0}{h_g + 2R_T + h_0}.$$

Quant au paramètre p de l'ellipse, on l'obtient à partir de a et de e comme suit

$$p = a(1 - e^2).$$

Les applications numériques des différentes grandeurs calculées auparavant sont

$$a \simeq 24427\text{km} \quad e \simeq 0.73 \quad p \simeq 11417\text{km}.$$

2. Rappelons que la seule force à laquelle le satellite est soumis est l'attraction gravitationnelle dont la forme est $\vec{F} = -\frac{GmM_T}{\rho^2} = -GM_T m u^2 \vec{e}_\rho$ [1] où $u = 1/\rho$ et m la masse du satellite. Le PFD écrit avec la formule de Binet est
$$m\vec{\gamma}(S/\mathcal{R}) = -mC^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right)\vec{e}_\rho = -GmM_T u^2 \vec{e}_\rho \Longrightarrow \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM_T}{C^2}.$$
La solution globale est la combinaison linéaire de la solution sans second membre $u_{ssm} = A\cos(\varphi - \varphi_0)$ et d'une solution particulière $u_p = \frac{GM_T}{C^2}$, où A et φ_0 sont des constantes d'intégration. On prend $\varphi_0 = 0$, Ox confondu avec l'axe de l'ellipse, et la solution générale est
$$u = u_{ssm} + u_p = A\cos\varphi + \frac{GM_T}{C^2} = \frac{1}{\rho} \Longrightarrow \rho = \frac{\frac{C^2}{GM_T}}{1 + A\frac{C^2}{GM_T}\cos\varphi} = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$
ceci implique que
$$p = \frac{C^2}{GM_T} \Longrightarrow C = \sqrt{pGM_T}.$$
3. Sachant que les vitesses sont perpendiculaires aux vecteurs positions respectivement à la périgée et à l'apogée implique que $\rho_{min}v_0 = \rho_{max}v_1$. De même le moment cinétique σ_0 du satellite en ces deux points est le même puisque ce dernier est constant, avec $\sigma_0 = mC = mv_0\rho_{min} = mv_1\rho_{max}$, ce qui implique que
$$v_0 = \frac{C}{\rho_{min}} = \frac{\sqrt{pGM_T}}{R_T + h_0} \quad \text{et } v_1 = \frac{C}{\rho_{max}} = \frac{\sqrt{pGM_T}}{R_T + h_g}.$$
Les applications numériques sont données par
$$v_0 = \frac{\sqrt{11.5 \times 10^6 \times 6 \times 10^{24} \times 6.7 \times 10^{11}}}{6400 \times 10^3 + 200 \times 10^3} = 10265\text{ms}^{-1}$$
$$v_1 = \frac{\sqrt{11.5 \times 10^6 \times 6 \times 10^{24} \times 6.7 \times 10^{11}}}{6400 \times 10^3 + 35.853 \times 10^3} = 1603\text{ms}^{-1}.$$
4. La différence de vitesse que doit communiquer le moteur d'apogée est $v_g - v_1 \simeq 3100 - 1603 = 1397\text{ms}^{-1}$.
5. La troisième loi de Kepler permet de relier la période sidérale T_s, et qui dans notre cas la période sur l'orbite de transfert
$$T_s^2 = a^3 4\pi^2/(GM_T).$$
Comme le temps que va passer le satellite sur l'orbite est la moitié de la période, puisqu'il parcourt la distance entre la périgée et l'apogée, alors le temps de transfert t_{tr} est
$$t_{tr} = \frac{T_s}{2} = a\pi\sqrt{\frac{a}{GM_T}} \simeq 5.2h.$$

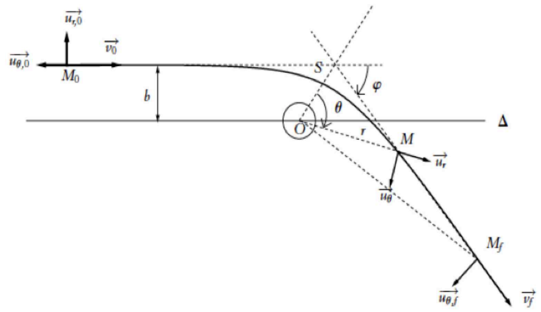
1. La constante universelle de gravitation peut être notée soit par G soit par K_G.

Exercice 4 : Orbite hyperbolique

Corriger sur la figure les vecteurs de la base polaire à l'état initial $\vec{u}_{\theta,0}$ et $\vec{u}_{r,0}$. En effet, $\vec{u}_{\theta,0}$ est perpendiculaire à $\vec{u}_{\Delta}$. Noter bien aussi que les états initial et final sont très loins de O, ce qui permet de considérer dans ces cas que $r \to \infty$ et donc l'énergie potentielle négligeable.

Une météorite M a, très loin de la Terre, une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{u}_{\Delta}$ portée par une droite située à la distance b de l'axe (Δ) du centre de la Terre O, voir figure ci-contre. On note par m la masse du météorite, M_T la masse de la Terre, R_T son rayon et G la constante de gravitation universelle. On travaille dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen. La position de M est repérée par les coordonnées polaires (r, θ), $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$. La trajectoire du météorite est une branche d'hyperbole de foyer O, le centre de la Terre.

Noter bien que l'on utilise les notations $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ pour la base polaire et (r, θ) les coordonnées correspondantes.



1. Etant donnée que la seule force à laquelle est soumise la météorite est l'attraction gravitationelle et que cette dernière est centrale et son support passe par O alors son moment est nul ce qui implique que le moment cinétique $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$ est constant tout au long du mouvement. Nous avons ainsi

   $$\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) \;=\; mr^2\dot{\theta}\vec{k} = \text{Cst} = \overrightarrow{OM}_0 \wedge \vec{v}_0 = \|\overrightarrow{OM}_0\| mv_0 \sin(\widehat{\overrightarrow{OM}_0, \vec{v}_0})\vec{k} = mv_0 b\vec{k}$$

   où $\vec{k} = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$ et $\sin(\widehat{\overrightarrow{OM}_0, \vec{v}_0}) = \sin\left[\pi - (\widehat{\overrightarrow{OM}_0, \vec{v}_0})\right] = b/\|\overrightarrow{OM}_0\|$.
   De plus l'attraction gravitationnelle est conservative et le potentiel dont elle dérive est égal à $U(r) = -GM_T m/r$. Aussi, très loin de la Terre, l'énergie potentielle est négligeable, $U(r) \to 0$, et donc l'énergie mécanique est égale à l'énergie cinétique comme suit

   $$E_m \;=\; \frac{1}{2}mv_0^2.$$

2. Lorsque la météorite se trouve au sommet S, la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{v} \perp \overrightarrow{OS}$. Sachant que $r_{min} = \|\overrightarrow{OS}\|$ et $\sigma_o = mr_{min}v = mv_0 b \Longrightarrow v = v_0 b/r_{min}$, cela

implique

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{r_{min}} = \frac{1}{2}mv_0^2 \\ \Longrightarrow &\quad \frac{v_0^2 b^2}{r_{min}^2} - 2\frac{GM_T}{r_{min}} = v_0^2 \\ \Longrightarrow &\quad r_{min}^2 + 2\frac{GM_T}{v_0^2} r_{min} - b^2 = 0 \end{aligned}$$

dont la seule solution acceptable est la racine positive, étant donné que $r_{min} > 0$:

$$r_{min} = -\frac{GM_T}{v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{GM_T}{v_0^2}\right)^2 + b^2}.$$

3. La météorite ne rencontre pas la Terre si $r_{min} > R_T$, ce qui implique que

$$\begin{aligned} b &> \sqrt{\left(R_T + \frac{GM_T}{v_0^2}\right)^2 - \left(\frac{GM_T}{v_0^2}\right)^2} \\ \Longrightarrow b &> R_T\sqrt{1 + 2\frac{GM_T}{R_T v_0^2}} \end{aligned}$$

et la valeur minimale de b est

$$b_{min} = R_T\sqrt{1 + 2\frac{GM_T}{R_T v_0^2}}.$$

4. Pour calculer l'angle φ, on applique le PFD

$$\begin{aligned} m\frac{d\vec{v}}{dt} &= -\frac{GM_T m}{r^2}\vec{u}_r \\ &= +\frac{GM_T m}{r^2\dot{\theta}} \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\Big|_{\mathcal{R}} \\ &= +\frac{GM_T m^2}{\sigma_o}\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = +\frac{GM_T m}{bv_0}\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\Big|_{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

nous avosn utilisé le fait que $\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}|_{\mathcal{R}} = -\vec{u}_r$. En intégrant cette équation entre l'état initial et l'état final, on obtient

$$\vec{v}_f - \vec{v}_0 = +\frac{GM_T}{bv_0}\left(\vec{u}_{\theta,f} - \vec{u}_{\theta,0}\right).$$

En projetant cet équation par $\vec{u}_\Delta$, sachant que $\vec{v}_0 \cdot \vec{u}_\Delta = v_0$, $\vec{u}_{\theta,0} \cdot \vec{u}_\Delta = 0$, $\vec{u}_{r,f} \cdot \vec{u}_\Delta = \cos\varphi$ et $\vec{u}_{\theta,f} \cdot \vec{u}_\Delta = \cos(\varphi + \pi/2) = -\sin\varphi$, alors

$$v_f\cos\varphi - v_0 = -\frac{GM_T}{bv_0}\sin\varphi.$$

Comme l'énergie potentielle est négligeable aussi bien à l'état initial qu'à l'état final et comme l'énergie mécanique est conservée, alors

$$E_{m,0} = E_{m,f} \Longrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 \Longrightarrow v_0 = v_f.$$

ce qui donne finallement

$$\begin{aligned} v_0(\cos\varphi - 1) &= -\frac{GM_T}{bv_0}\sin\varphi \\ \Longrightarrow -2\sin\frac{\varphi}{2} &= -\frac{GM_T}{bv_0^2}2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \\ \Longrightarrow \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} &= +\frac{GM_T}{bv_0^2}. \end{aligned}$$

Deuxième approche pour cette dernière question : voir le cours - Mouvement hyperbolique

Nous avons $\cos\alpha = \frac{1}{e}$ où α est l'angle que fait la direction asymptotique avec l'axe Fx. Si l'on compare avec la figure de l'exercice, nous avons $2\alpha + \varphi = \pi \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$. De même nous avons

$$e^2 = 1 + \frac{2pE_0}{GMm}$$

avec $p = \sigma_0^2/(GMm) \Longrightarrow p = mv_0^2b^2/(GM)$ et $E_0 = 1/2mv_0^2 \Longrightarrow e^2 = 1 + \frac{v_0^4b^2}{(GM)^2}$. Or nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2\alpha} &= e^2 \\ \Longrightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 &= \frac{v_0^4b^2}{(GM)^2} \\ \Longrightarrow \mathrm{tg}^2\alpha &= \frac{v_0^4b^2}{(GM)^2} \\ \Longrightarrow \mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2} &= \frac{v_0^4b^2}{(GM)^2} \Longrightarrow \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} = +\frac{v_0^2b}{GM} \end{aligned}$$

nous avons retenu la solution postive car $0 < \varphi < \pi$ et qui n'est d'autre que le résultat obtenu.