Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2014/2015

Module de Mécanique du Point Matériel
Eléments du Corrigé de la Série N° 3
Filières SMA/SMC/SMP

Exercice 1 : Poussée d'Archimède

Soit $\mathcal{R}$ le repère lié au port qui est galiléen telle que l'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = g\vec{k}$, où $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sa base cartésienne. Le bateau est attaché au port donc il est au repos et par conséquence la force de frottement fluide de l'eau sur le bateau est nulle. Aussi, les forces appliquées sur le bateau sont

— le poids : $\vec{P} = m_b\vec{g} = \rho_b V_b g\vec{k}$;

— la poussée d'Archimède $\vec{F}_{ar}$: elle est égale au poids du volume d'eau V_e et dirigée selon $-\vec{k}$; ce qui donne $\vec{F}_{ar} = -\rho_e V_e g\vec{k}$;

Comme le bateau est au repos, alors l'application du PFD donne

$$\vec{P} + \vec{F}_{ar} = \vec{0} \Longrightarrow m_b\vec{g} - \rho_e V_e g\vec{k} = \rho_b V_b g\vec{k} - \rho_e V_e g\vec{k} = \vec{0} \Longrightarrow \frac{\rho_b}{\rho_e} = \frac{V_e}{V_b}.$$

ce qui donne la condition pour que le bateau flotte sur l'eau.

Exercice 2 : particule chargée dans une région ou règne un champ magnétique constant

Une particule M de charge q et de masse m est soumise à l'action d'un champ magnétique constant $\vec{B}$. Soit $\mathcal{R}(O, XYZ)$ un référentiel galiléen muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ telle que $\vec{B} = B\vec{k}$. La vitesse initiale de la particule est $\vec{v}_0 = \vec{v}_{0\perp} + \vec{v}_{0//}$, telles que $\vec{v}_{0\perp} = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$, la projection de la vitesse sur le plan (OXY), et $\vec{v}_{0//} = v_{0z}\vec{k}$, la composante de la vitesse parallèle au champ magnétique. On note $\omega_c = \frac{qB}{m}$.

On néglige l'action du poids devant l'action du champ magnétique.

On note dans la suite $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{v}$.

1. L'expression de la force $\vec{F}_B$ est donnée par

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

2. Comme nous négligeons le poids de la particule chargée, la seule force qui s'exerce sur M est $\vec{F}_B$. $\mathcal{R}$ est galiléen, alors le PFD dans $\mathcal{R}$ donne

$$\vec{F}_B = m\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \Longrightarrow \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = -\frac{qB}{m}\vec{k} \wedge \vec{v}.$$

Soit $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ avec $v_z = v_{//}$, alors

$$\begin{aligned}
\vec{k} \wedge \vec{v} &= \vec{k} \wedge \left(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_{//}\vec{k}\right) \\
&= v_x\vec{j} - v_y\vec{i} \\
\Longrightarrow \left.\frac{d}{dt}\vec{v}\right|_{\mathcal{R}} &= \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} + \dot{v}_z\vec{k} \\
&= -\frac{qB}{m}\left(v_x\vec{j} - v_y\vec{i}\right) \Longrightarrow \dot{v}_z = 0 \Longrightarrow v_Z = v_{//} = \text{ Constante}
\end{aligned}$$

3. Nous avons établi que

$$\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = -\frac{qB}{m}\vec{k} \wedge \vec{v}$$

sachant que la dérivée d'un vecteur quelconque $\vec{A}$ dans $\mathcal{R}$ avec $\vec{u}_A = \vec{A}/\|\vec{A}\|$ est donnée par

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \frac{d\|\vec{A}\|}{dt}\vec{u}_A + \vec{\Omega}(\vec{A}/\mathcal{R}) \wedge \vec{A}.$$

En appliquant ce résultat à

$$\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = -\frac{qB}{m}\vec{k} \wedge \vec{v}$$

on en déduit que $\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = 0 \Longrightarrow \|\vec{v}\| = v$ est constant et que $\vec{v}$ est en rotation dans $\mathcal{R}$ avec le vecteur rotation $-\frac{qB}{m}\vec{k}$.
Comme $v^2 = v_\perp^2 + v_{//}^2$, d'une part, et v et $v_{//}$ sont constants, d'autre part, alors $v_\perp$ est constant.

4. Développons le PFD dans la base cartésienne, sachant que $\vec{B} = B\vec{k}$

$$\begin{aligned}
m\frac{dv_x}{dt}\vec{i} + m\frac{dv_y}{dt}\vec{j} + m\frac{dv_z}{dt}\vec{k} &= q\left(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\right) \wedge B\vec{k} \\
&= qBv_y\vec{i} - qBv_x\vec{j}
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\frac{dv_x}{dt} - \frac{qB}{m}v_y &=& 0 \\
\frac{dv_y}{dt} + \frac{qB}{m}v_x &=& 0 \\
\frac{dv_z}{dt} &=& 0
\end{array}\right.$$

On constate que les deux premières équations sont couplées, c'est à dire v_x et v_y figurent dans les deux équations. La composante de la vitesse selon Oz est constante et égale à la composante de la vitesse selon Oz à l'instant $t = 0$, $v_z = v_{0//}$.

5. Reprenons les équations précédentes en remplaçant $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$ et $v_z = \dot{z}$ ce qui donne en premier $z = v_{0//}t + K$ avec $K = z(0) = 0$. De même

$$\ddot{y} \;=\; -\frac{qB}{m}\dot{x} \Longrightarrow \dot{y} = -\omega_c x + K$$

or $x(0) = 0$ et $\dot{y}_0 = 0$ alors $K = 0$

$$\ddot{x} = \omega_c \dot{y} = -\omega_c^2 x \Longrightarrow \ddot{x} + \omega_c^2 x = 0$$

qui est une équation de second ordre à coefficients constants sans second membre. La solution est $x = A\sin(\omega_c t - \varphi_0)$ avec $x(0) = 0 = A\sin\varphi_0 \Longrightarrow \varphi_0 = 0$, puisque $A \neq 0$, et $\dot{x}(0) = v_{0\perp} = A\omega_c\cos\varphi_0 \Longrightarrow A = v_{0\perp}/\omega_c$ et la solution est

$$x(t) \;=\; \frac{v_{0\perp}}{\omega_c}\sin\omega_c t.$$

L'équation en y est alors

$$\dot{y} \;=\; -\omega_c x = -v_{0\perp}\sin\omega_c t \Longrightarrow y = +\frac{v_{0\perp}}{\omega_c}\cos\omega_c t + K$$

or $y(0) = 0 \Longrightarrow K = -\frac{v_{0\perp}}{\omega_c}$ ce qui donne finalement

$$\begin{cases} x &= \frac{v_{0\perp}}{\omega_c}\sin\omega_c t \\ y &= -\frac{v_{0\perp}}{\omega_c}(1 - \cos\omega_c t) \\ z &= v_{//}t. \end{cases}$$

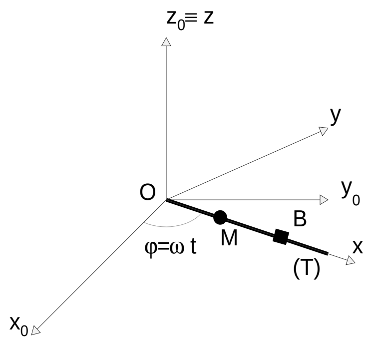
A partir des expressions précédentes, on a

$$x^2 + (y + \frac{v_{0\perp}}{\omega_c})^2 = \frac{v_{0\perp}^2}{\omega_c^2} \quad \text{et} \quad z = v_{0//}t$$

qui sont respectivement les équations d'un cercle de centre$(0, -\frac{v_{0\perp}}{\omega_c})$ et de rayon $\frac{v_{0\perp}}{\omega_c}$ dans le plan (Oxy) et d'un mouvement de translation rectiligne uniforme selon Oz. C'est un mouvement hélicoidal et la trajectoire est une spirale autour de Oz.

Exercice 3 : Masselotte en rotation sur une tige

Une masselotte ponctuelle M, de masse m, peut glisser sans frottement sur une tige (T) perpendiculaire en O à l'axe vertical Oz, voir figure ci-contre. Soit $\mathcal{R}_0(Ox_0y_0z_0)$ un repère galiléen fixe orthonormé direct. Soient $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ la base cartésienne associée. Soit $\mathcal{R}(Oxyz)$ un repère orthonormé lié à la tige (T) muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'axe Oz est entraîné par un moteur qui fait tourner la tige (T) à la vitesse angulaire constante ω dans le plan horizontal Ox_0y_0. La masselotte est repérée par ses coordonnées polaires, (ρ, φ), dans $\mathcal{R}_0$.



A l'instant initial $t = 0$, la tige (T) est confondue avec l'axe Ox_0 et la masselote est lancée depuis le point O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$ où $v_0 > 0$.

1. Dans le référentiel $\mathcal{R}$ non galiléen, les forces appliquées à la msselotte sont

   i- le poids $m\vec{g} = -mg\vec{k}$,

   ii- la réaction de la tige qui est normale à celle-ci, et donc $\perp$ à Ox, puisque les frottements sont négligeables, $\vec{R} = R_z\vec{k} + R_y\vec{j}$,

   iii- la force d'inertie d'éntrainement $\vec{f}_{ie}$ à déterminer,

   iv- la force d'inertie de Coriolis $\vec{f}_{ic}$ à déterminer.

   Pour exprimer le PFD dans $\mathcal{R}$, il faut donc expliciter les expressions des forces d'inertie.
   Notons que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_0$ ont la même origine. Le vecteur position de M est $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{i}$ ce qui implique que

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) \;=\; \dot{\rho}\vec{i} \text{ et } \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \ddot{\rho}\vec{i}.$$

   $\mathcal{R}$ est lié à la tige alors il est animé d'un mouvement de rotation uniforme ; ce qui implique que $\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) = \omega\vec{k}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\vec{V}_e &= \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{OM} \\ &= \omega\vec{k} \wedge \rho\vec{i} = \rho\omega\vec{j}\end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_e &= \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \left(\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{OM}\right) \\ &= \omega\vec{k} \wedge \rho\omega\vec{j} = -\rho\omega^2\vec{i} \Longrightarrow \vec{f}_{ie} = m\rho\omega^2\vec{i}(\text{centrifuge})\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_c &= 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}) \\
&= 2\omega\vec{k} \wedge \dot{\rho}\vec{i} = 2\dot{\rho}\omega\vec{j} \Longrightarrow \vec{f}_{ic} = -2m\dot{\rho}\omega\vec{j}.
\end{aligned}$$

Finalement, le PFD dans $\mathcal{R}$ donne

$$\begin{aligned}
m\vec{g} + \vec{R} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} &= m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \\
\Longrightarrow -mg\vec{k} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k} + m\rho\omega^2\vec{i} - 2m\dot{\rho}\omega\vec{j} &= m\ddot{\rho}\vec{i}
\end{aligned}$$

2. L'équation du mouvement est obtenue en projetant le PFD sur $\vec{i}$, ce qui donne

$$\ddot{\rho} - \omega^2\rho = 0.$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants et sans second membre. L'équation caractéristique est $r^2 - \omega^2 = 0 \Longrightarrow r = \pm\omega$ et la solution est $\rho(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$. A et B sont déterminées à partir des conditions initiales $\rho(0) = 0 \Longrightarrow A + B = 0$ et $\dot{\rho}(0) = v_0 = \omega(A - B) \Longrightarrow A = v_0/2\omega$ et $B = -v_0/2\omega$. Aussi la solution est

$$\rho(t) = \frac{v_0}{2\omega}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right) = \frac{v_0}{\omega}\sinh(\omega t).$$

La réaction de la tige s'obtient en projetant le PFD respectivement sur les axes $\vec{j}$ et $\vec{k}$, ce qui permet d'obtenir

$$R_z = mg \text{ et } R_y = 2m\dot{\rho}\omega.$$

3. calculons $\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)$:

$$\begin{aligned}
\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) &= \vec{V}(M/\mathcal{R}) + \vec{V}_e \\
&= \dot{\rho}\vec{i} + \rho\omega\vec{j} \\
&= v_0\left(\cosh(\omega t)\vec{i} + \sinh(\omega t)\vec{j}\right).
\end{aligned}$$

Le moment cinétique de M par rapport à O dans $\mathcal{R}_0$ est donné par

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R}_0) &= \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) \\
&= \rho\vec{i} \wedge m\left(\dot{\rho}\vec{i} + \rho\omega\vec{j}\right) \\
&= m\rho^2\omega\vec{k}.
\end{aligned}$$

Le théorème du moment cinétique par rapport à O dans $\mathcal{R}$ est donné par

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R}_0)}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= \overrightarrow{OM} \wedge \left(m\vec{g} + \vec{R}\right) \\
\Longrightarrow 2m\rho\dot{\rho}\omega\vec{k} &= \rho\vec{i} \wedge \left(-mg\vec{k} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}\right) \\
\Longrightarrow 2m\rho\dot{\rho}\omega\vec{k} &= m\rho g\vec{j} + \rho R_y\vec{k} - \rho R_z\vec{j}
\end{aligned}$$

et en projetant sur les différents axes, on obtient

$$\begin{aligned} R_y &= 2m\dot{\rho}\omega \\ R_z &= mg \end{aligned}$$

qui ne sont d'autres que les expressions déjà établies.

4. L'équation horaire donne
$$D = \frac{v_0}{\omega}\sinh \omega t_B \Longrightarrow t_B = \frac{1}{\omega}\text{argsh}\left(\frac{\omega D}{v_0}\right)$$
La tige effectue un tour complet, 2π, en $\Delta t_{tour} = 16s$ alors $\omega = 2\pi/\Delta t_{tour}$ ce qui donne
$$t_B = \frac{\Delta t_{tour}}{2\pi}\text{argsh}\left(\frac{2\pi D}{v_0 \Delta t_{tour}}\right)$$
A.N. :
$$\begin{aligned} t_B &= \frac{16}{2\times 3.141516}\text{argsh}\left(\frac{2\times 3.141516\times 2.3}{0.393\times 16}\right) \\ &\simeq 4s. \end{aligned}$$

5. Lorsque la masselotte est arrêtée par B, alors $\dot{\rho} = 0$ et partant de l'expression du PFD, en remplaçant $\dot{\rho} = 0$, on obtient
$$\begin{aligned} R_y &= 0 \\ R_z &= mg. \end{aligned}$$

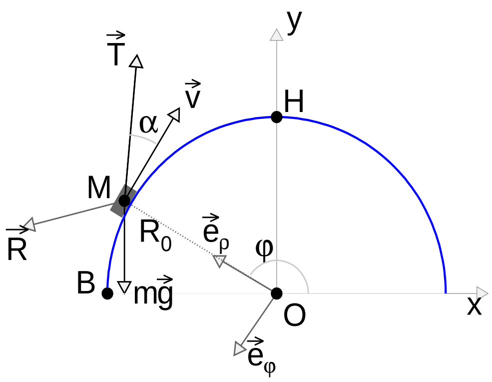
Supplément à l'exercice 3

La réaction dont il est question dans l'exercice est $\vec{R}_H = R_y\vec{j}$. En fait, pour retrouver la composante de la réaction selon $\vec{i}$, il suffit de reprendre le PFD, d'ajouter la réaction de la butée selon $\vec{i}$, que l'on note $\vec{R}_B$, et de l'appliquer dans le référentiel relatif $\mathcal{R}$. Notons bien que la réaction de la barre sur la masselote selon $\vec{i}$ est toujours nulle en raison de l'absence des frottements. Aussi, nous avons
$$\vec{R} + \vec{R}_B + m\vec{g} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} = m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$$

Sachant que la masselotte est arrêtée par la butée, ce qui implique qu'elle est à l'équilibre dans $\mathcal{R}$ et donc $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \vec{0}$ et $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{0} \Longrightarrow \dot{\rho} = 0 \Longrightarrow \rho = D$, nous obtenons
$$R_y\vec{j} + R_z\vec{k} + R_B\vec{i} - mg\vec{k} + mD\omega^2\vec{i} = \vec{0}$$
ce qui implique que
$$\left\{\begin{aligned} R_y &= 0 \\ R_z &= mg \\ R_B &= -mD\omega^2. \end{aligned}\right.$$

Exercice 4 : Forces de frottement solide

Un homme tire une caisse M de bas en haut d'une colline dont la forme est assimilée à un cercle de rayon R_0, de centre O. Il exerce une force de traction $\vec{T}$ constante en norme et faisant un angle α avec le sol, voir figure ci-contre.



Nous avons $\vec{\Omega}(\vec{e}_\rho/\mathcal{R}) = \dot{\varphi}\vec{k}$. Noter que $\dot{\varphi}$ est algébrique et négative et donc $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = R_0\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ et $\overrightarrow{dl} = R_0 d\varphi\vec{e}_\varphi$ ont le bon sens implicitement.

1. Calculons le travail de $\vec{T}$ pour aller du bas de la colline, point $B(\varphi = \pi)$, vers le haut de la colline, le point $H(\varphi = \pi/2)$.

$$\begin{aligned}\delta W_B^H(\vec{T}) &= \vec{T}\cdot\overrightarrow{dl} \\ &= T\,(\sin\alpha\vec{e}_\rho - \cos\alpha\vec{e}_\varphi)\cdot(R_0 d\varphi)\vec{e}_\varphi \\ &= -R_0 T\cos\alpha d\varphi \Longrightarrow W_B^H(\vec{T}) = \int_\pi^{\pi/2}\delta W_B^H(\vec{T}) = +\frac{\pi}{2}R_0 T\cos\alpha\end{aligned}$$

Le travail est moteur par rapport à M puisque ce dernier est déplacé vers le haut.

2. Si l'homme se déplace avec une vitesse constante v_0, $\vec{v} = -v_0\vec{e}_\varphi$, la caisse se déplace aussi avec la même vitesse. Pour Déterminer la réaction R_N, nous appliquons le PFD.
Calculons l'accélération.
$\overrightarrow{OM} = R_0\vec{e}_\rho \Longrightarrow \vec{v} = R_0\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$. Comme v est constant alors $R_0\dot{\varphi}$ est constant et $\dot{\varphi} = -v_0/R_0$. L'accélération de M est $\vec{\gamma} = -R_0\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho = -\frac{v_0^2}{R_0}\vec{e}_\rho$. Les forces appliquées à M sont

$$\begin{aligned}\vec{T} &= T\,(\sin\alpha\vec{e}_\rho - \cos\alpha\vec{e}_\varphi) \\ \vec{R} &= \vec{R}_N + \vec{R}_T = R_N\vec{e}_\rho + R_T\vec{e}_\varphi \\ \vec{P} &= m\vec{g} = mg\,(-\sin(\pi-\varphi)\vec{e}_\rho + \cos(\pi-\varphi)\vec{e}_\varphi) = -mg\,(\sin\varphi\vec{e}_\rho + \cos\varphi\vec{e}_\varphi)\end{aligned}$$

que $\vec{g}$ fait un angle $\pi - \varphi$ avec $\vec{e}_\varphi$. Le PFD s'écrit comme suit

$$\begin{aligned}
m\vec{\gamma} &= \vec{T} + \vec{R} + m\vec{g} \\
-m\frac{v_0^2}{R_0}\vec{e}_\rho &= T\left(\text{sin}\alpha\vec{e}_\rho - \text{cos}\alpha\vec{e}_\varphi\right) + R_N\vec{e}_\rho + R_T\vec{e}_\varphi - mg\left(\text{sin}\varphi\vec{e}_\rho + \text{cos}\varphi\vec{e}_\varphi\right) \\
&= \left(T\text{sin}\alpha + R_N - mg\text{sin}\varphi\right)\vec{e}_\rho - \left(T\text{cos}\alpha - R_T + mg\text{cos}\varphi\right)\vec{e}_\varphi.
\end{aligned}$$

La projection selon $\vec{e}_\rho$ nous permet d'avoir

$$T\text{sin}\alpha + R_N - mg\text{sin}\varphi = -m\frac{v_0^2}{R_0} \Longrightarrow R_N = m\left(g\text{sin}\varphi - \frac{v_0^2}{R_0}\right) - T\text{sin}\alpha$$

3. Calculons le travail de la force de frottement $\vec{R}_T = f|\vec{R}_N|\vec{e}_\varphi$:

$$\begin{aligned}
\delta W_B^H(\vec{R}_T) &= f|\vec{R}_N|\vec{e}_\varphi \cdot (+R_0 d\varphi)\vec{e}_\varphi \\
&= +fR_0\left[m\left(g\text{sin}\varphi - \frac{v_0^2}{R_0}\right) - T\text{sin}\alpha\right]d\varphi
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
W_B^H(\vec{R}_T) &= \int_\pi^{\pi/2} \delta W_B^H(\vec{R}_T) \\
&= -fR_0\left[m\left(-g + \frac{\pi}{2}\frac{v_0^2}{R_0}\right) + T\frac{\pi}{2}\text{sin}\alpha\right]
\end{aligned}$$

Exercice 5 : Force de frottement fluide

Un cycliste se déplace sur une ligne droite et fournit une puissance mécanique constante P. Les forces de frottement de l'air sont proportionnelles au carré de la vitesse du cycliste $\vec{F}_f = -kv\vec{v}$, k étant une constante positive. On néglige les forces de frottement du sol sur la roue. Le système formé par le cyscliste et le vélo est considéré comme un point matériel. On choisit un axe horizontal Ox et le repère terrestre est supposé galiléen.

1. Les forces qui sont appliquées au cycliste sont
   - le poids, perpendiculaire au déplacement et donc ne travaille pas et donc sa puissance est nulle ;
   - la réaction normale R_N, la réaction tangentielle est négligée car les frottements sont négligeables. Elle est normale au déplacement et donc ne travaille pas et sa puissance est nulle ;
   - la force de frottement visqueux $\vec{F} = -kv\vec{v}$.

   Appliquons le théorème de l'énergie cinétique dans sa forme différentielle, exprimée en fonction des puissances :

$$\frac{dE_c}{dt} = P(\vec{F}) + P(\text{mecanique})$$

$$
\begin{aligned}
\frac{m}{2}\frac{dv^2}{dt} &= -kv\vec{v}\cdot\vec{v}+P \\
mv\frac{dv}{dt} &= P-kv^3 \\
mv\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} &= P-kv^3 \\
mv^2\frac{dv}{dx} &= P-kv^3
\end{aligned}
$$

qui n'est d'autre que l'équation recherchée.

2. En posant $f(x)=P-kv^3$, nous avons $\frac{df(x)}{dx}=-3kv^2\frac{dv}{dx}$. Aussi, on a

$$
\frac{-m}{3k}\frac{df(x)}{dx} = f(x) \Longrightarrow \frac{df(x)}{dx}+\frac{3k}{m}f(x)=0
$$

qui est une équation différentielle de premier ordre sans second membre à coefficients constants. La solution est obtenue en séparant les variables

$$
\frac{df(x)}{f(x)}=-\frac{3k}{m}dx \Longrightarrow f(x)=Ae^{-\frac{3k}{m}x}
$$

où A est une constante que l'on détermine des conditions initiales. En remplaçant $f(x)$ par son expression, on obtient

$$
P-kv^3 = Ae^{-\frac{m}{3k}x} \Longrightarrow v(x)=\left(\frac{P}{k}-\frac{A}{k}e^{-\frac{m}{3k}x}\right)^{1/3}
$$

comme $v(x=0)=v_0$, alors $A=P-kv_0^3$ et la solution se met sous la forme

$$
v(x) = \left[\frac{1}{k}\left(P-\left[P-kv_0^3)e^{-\frac{m}{3k}x}\right]\right)\right]^{1/3}
$$