Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2014/2015

Module de Mécanique du Point Matériel
Corrigés de la Série N$^0$ 1
Filières SMA/SMC/SMP

# Corrigé 1 : Opérations sur les vecteurs

On donne les trois vecteurs $\vec{V}_1(1,1,0)$, $\vec{V}_2(0,1,0)$ et $\vec{V}_3(0,0,2)$. Notons par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base dans laquelle les différents vecteurs sont décomposés.

1. Calculons les normes des différents vecteurs et les vecteurs unitaires de leurs directions respectives

$$\begin{aligned}
\|\vec{V}_1\| &= \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2} \Longrightarrow \vec{v}_1 = \frac{\vec{V}_1}{\|\vec{V}_1\|} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \\
\|\vec{V}_2\| &= \sqrt{0^2+1^2+0^2} = 1 \Longrightarrow \vec{v}_2 = \frac{\vec{V}_2}{\|\vec{V}_2\|} = (0,1,0) \\
\|\vec{V}_3\| &= \sqrt{0^2+0^2+2^2} = \sqrt{4} = 2 \Longrightarrow \vec{v}_3 = \frac{\vec{V}_3}{\|\vec{V}_3\|} = (0,0,1)
\end{aligned}$$

2. On calcule $\cos(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2})$ comme suit

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\|\|\vec{v}_2\|\cos(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}) = \cos(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}) \\
&\Longrightarrow \cos(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

3. Nous avons

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3 &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \vec{e}_1 + 0 \times \vec{e}_2 - 0 \times \vec{e}_3 = (1,0,0) \\
\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) &= 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 0 = 1.
\end{aligned}$$

Le premier terme représente le produit scalaire entre les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, il est égal au produit du module de la projection de $\vec{v}_1$ sur $\vec{v}_2$ multiplié par le module de $\vec{v}_2$. Le deuxième terme est le produit vectoriel entre $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$. Le dernier terme est le produit mixte entre $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ et qui n'est d'autre que le volume du parallélepipède contruit sur la base des trois vecteurs.

# Corrigé 2 : Différentielle et dérivée d'un vecteur unitaire

Considérons la position d'un point $M$ dans le repère $\mathcal{R}(O, xyz)$. Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ et $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ respectivement les bases cartésienne, cylindrique et sphérique associées à ce repère.

1. Exprimons d'abord les vecteurs de la base cylindrique dans la base cartésienne :

$$\begin{aligned} \vec{e_\rho} &= \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j} \\ \vec{e_\varphi} &= -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j} \\ \vec{k} &= \vec{k}. \end{aligned}$$

   Sachant que la base cartésienne est une base fixe, alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{e_\rho}}{\partial\varphi} &= -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j} = \vec{e_\varphi} \\ \frac{\partial\vec{e_\varphi}}{\partial\varphi} &= -\cos\varphi\vec{i} - \sin\varphi\vec{j} = -\vec{e_\rho} \\ \frac{\partial\vec{k}}{\partial\varphi} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

2. Sachant que $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\varphi}$ ne dépendent que de $\varphi$, leurs différentielles sont données

$$\begin{aligned} d\vec{e_\rho} &= \frac{\partial\vec{e_\rho}}{\partial\varphi}d\varphi = d\varphi\vec{e_\varphi} \\ d\vec{e_\varphi} &= \frac{\partial\vec{e_\varphi}}{\partial\varphi}d\varphi = -d\varphi\vec{e_\rho}. \end{aligned}$$

3. Comme la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{k})$ est une base directe alors $\vec{e_\varphi} = \vec{k} \wedge \vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\rho} = \vec{e_\varphi} \wedge \vec{k}$. En utilisant ces deux résultats, nous obtenons

$$d\vec{e_\rho} = d\varphi\vec{e_\varphi} = dt\frac{d\varphi}{dt}\vec{k} \wedge \vec{e_\rho} = dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e_\rho}$$

   avec $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$. De même, on peut écrire

$$d\vec{e_\varphi} = -d\varphi\vec{e_\rho} = dt\frac{d\varphi}{dt}\vec{k} \wedge \vec{e_\varphi} = dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e_\varphi}.$$

   D'où les résultats recherchés.
   Ce qui donne les dérivées par rapport aux temps de $\vec{e_\rho}$ et de $\vec{e_\varphi}$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e_\rho}}{dt} &= \vec{\Omega} \wedge \vec{e_\rho} \\ \frac{d\vec{e_\varphi}}{dt} &= \vec{\Omega} \wedge \vec{e_\varphi}. \end{aligned}$$

**Pour dériver par rapport au temps dans un repère $\mathcal{R}$ un vecteur unitaire, il suffit de connaître son vecteur rotation dans $\mathcal{R}$ et utliser le résultat précédent.**

4. Pour déterminer le vecteur rotation d'une base, la méthode directe est celle utilisée dans l'exercice précédent. Il suffit de prendre un vecteur de la base[1] et de mettre sa dérivée sous la forme qui met en évidence le vecteur rotation. Une deuxième approche qualitative consiste à procéder comme suit

   **i-** repérer chaque angle qui décrit la rotation[2] du vecteur considéré : dans le cas précédent c'est $\varphi$ ;

   **ii-** repérer le plan dans lequel chaque rotation a lieu et le vecteur rotation qui lui est associé est porté par le vecteur unitaire perpendiculaire au plan en appliquant la règle du tire-bouchon : dans le cas précédent c'est $\vec{k}$ ;

   **iii-** le vecteur rotation est alors la somme de tous les vecteurs décrivant chacune des rotations : dans le cas précédent, il s'agit d'une seule et le vecteur rotation est $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$.

   Notons que le module du vecteur rotation associé à un angle est donné par la vitesse angulaire associée à cet angle. Aussi, dans le cas de la base sphérique, on prend $\vec{e_r}$ et sa rotation est repérée par les angles

   **-i** $\varphi$ : rotation dans le sens trigonométrique dans le plan perpendiculaire à $\vec{k} \Longrightarrow \vec{\Omega}_1 = \dot{\varphi}\vec{k}$ ;

   **ii-** $\theta$ : rotation dans le sens trigonométrique dans le plan perpendiculaire à $\vec{e_\varphi} \Longrightarrow \vec{\Omega}_2 = \dot{\theta}\vec{e_\varphi}$

   et le vecteur rotation de $\vec{e_r}$ dans $\mathcal{R}$ est $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e_\varphi}$ et qui est par la même occasion le vecteur rotation de la base sphérique dans $\mathcal{R}$.
   En utilisant le résultat de la question précédente, nous obtenons

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e_r} = \left(\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e_\varphi}\right) \wedge \vec{e_r}.$$

   Or $\vec{k} = \cos\theta\vec{e_r} - \sin\theta\vec{e_\theta}$, ce qui donne $\vec{k} \wedge \vec{e_r} = (\cos\theta\vec{e_r} - \sin\theta\vec{e_\theta}) \wedge \vec{e_r} = \sin\theta\vec{e_\varphi}$ et $\vec{e_\varphi} \wedge \vec{e_r} = \vec{e_\theta}$ ce qui implique

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \dot{\varphi}\sin\theta\vec{e_\varphi} + \dot{\theta}\vec{e_\theta}.$$

   De la même manière, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} &= \vec{\Omega} \wedge \vec{e_\theta} = \left(\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e_\varphi}\right) \wedge \vec{e_\theta} \\ &= \dot{\varphi}\cos\theta\vec{e_\varphi} - \dot{\theta}\vec{e_r}.\end{aligned}$$

---

1. un parmis ceux qui sont mobiles. Dans l'exemple précédent, on ne peut pas prendre $\vec{k}$ car il est fixe.
2. on peut avoir le cas où plusieurs angles sont mis en jeu, c'est le cas de la base sphérique.

Nous avons utilisé $\vec{k} \wedge \vec{e_\theta} = \cos\theta\vec{e_\varphi}$. Et enfin,

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt} &= \vec{\Omega} \wedge \vec{e_\varphi} = \left(\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e_\varphi}\right) \wedge \vec{e_\varphi} \\ &= \dot{\varphi}\left(\cos\theta\vec{e_r} - \sin\theta\vec{e_\theta}\right) \wedge \vec{e_\varphi} = -\dot{\varphi}\left(\cos\theta\vec{e_\theta} + \sin\theta\vec{e_r}\right)\end{aligned}$$

*Pour les exercices 3,4 et 5, calculer les expressions lintérales des grandeurs demandées et faire l'application numérique.*

# Corrigé 3 : Mouvement rectiligne

On effectue un test d'accélération sur une voiture arrêtée au départ (vitesse initiale $v_0 = 0$). La route est rectiligne.
Soit $\mathcal{R}(Oxyz)$ un référentiel tel que la route est confondue avec l'axe $Ox$. Aussi la position de la voiture à un instant donné est repérée par $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$. On considère qu'à l'instant initial $t = 0$, la voiture se trouve en $O$ et donc $x_0 = 0$. Notons aussi que la vitesse initiale est nulle $v_0 = 0$.

1. La voiture est chronométrée à $20s$ au bout d'une distance $D = 140$m. Notons par $x_D = D = 140$ m et $t_D = 20s$.

   **1-a)** Comme $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} \Longrightarrow \vec{\gamma} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{i} = \gamma\vec{i}$. En intégrant, sachant que l'accélération est constante,

   $$\ddot{x} = \gamma \Longrightarrow \dot{x} = v = \gamma t + v_0 = \gamma t \Longrightarrow x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + x_0 = \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

   Nous avons utilisé $v_0 = 0$ et $x_0 = 0$. Ainsi l'accélération est donnée par

   $$\gamma = \frac{2x_D}{t_D^2}.$$

   **A.N. :** $x_D = 140$ **m et** $t_D = 20$ **s** $\Longrightarrow \gamma = \frac{2\times140}{20} = 14ms^{-2}$.

   **1-b)** L'expression de la vitesse est donnée par

   $$v = \gamma t \Longrightarrow v_D = \gamma \times t_D.$$

   **A.N. :** $v_D = 14 \times 20 = 280ms^{-1}$.

2. La voiture décélère à partir de $x = x_D$ et l'accélération est $\gamma' = -8ms^{-2}$. Changeons d'origine et prenons cette position et cet instant comme origines respectivement de $x$ et de $t$. Alors, nous avons

   $$\ddot{x} = \gamma' \Longrightarrow \dot{x} = v = \gamma' t + v_D \Longrightarrow x = \frac{1}{2}\gamma' t^2 + v_D t.$$

   La voiture s'arrête au bout d'un temps $t_a$, c'est à dire $v(t = t_a) = 0 \Longrightarrow t_a = -v_D/\gamma'$. Rappelons que $\gamma' < 0$. Ainsi la distance d'arrêt $L$ est donnée par

   $$L = x(t = t_a) = \frac{1}{2}\gamma' t_a^2 + v_D t_a = \frac{1}{2}\gamma'\frac{v_D^2}{\gamma'^2} - \frac{v_D^2}{\gamma'} = -\frac{1}{2}\frac{v_D^2}{\gamma'}.$$

   **A.N. :** $L = \frac{1}{2} \times \frac{280^2}{8} = 2025$ **m.**

## Corrigé 4 : Excès de vitesse

Un conducteur roule à une vitesse constante $v_0 = 120$ km h $^{-1}$ sur une route réctiligne dépassant la limite autorisée. Un gendarme à moto démarre à l'instant où la voiture passe à sa hauteur et accélère uniformément. Le gendarme atteint la vitesse 100 km h $^{-1}$ au bout de $12s$.
Soit $\mathcal{R}(Oxyz)$ un référentiel et on prend la route parallèle à l'axe $Ox$. A l'instant $t = 0$, où la voiture passe, le gendarme est en $O$. La position de la voiture est repérée par $x_V = v_0 t$, puisque la voiture roule à la vitesse constante $v_0$.

1. Etablissons les équations de mouvement de la moto, repérée par $x_m$, et la voiture repérée par $x_V$.
   La moto accélère uniformément, ce qui implique que $\gamma_m$ =constante. La moto démarre, ce qui implique que $v_{0m} = 0$. Aussi,
   $$\ddot{x}_m = \gamma_m \Longrightarrow v_m = \dot{x}_m = \gamma_m t + v_{0m} = \gamma t \Longrightarrow x_m = \frac{1}{2}\gamma_m t^2 + x_{0m} = \frac{1}{2}\gamma_m t^2.$$
   Quant à la voiture, comme son mouvement est uniforme, la vitesse est constante, alors la position de la voiture à l'instant $t$ est $x_V = v_0 t + x_{0V} = v_0 t$. Le temps $t_r$ nécessaire au gendarme pour rattraper la voiture est le temps au bout duquel $x_m(t = t_r) = x_V(t = t_r)$ ce qui implique
   $$\frac{1}{2}\gamma_m t_r^2 = v_0 t_r \Longrightarrow t_r = \frac{2v_0}{\gamma_m}.$$
   Or la moto atteint la vitesse $v_1 = 100$ km h $^{-1}$ au bout de $t_1 = 12$ s. Comme $v_m = \gamma_m t \Longrightarrow \gamma_m = v_1/t_1$. Ainsi
   $$t_r = \frac{2v_0 t_1}{v_1}.$$
   **A.N. :** $v_0/v_1 = 1.2$ **et** $t_r = 2 \times 12 \times 1.2 = 28.8$ **s.**
2. La distance $L$ parcourue par le gendarme à $t_r$ est alors égale à
   $$L = \frac{1}{2}\gamma_m t_r^2 = \frac{1}{2}\frac{v_1}{t_1}\frac{4 \times v_0^2 t_1^2}{v_1^2} = 2\frac{v_0^2}{v_1}t_1.$$
   **A.N. :** $t_1 = 12/3600 = 0.00333h$**, et** $L = 2 \times 1.2 \times 100 \times 0.00333 = 0.8km$**.**
3. La vitesse atteinte par la moto est
   $$v_r = \gamma_m t_r = \frac{v_1}{t_1}\frac{2v_0 t_1}{v_1} = 2v_0.$$
   **A.N. :** $v_r = 2 \times 100 = 200$ **km h** $^{-1}$.

# Corrigé 5 : Mouvement circulaire uniforme

Considérons un satellite géostationnaire en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre sur une orbite de rayon $r$. Il est soumis à une accélération $\gamma = g_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2$, où $g_0 = 9.81\text{m s}^{-2}$ et $R = 6400$ km , le rayon de la Terre. La période de révolution du satellite est égale à la période de rotation de la Terre sur elle même.
Soit $\mathcal{R}(O, xyz)$ le référentiel lié au centre de la terre. Comme le mouvement est circulaire, nous utilisons les coordonnées polaires pour décrire le mouvement du satellite que l'on note par $M$.

1. La période $T$ de rotation de la Terre est égale à

$$T = 24 \times 3600 = 86400s.$$

Comme la vitesse angulaire $\Omega$ est reliée à la période $T$ par $\Omega = 2\pi/\Omega$, nous avons

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = 7.27\,10^{-5}\text{rad s}^{-1}.$$

2. Pour déterminer l'altitude de l'orbite géostationnaire, calculons d'abord son rayon $r$. Pour ce faire, calculons l'accélération du satellite.
Le vecteur position est $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e_\rho} \Longrightarrow \vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$. L'accélération est ainsi donnée par

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\vec{e_\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\right)\vec{e_\varphi}.$$

Comme le mouvement est circulaire alors $\rho = r = \text{Constante} \Longrightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$. Le mouvement est aussi uniforme alors le module de la vitesse est constant, ce qui implique que $V(M/\mathcal{R}) = r\dot{\varphi} = \text{Constante} \Longrightarrow \dot{\varphi} = \text{Constante}$, résultat que l'on connait déjà puisque $\dot{\varphi} = \Omega$. D'où l'expression de l'accélération se réduit à

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = -r\dot{\varphi}^2\vec{e_\rho} \Longrightarrow \gamma = r\dot{\varphi}^2 = g_0\left(\frac{R}{r}\right)^2$$

on en déduit que le rayon de l'orbite est donné par

$$r^3 = g_0\left(\frac{R}{\Omega}\right)^2 \Longrightarrow r = g_0^{1/3}\left(\frac{R}{\Omega}\right)^{2/3}.$$

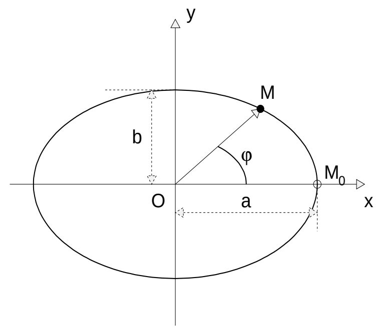
L'altitude de l'orbite $h$ est ainsi donnée par

$$h = r - R = g_0^{1/3}\left(\frac{R}{\Omega}\right)^{2/3} - R.$$

**A.N. :** $r = 42200$ **km et** $h = r - R = 36000$ **km.**

# Corrigé 6 : Mouvement sur une ellipse

Un point matériel $M$ se déplace sur une ellipse d'équation en coordonnées cartésiennes $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, voir figure ci-contre. la direction de $\overrightarrow{OM}$ par rapport à l'axe $Ox$ est repérée par l'angle $\varphi$. L'équation horaire du mouvement de $M$ peut se mettre sous la forme $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi)$ et $y(t) = y_0 \sin(\omega \mathrm{t} + \psi)$ où l'on suppose que $\omega$ est une constante. A l'instant $t = 0$, $M$ se trouvait en $M_0$.




1. A l'instant initial $t = 0$, le point matériel $M$ se trouvait en $M_0$, ce qui implique que $x(t = 0) = a$ avec $\phi(t = 0) = 0$ et $y(t = 0) = 0 = y_0 \sin\psi$. Ainsi, nous avons $x_0 = a$ et $\psi = 0$.
   Pour déduire $y_0$, il suffit de se rappeler que $x_0$ et $y_0$ vérifient l'équation de l'ellipse, ce qui donne
   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \cos^2\omega t + \frac{y_0^2}{b^2}\sin^2\omega t = 1.$$
   Or cette dernière équation n'est vérifiée $\forall t$ que si $y_0 = b$. On en conclut que $x(t) = a\cos\omega t$ et $y(t) = b\sin\omega t$.
2. Pour obtenir les composantes de la vitesse et de l'accélération, il suffit de dériver $x(t)$ et $y(t)$ en tenant compte que $\omega$ est constante :
   $$\begin{aligned} \dot{x} &= -a\omega\sin\omega t \text{ et } \dot{y} = b\omega\cos\omega t \\ \ddot{x} &= -a\omega^2\cos\omega t \text{ et } \ddot{y} = -b\omega^2\sin\omega t \end{aligned}$$
   ce qui donne pour les composantes cartésiennes de la vitesse $(-a\omega\sin\omega t, b\omega\cos\omega t)$ et celles de l'accélération $(-a\omega^2\cos\omega t, -b\omega^2\sin\omega t)$.
3. Partant des composantes de l'accélération
   $$\vec{\gamma} = -\omega^2\left(a\cos\omega t, b\sin\omega t\right) = -\omega^2\overrightarrow{OM}$$
   ce qui implique que $k = \omega^2$.