# Mécanique du Point Matériel

**Mohamed EL KACIMI**

Université Cadi Ayyad - Faculté des Sciences Semlalia
Département de Physique

*Année Universitaire 2019/2020*

# Chapitre VI : Système de deux points matériels

# Chapitre VI : Système de deux points matériels

# Introduction

Ce chapitre sera consacré à l'étude des chocs, que l'on appelle aussi des collisions, entre deux particules qui seront considérées comme des points matériels. Les deux particules seront considérées comme un système isolé.

***Définition***

On appelle par un choc ou une collision entre deux particules lorsque celles-ci interagissement lors d'un laps de temps court. Les interactions mises en jeu sont de courtes portée.

Lors d'un choc, on distingue trois phases :

• Etat initial : les points matériels sont loins l'un de l'autre. on considère qu'ils sont libres $\Longrightarrow$ ils ont un mouvement rectiligne uniforme $\Longrightarrow$ Vitesses initiales constantes.

• Phase d'interaction : les points matériels interagissent mutuellement pendant un cours laps de temps et dans une région de l'espace très réduite $\Longrightarrow$ ne fait pas l'objet de ce cours.

• Etat final : les points matériels ont de nouveau éloignés l'un de l'autre et sont considérés libres $\Longrightarrow$ Mouvement rectiligne uniforme $\Longrightarrow$ Vitesses finales constantes.

# Chapitre VI : Système de deux points matériels

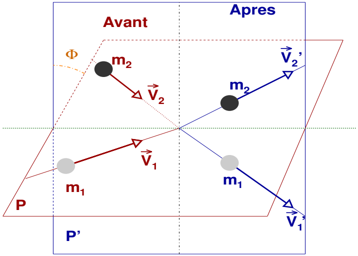
# Loi de conservation de la quantité de mouvement

## Quelques notations

$\mathcal{R}$ un référentiel galiléen. Considérons deux points matériels $M_1$ et $M_2$ de masses respectives $m_1$ et $m_2$ et de vitesses par rapport à $\mathcal{R}$ à l'état initial respectivement $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

Les vitesses de $M_1$ et de $M_2$ dans $\mathcal{R}$ à l'état final, après le choc, sont respectivement $\vec{V}'_1$ et $\vec{V}'_2$.

Notons que les vitesses initiales et finales appartiennent en général à deux plans différents. Soient $\vec{P}_1 = m_1\vec{V}_1$, $\vec{P}_2 = m_2\vec{V}_2$, $\vec{P}'_1 = m_1\vec{V}'_1$ et $\vec{P}'_2 = m_2\vec{V}'_2$ les quantités de mouvement respectivement à l'état initial et à l'état final de $M_1$ et de $M_2$.



# Loi de conservation de la quantité de mouvement

## Suite ...

Les deux points matériels forment un système pseudoisolé. L'application du PFD dans $\mathcal{R}$ donne

$$\boxed{\sum_{i=1}^{2} \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \vec{0} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{2} \vec{P}_i = \overrightarrow{Cste}.}$$

La quantité de mouvement totale du système formé par les deux point matériels $M_1$ et $M_2$ est conservée au cours du choc. On en conclut qu'elle a la même valeur avant et après le choc

$$\boxed{\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2}$$

Rappelons que l'objectif est de déterminer les vitesses de l'état final $\Longrightarrow$ Six inconnues, chacune des vitesses a trois composantes.

$\Longrightarrow$On ne peut résoudre le problème que dans des conditions particulières qui fixent les trois équations qui manquent.

# Chapitre VI : Système de deux points matériels

# Etude du choc dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$

## Un mot sur les forces internes

Considérons que les forces internes soient conservatives et soit $E_p^{int}$ leur énergie potentielle. Soit $U_i$ l'énergie interne du système formé par les deux point matériels. Alors l'énergie mécanique totale est donnée par $E_m = E_{c1} + E_{c1} + E_p^{int}$. L'énergie totale est égale à $E_{tot} = E_m + U_i$.

***Remarques***

$\Longrightarrow$ Comme les points matériels sont conidérés quasiment libres en dehors de la zone d'interaction alors $E_p^{int} \to 0$

$\Longrightarrow$ La quantité de mouvement totale $\vec{P}_1 + \vec{P}_2$ est toujours conservée, que les forces internes soient conservatives ou non.

# Etude du choc dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$

## Choc élastique

***Définition***

Un choc est dit élastique si les forces internes sont conservatives et l'énergie interne $U_i$ des deux particules est la même avant et après le choc. On en déduit

$$\begin{aligned} E_{tot}^{avant} = E_{tot}^{avant} \Longrightarrow E_m^{avant} + E_p^{int} + U_i^{avant} &= E_m^{aprs} + E_p^{int} + U_i^{aprs} \\ \Longrightarrow E_{c1}^{avant} + E_{c2}^{avant} &= E_{c1}^{aprs} + E_{c2}^{aprs}. \end{aligned}$$

### Relations entre les vitesses

A partir de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement et de celle de l'énergie cinétique, nous avons

$$\left\{ \begin{aligned} m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 &= m_1\vec{V}'_1 + m_2\vec{V}'_2 \\ \frac{1}{2}m_1 V_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2 V_2{}^2 &= \frac{1}{2}m_1 V'_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2 V'_2{}^2 \end{aligned} \right.$$

Six inconnues $\{V'_{ix}, V'_{iy}, V'_{iz}, i = 1, 2\}$ et seulement Quatre équations $\Longrightarrow$ Considérer des cas particuliers.

# Etude du choc dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$

## Choc élastique

### Cas où $M_1$ et $M_2$ identiques et $M_2$ au repos dans $\mathcal{R}$

les équations précédentes deviennent en prenant $m_1 = m_2$ et $V_2 = 0$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \vec{V}_1 & = & \vec{V}'_1 + \vec{V}'_2 \\ {V_1}^2 & = & {V'_1}^2 + {V'_2}^2. \end{array}\right.$$

$\Longrightarrow$ $\vec{V}_1$, $\vec{V}'_1$ et $\vec{V}'_2$ forment un triangle rectangle, étant donnée que la deuxième équation n'est d'autre que la relation de pythagore $\Longrightarrow$ $\vec{V}'_1 \perp \vec{V}'_2 \longrightarrow$ 5$^{\text{ème}}$ équation.

Il nous faut une donnée supplémentaire pour résoudre le problème : On donne $\theta_1 = \left(\widehat{\vec{V}_1, \vec{V}'_1}\right)$

Les solutions seront paramétrées par $\theta_1$ :

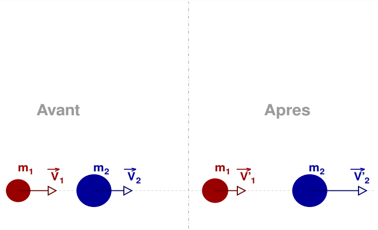
$$\begin{array}{lcl} V'_1 & = & \cos\theta_1 V_1 \\ V'_2 & = & \sin\theta_1 V_1. \end{array}$$

# Etude du choc dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$

## Choc élastique

### Cas d'un choc direct

Un choc direct est un choc dans lequel les vitesses de l'état initial et de l'état final sont colinéaires. Le système d'équations dans ce cas devient




$$\begin{cases} m_1\left(V_1 - V'_1\right) = -m_2\left(V_2 - V'_2\right) \\ m_1\left(V_1 - V'_1\right)\left(V_1 + V'_1\right) = -m_2\left(V_2 - V'_2\right)\left(V_2 + V'_2\right) \end{cases}$$

ce qui donne $V_1 + V'_1 = V_2 + V'_2$, et en substituant $V'_2$ dans la première équation, nous obtenons

$$V'_1 = \frac{2m_2V_2 + (m_1 - m_2)V_1}{m_1 + m_2}$$

$$V'_2 = \frac{2m_1V_1 + (m_2 - m_1)V_2}{m_1 + m_2}.$$

# Etude du choc dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$

## Choc élastique

### Cas d'un choc direct

**Remarques**

- **Si** $m_1 = m_2$ **alors** $V'_1 = V_2$ **et** $V'_2 = V_1$.
- **Si** $V_2 = 0$, $M_2$ **est au repos dans l'état initial, alors**

$$V'_1 = \frac{(m_1 - m_2) V_1}{m_1 + m_2}$$
$$V'_2 = \frac{2m_1V_1}{m_1 + m_2}.$$

- **Si** $m_1 \ll m_2$, **alors**

$$V'_1 \simeq \frac{2m_2V_2 - m_2V_1}{m_2} = 2V_2 - V_1$$
$$V'_2 \simeq V_2.$$

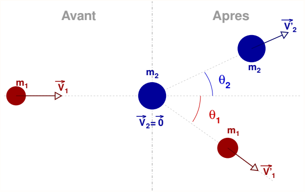
- **Dans le cas d'un choc frontal, il suffit de substituer** $V_2$ **par** $-V_2$.

# Etude du choc dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$

## Choc élastique

### Cas où $M_2$ est immobile : $\vec{V}_2 = \vec{0}$.

Le choc a lieu dans ce cas dans le même plan. En projetant les vitesses et en utilisant la conservation de $E_c$,




$$\begin{aligned} m_1 V_1 &= m_1 V'_1 \cos\theta_1 + m_2 V'_2 \cos\theta_2 \\ m_1 V'_1 \sin\theta_1 &= m_2 V'_2 \sin\theta_2 \\ \tfrac{1}{2} m_1 {V_1}^2 &= \tfrac{1}{2} m_1 {V'_1}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 {V'_2}^2. \end{aligned}$$

nous obtenons

$$ {m_1}^2 {V_1}^2 - 2 m_1^2 V_1 V'_1 \cos\theta_1 + {m_1}^2 {V'_1}^2 = m_1 m_2 \left( {V_1}^2 - {V'_1}^2 \right)$$

ce qui donne l'équation de second ordre en $V'_1$

$$ {V'_1}^2 \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) - 2 V_1 V'_1 \cos\theta_1 + \left( 1 - \frac{m_2}{m_1} \right) {V_1}^2 = 0$$

La solution sera donnée en fonction $\theta_1$. Voir TD pour le détail.

# Etude du choc dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$

## Choc inélastique

### Définition

On dit qu'un choc est inélastique lorsqu'il y a dissipation de l'énergie au cours de la phase d'interaction.

$\Longrightarrow$ $E_c$ n'est pas conservée.

### Choc complétement inélastique(choc mou)

Un choc est totalement inélastique lorsque les points matériels ont la même vitesse finale $\vec{V}'_1 = \vec{V}'_2 = \vec{V}'$.

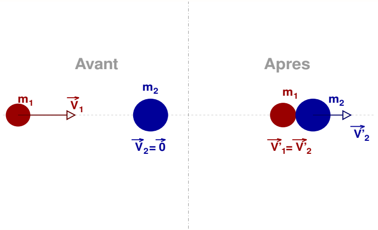
$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}'_1 + m_2\vec{V}'_2 = (m_1 + m_2)\,\vec{V}'$$

ce qui donne

$$\vec{V}' = \frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}{m_1 + m_2}.$$

Si le point matériel $M_2$ est au repos, alors la vitesse finale $\vec{V}'$ devient

$$\vec{V}' = \frac{m_1\vec{V}_1}{m_1 + m_2}.$$



# Chapitre VI : Système de deux points matériels

# Etude du choc dans le réf. du centre de masse $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$

## Centre de masse $G$

### Définition

Le centre de masse $G$ des points matériels $M_1$ et $M_2$ est défini par

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM}_1 + m_2\overrightarrow{OM}_2}{m_1 + m_2}}$$

où $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OM}_1$ et $\overrightarrow{OM}_2$ sont les vecteurs position respectivement de $G$, $M_1$ et $M_2$.

### Remarque

La définition peut être étendue à un nombre quelconque de points matériels sans difficulté.

# Etude du choc dans le réf. du centre de masse $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$

## Référentiel du centre de masse $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$

$\mathcal{R}_{\mathcal{G}}(G, GX, GY, GZ)$ : d'origine $G$ et dont les trois axes $(GX)$, $(GY)$ et $(GZ)$ sont constamment parallèles respectivement aux axes $(OX)$, $(OY)$ et $(OZ)$ du référentiel $\mathcal{R}$

## Vitesse et accélération de G par rapport $\mathcal{R}$

$$\vec{V}_G = \vec{V}(G/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}{m_1 + m_2}.$$

$$\vec{\gamma}_G = \left.\frac{d\vec{V}_G}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}\right|_{\mathcal{R}} = \frac{1}{m_1 + m_2}\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right) = \vec{0}$$

**Définition :** Le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ d'un système de points matériels est un référentiel dont l'origine est formée par le centre de masse $G$ et dont les trois axes restent constamment parallèles à ceux du référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$.

**Remarque :** $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ est en translation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ est galiléen.

# Etude du choc dans le réf. du centre de masse $\mathcal{R}_\mathcal{G}$

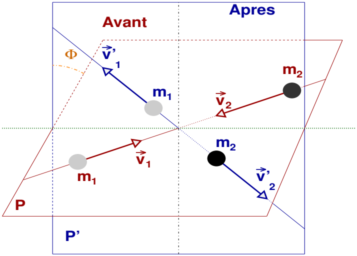
## Lois de conservation dans $\mathcal{R}_\mathcal{G}$

**Vitesses dans $\mathcal{R}_\mathcal{G}$ :**

$$\begin{aligned} \vec{v}_i &= \vec{V}_i - \vec{V}_G \\ \vec{v}'_i &= \vec{V}'_i - \vec{V}_G \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

**Conservation de la quantité de mouvement dans $\mathcal{R}_\mathcal{G}$ :**

$$\sum_{i=1,2} \left.\frac{d\vec{p}_i}{dt}\right|_{\mathcal{R}_\mathcal{G}} = \vec{0} \Longrightarrow \sum_{i=1,2} \vec{p}_i = \overrightarrow{Ct}$$




**En appliquant la loi de composition des vitesses, nous obtenons**

$$\begin{aligned} \sum_{i=1,2} \vec{p}_i &= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \\ &= m_1\left(\vec{V}_1 - \vec{V}_G\right) + m_2\left(\vec{V}_2 - \vec{V}_G\right) \\ &= m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 - (m_1 + m_2)\vec{V}_G \end{aligned}$$

# Etude du choc dans le réf. du centre de masse $\mathcal{R}_\mathcal{G}$

## Lois de conservation dans $\mathcal{R}_\mathcal{G}$

En utilisant l'expression de $\vec{V}_G = \left(m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2\right) / (m_1 + m_2)$, nous aboutissons à

$$\boxed{\sum_{i=1,2} \vec{p}_i = \vec{0}.}$$

### Remarques

- La quantité de mouvement totale est conservée et nulle dans $\mathcal{R}_\mathcal{G}$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{0} = m_1\vec{v}\,'_1 + m_2\vec{v}\,'_2.$$

- A partir des relations précédentes, on déduit

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \quad \textbf{et} \quad \vec{p}\,'_1 = -\vec{p}\,'_2 \Longrightarrow (\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}) = \pi \ \textbf{et}\ (\widehat{\vec{v}\,'_1, \vec{v}\,'_2}) = \pi$$

# Etude du choc dans le réf. du centre de masse $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$

## Energie cinétique $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$

**En substituant dans l'expression de l'énergie cinétique les vitesses dans $\mathcal{R}$ en fonction de celles dans $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$, on obtient**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}m_1{V_1}^2+\frac{1}{2}m_2{V_2}^2 &= \frac{1}{2}m_1\left(\vec{v}_1+\vec{V}_G\right)+\frac{1}{2}m_2\left(\vec{v}_2+\vec{V}_G\right)\\
&= \frac{1}{2}m_1{v_1}^2+m_1\vec{v}_1\cdot\vec{V}_G+\frac{1}{2}m_1\vec{V}_G^2+\frac{1}{2}m_2{v_2}^2+m_2\vec{v}_2\cdot\vec{V}_G+\frac{1}{2}m_2\vec{V}_G^2\\
&= \frac{1}{2}m_1{v_1}^2+\frac{1}{2}m_2{v_2}^2+\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)\vec{V}_G^2+\left(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2\right)\cdot\vec{V}_G
\end{aligned}$$

**or** $m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=\vec{0}$**, alors**

$$\frac{1}{2}m_1{V_1}^2+\frac{1}{2}m_2{V_2}^2 = \frac{1}{2}m_1{v_1}^2+\frac{1}{2}m_2{v_2}^2+\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)\vec{V}_G^2.$$

**On en conclut que l'énergie cinétique dans $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ est donnée par**

$$\boxed{\tfrac{1}{2}m_1{v_1}^2+\tfrac{1}{2}m_2{v_2}^2=\tfrac{1}{2}m_1{V_1}^2+\tfrac{1}{2}m_2{V_2}^2-\tfrac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)\vec{V}_G^2.}$$

# Etude du choc dans le réf. du centre de masse $\mathcal{R}_\mathcal{G}$

## Energie cinétique $\mathcal{R}_\mathcal{G}$

Réexprimons l'énergie cinétique dans $\mathcal{R}_\mathcal{G}$, en utilisant la propriété $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = -\vec{p}$

$$\frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 \quad = \quad \frac{p^2}{2m_1} + \frac{p^2}{2m_2} = \frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{p^2}{2\mu}.$$

avec $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ appelée la masse réduite.

On pose $\vec{p} = \mu\vec{v}$ et on montre que (voir polycopié du cours)

$$\vec{v} = \vec{V}_G + \vec{v}_2 = \vec{V}_G + \vec{v}_2 - \left(\vec{V}_G + \vec{v}_1\right) = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$$

On en conclut que l'énergie cinétique dans $\mathcal{R}_\mathcal{G}$ est égale à celle d'une particule "fictive" de masse $\mu$ et de vitesse dans $\mathcal{R}_\mathcal{G}$ égale à $\vec{v} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ :

$$\boxed{\frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 = \frac{1}{2}\mu v^2.}$$

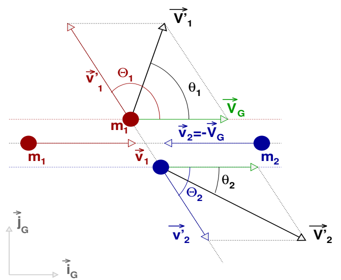
# Etude du choc dans le réf. du centre de masse $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$

## Choc élastique

Nous traitons le cas où $M_2$ est immobile dans $\mathcal{R}$ c'est à dire $\vec{v}_2 = \vec{V}_2 - \vec{V}_G = -\vec{V}_G$,

Conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique dans $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$ donne

$$\begin{cases} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0} \\ \vec{p}\,'_1 + \vec{p}\,'_2 = \vec{0} \\ \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 = \frac{1}{2}m_1{v'_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v'_2}^2. \end{cases}$$




Nous utiliserons $\Theta_1$ comme donnée supplémentaire et obtenons (voir polycopié du cours)

$$\begin{cases} \vec{v}\,'_1 = \frac{m_2}{m_1}V_G\left(\cos\Theta_1\vec{i}_G + \sin\Theta_1\vec{j}_G\right) \\ \vec{v}\,'_2 = V_G\left(\cos\Theta_2\vec{i}_G + \sin\Theta_2\vec{j}_G\right) = V_G\left(-\cos\Theta_1\vec{i}_G + \sin\Theta_1\vec{j}_G\right) \end{cases}$$