# Mécanique du Point Matériel

**Mohamed EL KACIMI**

**Université Cadi Ayyad - Faculté des Sciences Semlalia**
**Département de Physique**

***Année Universitaire 2016/2017***

# Chapitre IV : Théorèmes généraux de la dynamique du point matériel

## Sommaire

1. Introduction

2. Moments et théorème du moment cinétique

3. Théorème du moment cinétique

4. Travail et Puissance d'une Force. Théorème de l'énergie cinétique

5. Théorème de l'énergie mécanique. Equilibre d'un point matériel.

# Chapitre IV : Théorèmes généraux de la dynamique du point matériel

1. Introduction

2. Moments et théorème du moment cinétique

3. Théorème du moment cinétique

4. Travail et Puissance d'une Force. Théorème de l'énergie cinétique

5. Théorème de l'énergie mécanique. Equilibre d'un point matériel.

# Introduction

Les théorèmes généraux que l'on va traiter dans ce chapitre permettent de tirer les propriétés des relations fondamentales de la dynamique en définissant de nouvelles grandeurs à même de résoudre de manière simplifiée une classe de problèmes de mécanique du point matériel.

# Chapitre IV : Théorèmes généraux de la dynamique du point matériel

1. Introduction

2. **Moments et théorème du moment cinétique**

3. Théorème du moment cinétique

4. Travail et Puissance d'une Force. Théorème de l'énergie cinétique

5. Théorème de l'énergie mécanique. Equilibre d'un point matériel.

# Moments et théorème du moment cinétique

## Moment d'une force par rapport à un point $O$

Le moment d'une force $\vec{F}$, appliquée en un point $M$, par rapport à un point $O$ est défini par

$$\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

L'unité de $\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F})$ dans le système international est le $mN$.
Noter que l'énergie s'exprime aussi en $mN$ ou en Joule mais les deux grandeurs ne sont pas de même nature : l'énergie est un scalaire alors que le moment d'une force est un vecteur.

# Moments et théorème du moment cinétique

## Moment d'une force par rapport à un point $O$

### Remarques

- Le vecteur $\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F})$ est perpendiculaire à $\vec{F}$ et à $\overrightarrow{OM}$ et son sens est tel que $(\overrightarrow{OM}, \vec{F}, \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}))$ forme un trièdre direct ;
- $\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) = \vec{0}$ si $\overrightarrow{OM}$ est parallèle avec $\vec{F}$ ou si le support de $\vec{F}$ passe par $O$ ;
- $\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F})$ est maximal lorsque $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$ sont perpendiculaires ;
- $\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F})$ ne dépend pas de la position du point d'application de $\vec{F}$ sur la droite support de $\vec{F}$ ;
- Pour un point $O'$ quelconque, nous avons $\vec{\mathcal{M}}_{o'}(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F}$.

# Moments et théorème du moment cinétique

## Moment d'une force par rapport à un axe ($\Delta$)

Le moment de $\vec{F}$ par rapport à un axe $\Delta$ quelconque passant par $O$ est le scalaire

$$\mathcal{M}_\Delta = \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) \cdot \vec{u} \quad \vec{u} \text{ un vecteur unitaire de l'axe } \Delta.$$

$\mathcal{M}_\Delta$ est indépendant de $O \in \Delta$. En effet, soit $O'$ un point de l'axe $(\Delta)$,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_{o'}(\vec{F}) &= \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F} \\ \Longrightarrow \vec{\mathcal{M}}_{o'}(\vec{F}) \cdot \vec{u} &= \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) \cdot \vec{u} + \left(\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{u} \\ \Longrightarrow \vec{\mathcal{M}}_{o'}(\vec{F}) \cdot \vec{u} &= \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

car les vecteurs $\overrightarrow{O'O}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

# Moments et théorème du moment cinétique

## Moment cinétique

Le moment cinétique d'une masse $m$ de quantité de mouvement $\vec{P}$ par rapport à $\mathcal{R}$, située au point $M$, par rapport à un point $O$, est défini par

$$\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}).$$

L'unité du moment cinétique est le $\mathbf{kg\ m^2 s^{-1}}$.

Remarques :

- Le point $O$ peut être mobile dans $\mathcal{R}$ ;
- $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$ dépend du référentiel dans lequel on exprime la vitesse de la masse ;
- Le trièdre $(\overrightarrow{OM}, \vec{P}, \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}))$ est direct.

# Moments et théorème du moment cinétique

## Moment cinétique par rapport à un axe $\Delta$

**Si $(\Delta)$ est un axe passant par $O$ et de vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$, le moment cinétique par rapport à $(\Delta)$ est donné par**

$$\sigma_\Delta = \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

# Chapitre IV : Théorèmes généraux de la dynamique du point matériel

1. Introduction

2. Moments et théorème du moment cinétique

3. **Théorème du moment cinétique**

4. Travail et Puissance d'une Force. Théorème de l'énergie cinétique

5. Théorème de l'énergie mécanique. Equilibre d'un point matériel.

# Théorème du moment cinétique

A l'instar du principe fondamental de la dynamique qui relie la variation de la quantité de mouvement à la force appliquée, le théorème du moment cinétique établit un lien entre la variation du moment cinétique et le moment de la résultante des forces appliquées.

# Théorème du moment cinétique

## Cas d'un référentiel galiléen

**Appliquons la dérivée par rapport au temps au moment cinétique**

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{OM} \wedge \left.\frac{d\vec{p}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$$

**comme** $\vec{p} = m\vec{V}(M/\mathcal{R})$ **alors**

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \left.\frac{d\vec{p}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$$

**En appliquant le principe fondamental de la dynamique,** $d\vec{p} = \vec{F}dt$**, on obtient**

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

# Théorème du moment cinétique

## Remarques

• Il est intéressant de relever la différence entre "principe" et "théorème" : le premier est une hyphothèse de travail qui est corroborée par l'expérience alors que le deuxième est démontré, parfois en se basant sur des principes, comme c'est le cas ici ;

• Ce théorème est valable même si la masse n'est pas constante, et donc applicable aussi dans le domaine relativiste, par exemple ;

• Notons que nous avons utilisé le principe fondamental de la dynamique, qui n'est valable que dans un référentiel gailéen. Aussi, le cas d'un référentiel non galiléen sera traité dans le paragraphe suivant.

• Si l'on considère le moment cinétique par rapport à un axe $(\Delta)$ passant par $O$, le théorème devient

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{u}_\Delta = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}).$$

# Théorème du moment cinétique

## Remarques

- **Si la particule est isolée, $\vec{F} = \vec{0}$, alors**

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) \text{ est un vecteur constant.}$$

- **La vitesse du point $M$ est définie par rapport au point $O$, aussi ce point doit être fixe. Le théorème reste valable par rapport à tout autre point fixe de $\mathcal{R}$.**

- **Etablissons la dérivée par rapport au temps du moment cinétique évalué par rapport à un point mobile $A$, sachant que $\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{P}(M/\mathcal{R})$**

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \wedge \vec{P}(M/\mathcal{R}) + \overrightarrow{AM} \wedge \left.\frac{d\vec{P}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$$

# Théorème du moment cinétique

## Remarques

**Si l'on fait interposer le point $O$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$ on obtient**

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{AO}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{V}(M/\mathcal{R}) - \vec{V}(A/\mathcal{R})$$

**ce qui donne**

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) + \vec{P}(M/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(A/\mathcal{R})$$

# Théorème du moment cinétique

## Cas d'un référentiel non galiléen

Appliquons le théorème du moment cinétique au point $O_1$, origine de $\mathcal{R}_1$ :

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_{o_1}(M/\mathcal{R}_1)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} = \overrightarrow{O_1M} \wedge \frac{d\vec{P}(M/\mathcal{R}_1)}{dt}$$

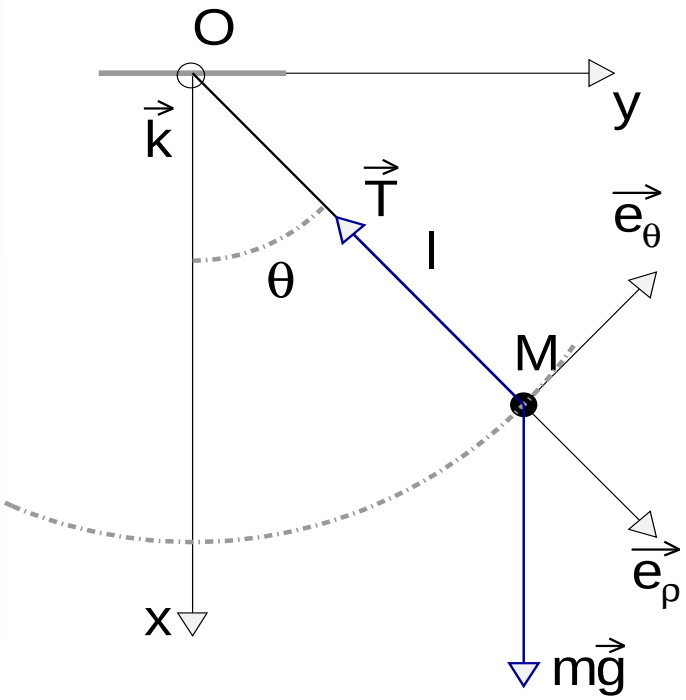
$$= \overrightarrow{O_1M} \wedge \left(\vec{F} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}\right)$$

$$= \vec{\mathcal{M}}_{O_1}(\vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic})$$

où nous avons appliqué dans cette dernière ligne le PFD dans un référentiel non galiléen.

# Exemple d'application du théorème du moment cinétique

## Etude d'un pendule simple




**Un pendule constitué d'une boule $M$ de masse $m$, que l'on peut considérer comme un point matériel, est relié à un point fixe $O$ par un fil de masse négligeable de longueur constante $l$, figure ci-contre.**
**On met le pendule en mouvement en l'écartant de sa position verticale et en le lachant sans vitesse initiale. On néglige tous les frottements.**
**Le mouvement de $M$ est dans le plan vertical et à chaque instant $t$ $M$ est repéré par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM})$. Soit $\vec{k}$ un vecteur orthogonal au plan du mouvement.**
**Retrouvons l'équation du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique.**

# Exemple d'application du théorème du moment cinétique

## Etude d'un pendule simple : Démarche à suivre

- $1^{\text{ème}}$ étape : calcul du moment cinétique :

A partir du vecteur position, $\overrightarrow{OM} = l\vec{e}_\rho$, on calcule la vitesse de $M$ par rapport $\mathcal{R}$, ce dernier étant un référentiel galiléen :

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/\mathcal{R}) &= l\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = l\dot{\theta}\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho \\ &= l\dot{\theta}\vec{e}_\theta.\end{aligned}$$

Ce qui donne pour le moment cinétique

$$\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}) = ml^2\dot{\theta}\vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\theta = ml^2\dot{\theta}\vec{k}.$$

et sa dérivée par rapport au temps dans $\mathcal{R}$ est

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = ml^2\ddot{\theta}\vec{k}.$$

# Exemple d'application du théorème du moment cinétique

## Etude d'un pendule simple : Démarche à suivre

- $2^{ème}$ étape : calcul des moments des forces appliquées

### Identification des forces appliquées :

- Poids : $\vec{p} = m\vec{g} = mg\left(\cos\theta\vec{e}_\rho - \sin\theta\vec{e}_\theta\right)$
- Tension du fil : $\vec{T} = -T\vec{e}_\rho$

### Calcul des moments :

Comme $\vec{T}//\overrightarrow{OM}$, alors le moment de $\vec{T}$ par rapport à $O$ dans $\mathcal{R}$ est nul $\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{T}) = \vec{0}$.

Il reste à calculer le moment du poids :

$$\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P}) = mgl\vec{e}_\rho \wedge \left(\cos\theta\vec{e}_\rho - \sin\theta\vec{e}_\theta\right) = -mgl\sin\theta\vec{k}.$$

# Exemple d'application du théorème du moment cinétique

## Etude d'un pendule simple : Démarche à suivre

- $3^{\text{ème}}$ étape : appliquer le théorème du moment cinétique

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F})$$

$$ml^2\ddot{\theta}\vec{k} = -mgl\sin\theta\vec{k} \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

En notant par $\omega_0^2 = \sqrt{g/l}$, la pulsation propre du pendule, l'équation du mouvement est

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0$$

qui n'admet pas de solution analytique.

# Exemple d'application du théorème du moment cinétique

## Etude d'un pendule simple : Démarche à suivre

En général, on utilise le domaine des petites oscillations, $\theta \to 0$ alors $\sin\theta \to \theta$ et l'équation devient

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

dont la solution générale est

$$\theta = \theta_m \cos\left(\omega_0 t - \varphi\right)$$

où $\theta_m$ et $\varphi$ sont déterminés à partir des conditions initiales sur $\theta$ et $\dot{\theta}$.

# Chapitre IV : Théorèmes généraux de la dynamique du point matériel

1. Introduction

2. Moments et théorème du moment cinétique

3. Théorème du moment cinétique

4. **Travail et Puissance d'une Force. Théorème de l'énergie cinétique**

5. Théorème de l'énergie mécanique. Equilibre d'un point matériel.

# Travail et Puissance d'une Force

## Travail d'une force

Le travail élémentaire ou differentiel $\delta W$ d'une force $\vec{F}$ appliquée à un point matériel $M$ lors d'un déplacement $\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{dl}$ est défini par

$$\delta W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \vec{F} \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R})dt$$

### Remarques

- Le travail a la dimension d'une énergie et exprimé en Joule.
- $\delta W$ est appelé aussi la circulation élémentaire de $\vec{F}$.
- Le travail peut être négatif ou positif :
  - Positif : travail moteur ;
  - Négatif : travail résistif.

# Travail et Puissance d'une Force

## Travail d'une force le long d'un parcours de $M$

**Pour calculer le travail de la force $\vec{F}$ le long d'un parcours $(AB)$ de $M$, il suffit d'intégrer le travail élémentaire sur le chemin suivi :**

$$\int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R})dt$$

**Notons, comme on le verra dans ce chapitre, lorsque la force est conservative, c'est à dire dérive d'un potentiel, le travail sur un trajet de $M$ ne dépend pas du chemin suivi.**

**Si $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ alors le travail total n'est que la somme des travaux développés par chacune des forces le long du chemin $(C)$ :**

$$W_{(C)}(\vec{F}/\mathcal{R}) = \sum_i W_{(C)}(\vec{F}_i/\mathcal{R}).$$

# Travail et Puissance d'une Force

## Travail d'une force le long d'un parcours de $M$

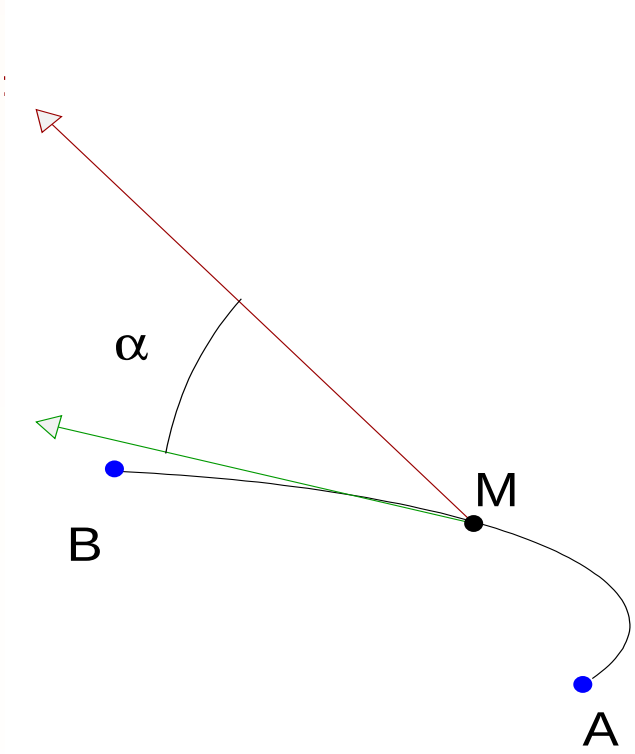



Figure: **Travail moteur :** $0 < \alpha < \pi/2$.

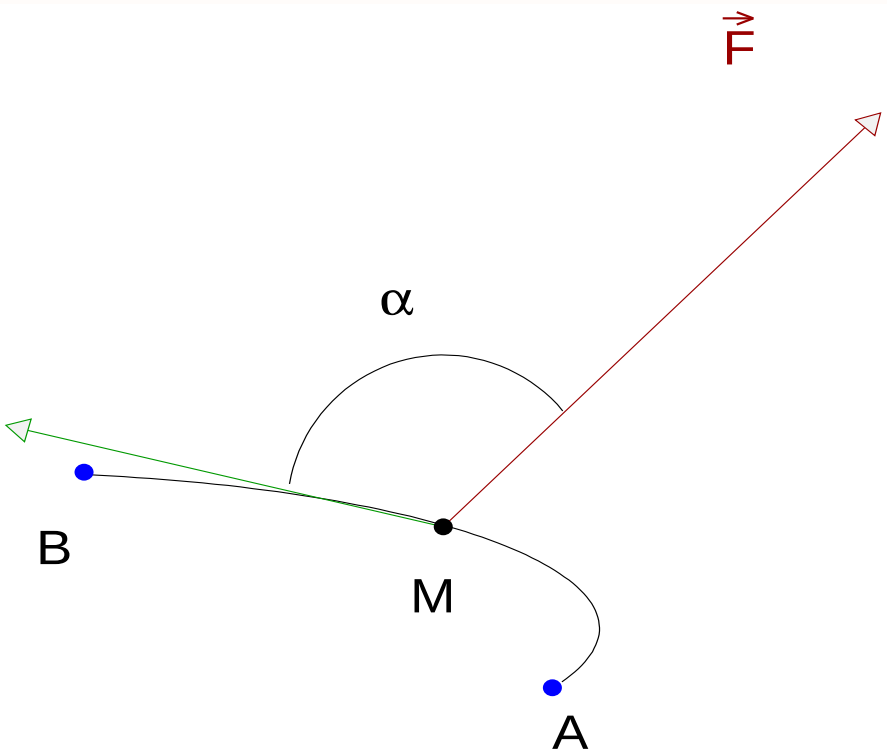



Figure: **Travail resistif :** $\pi/2 < \alpha < \pi$.

# Travail et Puissance d'une Force

## Exemple : Force constante

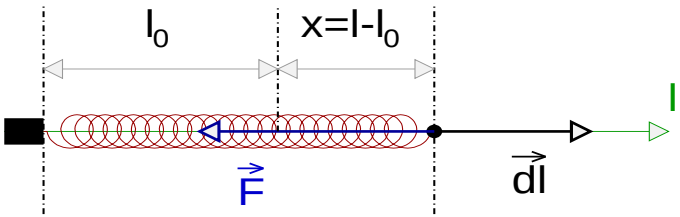
Si la force est constante, c'est très rare que cela soit le cas, le travail est

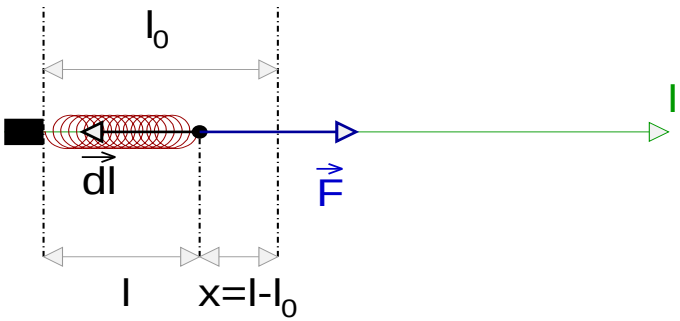
$$\begin{aligned} W_A^B &= \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \vec{F} \cdot \int_A^B \overrightarrow{dl} \\ &= \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\vec{F}\| \|\overrightarrow{AB}\| \cos\alpha \end{aligned}$$

$$\alpha = \left( \widehat{\vec{F}, \overrightarrow{AB}} \right).$$

# Travail et Puissance d'une Force

## Exemple : Force de rappel $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}$




- $k$ : **constante de raideur,** $l_0$ : **longueur à vide ;**
- $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u} = -kx\vec{u}$ **;**
- $\overrightarrow{OM} = l\vec{u} \Longrightarrow \overrightarrow{dl} = dl\vec{u} + ld\vec{u} = dl\vec{u}$ **et** $dl = dx$

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = -k(l - l_0)\vec{u} \cdot dl\vec{u} \\ &= -kxdx \\ \Longrightarrow \quad & W_A^B = -\frac{1}{2}\left(x_B^2 - x_A^2\right). \end{aligned}$$

**nous avons utilisé le fait que** $\vec{u}$ **et** $\overrightarrow{du}$ **sont perpendiculaires. Notons que le travail dans ce cas ne dépend pas du chemin suivi.**

# Travail et Puissance d'une Force

## Exemple : Force magnétique $\vec{F} = q\vec{V}(M/\mathcal{R}) \wedge \vec{B}$

**Considérons un point matériel $M$ de charge $q$ et animé d'une vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ par rapport à $\mathcal{R}$ dans une région où règne un champ magnétique constant $\vec{B}$.**

**Le travail dans ce cas est donné par**

$$\delta W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = q\left(\vec{V}(M/\mathcal{R}) \wedge \vec{B}\right) \cdot \overrightarrow{dl} = q\left(\overrightarrow{dl} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R})\right) \cdot \vec{B} = 0$$

**puisque $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et $\overrightarrow{dl}$ sont colinéaires.**

**On conclue que la force magnétique ne travaille pas.**

# Puissance

## Définition

**La puissance instantanée d'une force $\vec{F}$ dans $\mathcal{R}$ est définie à partir du travail comme suit**

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{\overrightarrow{dl}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R})$$

**L'unité de la puissance est le Watt (W).**

**Une ancienne unité de la puissance utilisée pour les automobiles est le cheval($ch$)** $(1ch = 736W)$.

# Energie cinétique

## Définition

**La notion de l'énergie cinétique combine la définition du travail et le principe fondamental de la dynamique. En effet, dans le cas où $\mathcal{R}$ est galiléen, nous avons**

$$\begin{aligned}\delta W &= \vec{F}\cdot\overrightarrow{dl} = m\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt}\cdot\overrightarrow{dl} = md\vec{V}(M/\mathcal{R})\frac{\overrightarrow{dl}}{dt}\\ &= md\vec{V}(M/\mathcal{R})\cdot\vec{V}(M/\mathcal{R}) = d\left(\frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R})\right).\end{aligned}$$

**Ainsi la quantité $\frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R})$ a la dimension d'une énergie.**

**On appelle par énergie cinétique $E_c(M/\mathcal{R})$ dans $\mathcal{R}$ d'un point matériel de masse $m$ et animée d'une vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ la quantitié**

$$E_c(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R})$$

# Théorème de l'énergie cinétique

## $\mathcal{R}$ est galiléen

**On intègre $\delta W = dE_c$ et on obtient**

$$\begin{aligned}\int_A^B \delta W &= \int_A^B dE_c \Longrightarrow W_A^B = E_{c_B}(M/\mathcal{R}) - E_{c_A}(M/\mathcal{R}) \\ &= \frac{1}{2}mV_B^2(M/\mathcal{R}) - \frac{1}{2}mV_A^2(M/\mathcal{R}).\end{aligned}$$

**La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants $t_1$ et $t_2$ est égale au travail des forces appliquées entre ces deux instants.**

$$\tfrac{1}{2}mV_B^2(M/\mathcal{R}) - \tfrac{1}{2}mV_A^2(M/\mathcal{R}) = W_A^B$$

**On peut exprimer le théorème de l'énergie cinétique sous la forme suivante**

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{\vec{dl}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}) = P(\vec{F})$$

**La variation par rapport au temps de l'énergie cinétique est égale à la puissance des forces appliquées.**

# Théorème de l'énergie cinétique

## Cas d'un référentiel non galiléen $\mathcal{R}_1$

**Si le référentiel n'est pas galiléen, il faut ajouter le travail des forces d'inertie à celui des forces exterieures.**

**Montrons que le travail de la force de Coriolis est nul.**

**En effet, sachant que $\overrightarrow{dl}$ est exprimé dans le référentiel non galiléen, c'est à dire $\overrightarrow{dl}//\vec{V}(M/\mathcal{R}_1) = \vec{V}_r$,**

$$\begin{aligned} \vec{f}_{ic} \cdot \overrightarrow{dl} &= -2m\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r\right) \cdot \overrightarrow{dl} \\ &= -2m\left(\overrightarrow{dl} \wedge \vec{\Omega}\right) \cdot \vec{V}_r dt = 0 \end{aligned}$$

**Seul le travail de la force d'inertie d'entrainement est non nul.**

**Aussi, le théorème de l'énergie cinétique dans $\mathcal{R}_1$ devient**

$$\frac{1}{2}mV_B^2(M/\mathcal{R}_1) - \frac{1}{2}mV_A^2(M/\mathcal{R}_1) = W_A^B(\vec{F}) + W_A^B(\vec{f}_{ie})$$

# Forces conservatives

## Exemple : Force gravitationnelle

**Un point matériel $M$, de masse $m$, est soumis au champ de pesanteur d'une masse $M$ située à l'origine d'un référentiel $\mathcal{R}$. Le déplacement élémentaire de $M$, en coordonnées sphériques, est**

$$\overrightarrow{dl} = d\vec{r} = dr\vec{e}_r + rd\vec{e}_r$$

**sachant que $\vec{e}_r \cdot d\vec{e}_r = 0$.**

**Le travail des forces de pesanteur**

$$\begin{aligned} dW &= -K_G \frac{m_0 m_1}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} \\ &= -K_G \frac{m_0 m_1}{r^2} \left(\vec{e}_r \cdot [dr\vec{e}_r + rd\vec{e}_r]\right) \\ &= -K_G \frac{m_0 m_1}{r^2} dr = d\left(K_G \frac{m_0 m_1}{r}\right) \Longrightarrow W_A^B = K_G m_0 m_1 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \end{aligned}$$

**On note que le travail élémentaire est une différentielle totale, ainsi le travail total ne dépend pas du parcours suivi. Il ne dépend que de l'état final et de l'état initial.**

# Forces conservatives

## Définition

Des forces sont dites conservatives si le travail élémentaire fourni par ces forces est une différentielle totale. Le travail total fourni par ces forces lors d'un parcours ne dépend pas du chemin suivi.

### Exemples

- force gravitationnelle ou de pésanteur ;
- force électrostatique ;
- force de rappel ;

...

# Forces non conservatives : forces dissipatives

## Définition

**Des forces sont dites non conservatives lorsque le travail fourni par ces forces lors d'un parcours dépend du chemin suivi. Le travail est résistif.**

**Exemples :**

- **Force de frottement visqueux :** $\vec{F} = -k\vec{V}$

$$\delta W = -k\vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \overrightarrow{dl} = -k\vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \frac{\overrightarrow{dl}}{dt} dt = -kV^2(M/\mathcal{R})dt.$$

**Le travail lors de deux parcours différents avec la même vitesse est différent puisque les durées des deux parcours sont différentes**

- **Force de frottement solide :** $\vec{R} = -R_T\vec{u} + \vec{R}_N$

$\vec{V} = \|V\|\vec{u}$ **et** $\vec{R}_N \cdot \vec{u} = 0$**. le travail fourni par cette force est**

$$\delta W = \vec{R} \cdot \overrightarrow{dl} = (-R_T\vec{u} + \vec{R}_N) \cdot (dl\vec{u} + ld\vec{u}) = -R_T dl$$

# Forces conservatives et énergie potentielle

## Energie potentielle

**Une force conservative $\Longrightarrow$ $\delta W$ est une differentielle totale telle que $\delta W = -dU$ où $U = U(x, y, z, t)$**

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \\ &= -dU = -\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy - \frac{\partial U}{\partial z} dz \\ &\Downarrow \\ \vec{F} &= -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \\ &= -\overrightarrow{\mathbf{grad}}(U) \end{aligned}$$

**Une force $\vec{F}$ est dite conservative s'il existe une grandeur scalaire $U$ telle que $\vec{F}$ peut se mettre sous la forme**

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}(U)$$

# Forces conservatives et énergie potentielle

## Energie potentielle

**La grandeur $U(x,y,z,t) \Longrightarrow$ le potentiel ou l'énergie potentielle associée à la force $\vec{F}$.**

**$U$ est notée parfois aussi $E_p$ et les deux notations seront utilisées sans faire de distinction.**

**Ainsi, l'expression du travail peut se mettre sous la forme**

$$\delta W(\vec{F}) = -dE_p(M/R), \quad E_p = E_p(x,y,z,t).$$

**Exemple : Poids $\vec{P} = m\vec{g}$ :**

**$Oz$ oriente la verticale de bas en haut. Ainsi $\vec{P} = -mg\vec{k}$ et $\overrightarrow{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, d'où**

$$-dE_p = \vec{P} \cdot \overrightarrow{dl} = -mgdz \Longrightarrow E_p = mgz + \textbf{Constante}$$

**Le potentiel associé à $\vec{P}$ est déterminé à une constante près que l'on peut fixer en prenant une énergie potentielle de référence.**

# Forces conservatives et énergie potentielle

## Exemples de potentiels

$$\begin{cases} \text{Force de rappel} & \rightarrow & E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \text{Constante} \\ \text{Force gravitationnelle} & \rightarrow & E_p(r) = -K_G\frac{m_0 m_1}{r} + \text{Constante} \\ \text{Force de Coulomb} & \rightarrow & E_p(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r} + \text{Constante} \end{cases}$$

**Les constantes peuvent être fixées en prenant une énergie potentielle de réference.**

### Remarque

**Considérons un point matériel soumis à des forces conservatives $\vec{F}_c^i$ et des forces non conservatives $\vec{F}_{nc}^i$. Le travail total est donné par**

$$\begin{aligned} W_A^B &= \sum_i W_A^B(F_c^i) + \sum_j W_A^B(F_{nc}^j) \\ &= -\sum_i \left(E_{p_i}^B - E_{p_i}^A\right) + \sum_j W_A^B(F_{nc}^j) \end{aligned}$$

# Chapitre IV : Théorèmes généraux de la dynamique du point matériel

1. Introduction

2. Moments et théorème du moment cinétique

3. Théorème du moment cinétique

4. Travail et Puissance d'une Force. Théorème de l'énergie cinétique

5. **Théorème de l'énergie mécanique. Equilibre d'un point matériel.**

# Energie mécanique

## Définition

**Nous avons établi que $W_A^B = E_c^B - E_c^A$, sachant que le travail est celui des forces conservatives et des forces non conservatives**

$$\begin{aligned} W_A^B &= W_A^B(F_c) + W_A^B(\vec{F}_{nc}) \\ &= -\left(E_p^B - E_p^A\right) + W_A^B(\vec{F}_{nc}) \end{aligned}$$

**ce qui donne**

$$E_c^B - E_c^A = -\left(E_p^B - E_p^A\right) + W_A^B(\vec{F}_{nc})$$

$$\Downarrow$$

$$\left(E_c^B + E_p^B\right) - \left(E_c^A + E_p^A\right) = W_A^B(\vec{F}_{nc})$$

**On appelle par l'énergie mécanique $E_m$ d'un point matériel $M$ par rapport à $\mathcal{R}$ la somme de son énergie cinétique $E_c$ et de son énergie potentielle $E_p$**

$$E_m(M/\mathcal{R}) = E_c(M/\mathcal{R}) + E_p(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(M/\mathcal{R}) + E_p(M/\mathcal{R})$$

# Théorème de l'énergie mécanique

**En tenant compte des résultats établis jusqu'à maintenant, nous pouvons énoncer le théorème suivant.**

**La variation de l'énergie mécanique d'un système matériel entre deux point $A$ et $B$ de la trajectoire est égal au travail des forces non conservatives sur le parcours du système entre ces deux points qui s'exercent sur ce système**

$$E_m^B - E_m^A = W_A^B(F_{nc}) \text{ ou } dE_m = dE_c + dE_p = \delta W(F_{nc})$$

## Remarque

- **En présence de forces dissipatives, l'énergie mécanique décroît $E_m^B < E_m^A$.**
- **Si toutes les forces sont conservatives, $\vec{F}_{nc} = \vec{0}$, alors**

$dE_m = 0 \Longrightarrow E_m = \text{Constante}$. **L'énergie mécanique est conservée.**

# Théorème de l'énergie mécanique

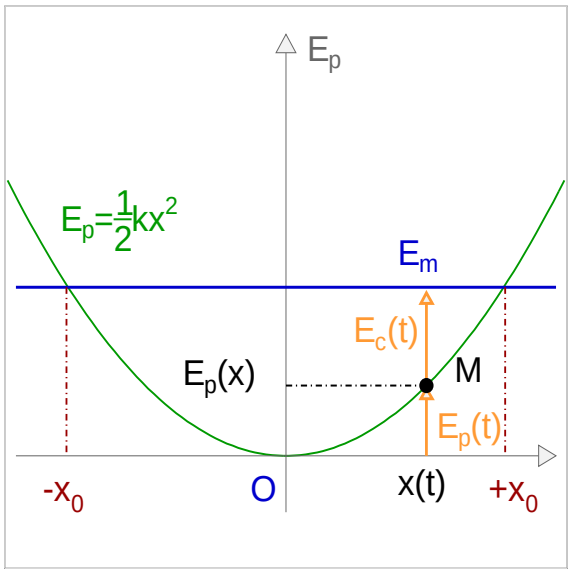
## Exemple : Point matériel $M$ soumis à une force de rappel

**Soit un point matériel $M$ de masse $m$ soumis à une force de rappel $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u} = -kx\vec{u}$.**

**A l'instant initial, $x(t = 0) = x_0$ et $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0 = 0$.**

**L'énergie potentielle est $E_p = 1/2kx^2$ et l'énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, c**

**$= \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ est constante.**




- $E_m = \mathbf{Cte} = E_c(t = 0) + E_p(0) = (m/2)\dot{x}_0^2 + (k/2)x_0^2 = (k/2)x_0^2$.
- $dE_m = 0 \Longrightarrow m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0 \Longrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ **avec** $\omega_0^2 = k/m$ **;** $\dot{x} \neq 0$.
- $E_p \leq E_m \Longrightarrow \frac{1}{2}kx^2 \leq \frac{1}{2}kx_0^2 \Longrightarrow |x| \leq x_0$ **ce qui montre que le mouvement a lieu dans l'intervalle** $[-x_0, +x_0]$.

# Equilibre d'un point matériel et conditions de stabilité

## Définition :

**Un point matériel est en équilibre dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ en un point $M_0$ si le point matériel est abondonné dans ce point et il y reste.**

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \text{ et } \vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{0}.$$

## Equilibre stable

*Un équilibre est dit stable si le point matériel y reste lorsque sa vitesse est nulle et il y retourne spontanément s'il est écarté légèrement de cet état.*

## Conditions de stabilité

$$\begin{cases} F = 0 \Longrightarrow \dfrac{dE_p(x)}{dx} = 0 \\ \dfrac{dF}{dx} < 0 \Longrightarrow \dfrac{d^2E_p(x)}{dx^2} > 0 \end{cases}$$

# Equilibre d'un point matériel et conditions de stabilité

## Equilibre instable

*Un équilibre est dit instable si le point matériel s'éloigne de cet état lorsqu'il y est écarté légèrement.*

## Conditions d'équilibre instable

$$\begin{cases} F = 0 \Longrightarrow \dfrac{dE_p(x)}{dx} = 0 \\ \dfrac{dF}{dx} > 0 \Longrightarrow \dfrac{d^2E_p(x)}{dx^2} < 0 \end{cases}$$