Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

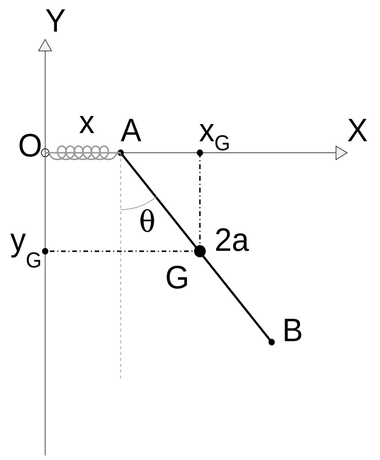
Année Universitaire 2014/2015

Corrigé du TD de Mécanique Analytique & Vibrations
Corrigés de la série N° 3
Filière SMP S5

Formalisme Hamiltonien

Exercice 1

On considère une barre AB homogène de longueur $2a$ et de masse m dont l'extrémité A est attachée à un ressort de constante de raideur k. L'extrémité A est assujettie à se déplacer sans frottement sur l'axe Ox d'un repère $\mathcal{R}(Oxyz)$ supposé galiléen. On repère la position de A le long de Ox par $OA = x$. La barre AB reste dans le plan vertical Oxy et fait un angle θ avec la verticale passant par A, voir figure ci-contre. On négligera la longueur à vide du resssort.



1. Le mouvement de la barre est repéré par par les trois coordonnées du centre de gravité de la barre situé à son milieu et trois rotations. Comme le mouvement de la barre a lieu dans le plan vertical ce qui réduit les rotations à une seule repérée par θ. Quant au centre de gravité, que l'on note par G, sa position est repérée par

$$\overrightarrow{OG} = \begin{cases} x_G &= x + a\sin\theta \\ y_G &= -a\cos\theta \end{cases}$$

où x_G et y_G sont les coordonnées de G. Aussi, on voit que la position de G peut être repérée par x et θ et donc le mouvement de la barre est complètement repéré par x et θ, ce qui montre bien que le nombre de degrés de liberté est égal à 2.

2. En appliquant le théorème de Koenig, l'énergie cinétique de la barre est

$$T = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

où V_G est la vitesse du centre de masse et $I = m\frac{a^2}{3}$ est le moment d'inertie par rapport à GZ. Calculons V_G :

$$\overrightarrow{V}_G = \begin{cases} \dot{x}_G &= \dot{x} + a\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_G &= a\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow V_G^2 = \dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

ce qui donne pour l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2.$$

Le bilan des forces est la force de rappel du ressort, $\vec{F} = -k\vec{x}$, le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction normale de l'axe $\vec{R}_N$ qui ne travaille pas puisqu'elle est perpendiculaire aux déplacements de A. Aussi l'énergie potentielle associée au poids et à la force de rappel est

$$\begin{aligned} dV &= -\vec{F}\cdot\overrightarrow{dA} - m\vec{g}\cdot\overrightarrow{dG} \\ &= kxdx + mga\sin\theta d\theta \\ \Longrightarrow V(x,\theta) &= \frac{1}{2}kx^2 - mga\cos\theta + V_0. \end{aligned}$$

V_0 est déterminée à partir des conditions initiales. On peut prendre $V_0 = 0$ sans que cela n'influe sur les équations du mouvement ou prendre $V(x=0,\theta=0) = 0 = -mga + V_0 \Longrightarrow V_0 = mga \Longrightarrow V(x,\theta) = \frac{1}{2}kx^2 + mga(1-\cos\theta)$.
Le lagrangien est ainsi donné par

$$\begin{aligned} L(x,\theta,\dot{x},\dot{\theta}) &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - mga(1-\cos\theta). \end{aligned}$$

A partir de l'expression de L, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -kx \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} + ma\dot{\theta}\cos\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -ma\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - mga\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ma^2\dot{\theta} + ma\dot{x}\cos\theta + \frac{1}{3}ma^2\dot{\theta} = \frac{4}{3}ma^2\dot{\theta} + ma\dot{x}\cos\theta \end{aligned}$$

Les équations de Lagrange sont comme suit

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= -kx - m\ddot{x} - ma\ddot{\theta}\cos\theta + ma\dot{\theta}^2\sin\theta = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= -ma\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - mga\sin\theta - \frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta} - ma\left(\ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right) \\ &= -\frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta} - mag\sin\theta - ma\ddot{x}\cos\theta = 0. \end{aligned}$$

ce qui donne pour les équations de mouvement

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{k}{m}x &= a\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) \\ \ddot{\theta} + \frac{3}{4a}\left(g\sin\theta + \ddot{x}\cos\theta\right) &= 0 \end{aligned}$$

3. Etablissons les expressions des moments conjugués

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + ma\dot{\theta}\cos\theta \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4}{3}ma^2\dot{\theta} + ma\dot{x}\cos\theta \end{aligned}$$

4. Le hamiltonien est ainsi donné par

$$\begin{aligned}
H &= p_x\dot{x} + p_\theta\dot{\theta} - L \\
&= m\dot{x}^2 + ma\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{4}{3}ma^2\dot{\theta}^2 + ma\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta - \\
&\quad -\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) - \frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mga(1-\cos\theta) \\
&= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) + \frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mga(1-\cos\theta) \\
&= \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + a\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 - \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2\cos\theta^2 + \\
&\quad +\frac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mga(1-\cos\theta) \\
&= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2\left(\frac{4}{3} - \cos^2\theta\right) + \frac{1}{2}kx^2 + mga(1-\cos\theta)
\end{aligned}$$

Remarquer que dans le cas où l'on peut pas exprimer directement H seulement en fonction des coordonnées généralisées et des moments conjugués, on part du système d'équations définissant les moment conjugés et on en tire les expressions $\dot{x} = f(x,\theta,p_x,p_\theta)$ et $\dot{\theta} = g(x,\theta,p_x,p_\theta)$ et on les substitue dans l'expression de H.
Dans ce cas, il reste à exprimer $\dot{\theta}$ en fonction des moments conjugués et de la substituer dans H. En utilisant le système d'équations exprimant les moments conjugués, on en tire

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta - ap_x\cos\theta}{ma^2\left(\frac{4}{3} - \cos^2\theta\right)}$$

ce qui donne pour le hamiltonien exprimé en fonction des coordonnées généralisées et les moments conjugués

$$\begin{aligned}
H &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2ma^2}\left(p_\theta - ap_x\cos\theta\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{4}{3} - \cos^2\theta\right)} + \\
&\quad +\frac{1}{2}kx^2 + mga(1-\cos\theta)
\end{aligned}$$

Les équations canoniques donnent

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{P_x}{m} + \frac{-\cos\theta}{ma}\frac{p_\theta - ap_x\cos\theta}{\frac{4}{3} - \cos^2\theta} = \frac{p_x}{m} - a\dot{\theta}\cos\theta \\
\dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx \Longrightarrow m\left(\ddot{x} + a\ddot{\theta} - a\dot{\theta}^2\sin\theta\right) = -kx
\end{aligned}$$

et qui n'est d'autre que la première équation établie auparavant.

Quant au système des équations canoniques en θ et p_θ, demander aux étudiants de le faire chez eux.

Exercice 2 : Etude classique du mouvement d'un électron

On considère un électron de masse m et de charge $-e$ soumis à l'attraction électrostatique d'un noyau $+Ze$. On considère que le referentiel lié au noyau est galiléen. On utilisera les coordonnées sphériques comme coordonnées généralisées.

1. Le potentiel $V(\vec{r})$ est donné par

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-Ze^2}{r} = -\frac{k}{r}.$$

2. Notons par $\mathcal{R}(Oxyz)$ le repère lié au noyau. Les vecteurs de la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ sont en rotation dans $\mathcal{R}$ avec le vecteur rotation $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi$, où $\vec{k}$ est le vecteur unitaire selon Oz. Si la position de l'électron e à l'instant t est M, alors

$$\begin{aligned}
\vec{V} &= \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\
&= \left.\frac{dr\vec{e}_r}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\
&= \dot{r}\vec{e}_r + r\left.\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\
&= \dot{r}\vec{e}_r + r\vec{\Omega}\wedge\vec{e}_r \\
&= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Longrightarrow V^2 = \dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne pour l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right)\right]$$

Quant à l'énergie potentielle, comme le poids de l'électron est négligée, elle est réduite à l'énergie potentielle $V(r)$ ce qui donne pour le lagrangien

$$L(r,\theta,\varphi,\dot{r},\dot{\theta},\dot{\varphi};t) = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right)\right] + \frac{k}{r}.$$

3. Pour établir l'expression du hamiltonien, calculons d'abord les expressions des moments conjugués :

$$\begin{aligned}
p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Longrightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\
p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \Longrightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \\
p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi} \Longrightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
H(r,\theta,\varphi,p_r,p_\theta,p_\varphi;t) &= p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\varphi\dot{\varphi} - L(r,\theta,\varphi,\dot{r},\dot{\theta},\dot{\varphi};t) \\
&= m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 + mr^2\sin\theta^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right)\right] - \frac{k}{r} \\
&= \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right)\right] - \frac{k}{r} \\
&= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} - \frac{k}{r}.
\end{aligned}$$

$H(r,\theta,\varphi,p_r,p_\theta,p_\varphi;t)$ représente l'énergie mécanique de l'électron. Comme $H(r,\theta,\varphi,p_r,p_\theta,p_\varphi;t)$ ne dépend pas explicitement du temps, il est conservé.

4. Si l'on observe l'expression de $H(r,\theta,\varphi,p_r,p_\theta,p_\varphi;t)$, on remarque que φ est une variable cyclique, ce qui implique que $\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \Longrightarrow p_\varphi$ est conservée. p_φ est la composante du moment cinétique de l'électron selon Oz. En effet, le moment cinétique est donné par

$$\vec{\sigma} = \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{V} = -mr^2\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\theta + mr^2\dot{\theta}\vec{e}_\varphi \Longrightarrow \vec{\sigma}\cdot\vec{k} = mr^2\sin^2\theta = p_\varphi.$$

On sait que le moment cinétique est constant étant donné que la force coulombienne est centrale. On peut choisir les conditions initiales de manière à ce que le moment cinétique soit perpendiculaire à $\vec{k}$ et donc $p_\varphi = 0$. $p_\varphi = 0 \Longrightarrow \dot{\varphi} = 0 \Longrightarrow \varphi(t) =$constante $\forall t$.
L'expression de $H(r,\theta,\varphi,p_r,p_\theta,p_\varphi;t)$ devient alors

$$H(r,\theta,\varphi,p_r,p_\theta,p_\varphi;t) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

5. Les équations canoniques de Hamilton sont données par

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \tfrac{\partial H}{\partial p_r} = \tfrac{p_r}{m} \\
\dot{\theta} &= \tfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \tfrac{p_\theta}{mr^2} \\
\dot{p}_r &= -\tfrac{\partial H}{\partial r} = -\tfrac{p_\theta^2}{mr^3} + \tfrac{k}{r^2} \\
\dot{p}_\theta &= -\tfrac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow p_\theta = \text{Cst} = mr^2\dot{\theta} = mr_0^2\dot{\theta}_0
\end{aligned}$$

et la nouvelle constante est $p_\theta = mr^2\dot{\theta} = \vec{\sigma} \cdot \vec{e}_\varphi$ et donc qui n'est d'autre que le moment cinétique selon $\vec{e}_\varphi$.

6. Le mouvement de l'électron peut être circulaire si l'équation $\dot{r} = 0$ est cohérente avec les équations canoniques de Hamilton. En effet, $\dot{r} = 0 \Longrightarrow p_r = 0$ et donc $\dot{p}_r = 0$, ce qui implique

$$\begin{aligned}
-\frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{k}{r^2} &= 0 \\
\Longrightarrow r &= r_c = \frac{p_\theta^2}{mk} = \text{Constante}
\end{aligned}$$

ce qui est vérifié puisque $p_\theta = mr_0^2\dot{\theta}_0$ est constant. Donc un mouvement circulaire est possible. La valeur de r_c en fonction de r_0 est obtenue comme suit

$$r_c = \frac{mr_0^4\dot{\theta}_0^2}{k}.$$

Ainsi la vitesse angulaire à communiquer à l'électron pour l'installer dans l'orbire de rayon $r_c = r_0$ est

$$r_0 = \frac{mr_0^4\dot{\theta}_0^2}{k} \Longrightarrow \dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{k}{mr_0^3}}$$

Corrigé 3 : Rotation dans l'espace des phases

Considérons un système à un degré de liberté et soit M un point de l'espace des phases dont les coordonnées sont (q, p). Le point M' est le point de l'espace des phases de coordonnées (Q, P) obtenu à partir de M par une rotation d'un angle α. On cherche à montrer que cette rotation est une transformation canonique et à déterminer une fonction génératrice $F(q, Q)$ qui la décrit.

1. (Q, P) est obtenu de (q, p) par une rotation d'un angle α dans l'espace des phases, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q\cos\alpha - p\sin\alpha \\ q\sin\alpha + \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne de cette transformation est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Pour démontrer que la transformation est canonique, il suffit de démontrer que M est une matrice symplectique. En effet

$${}^tM = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned}
JM &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow {}^t MJM = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J
\end{aligned}$$

ce qui démontre bien que M est symplectique et donc la transformation associée est canonique.

2. La fonction génératrice $F(q,Q)$ est de type 1. Ce qui permet d'écrire que

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} \text{ et } P = -\frac{\partial F}{\partial Q}.$$

3. En utilisant les expressions de la question précédente, nous obtenons

$$\frac{\partial F}{\partial q} = p = q\text{cotg}\alpha - \frac{Q}{\sin\alpha} \Longrightarrow F(q,Q) = \frac{q^2}{2}\text{cotg}\alpha - \frac{Q}{\sin\alpha}q + g(Q).$$

Comme

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial Q} = -P &= -q\sin\alpha - q\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + Q\text{cotg}\alpha = -\frac{q}{\sin\alpha} + g'(Q)\\ &\Longrightarrow g'(Q) = Q\text{cotg}\alpha \Longrightarrow g(Q) = \frac{Q^2}{\text{cotg}\alpha}. + K(=0)\end{aligned}$$

En remplaçant $g(Q)$ par son expression, nous avons

$$F(q,Q) = \left(\frac{q^2}{2} + \frac{Q^2}{2}\right)\text{cotg}\alpha - \frac{qQ}{\sin\alpha}.$$

4. Rappelons que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q} &= \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial}{\partial Q} + \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial}{\partial P} = M_{11}\frac{\partial}{\partial Q} + M_{21}\frac{\partial}{\partial P}\\ \frac{\partial}{\partial p} &= \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial}{\partial Q} + \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial}{\partial P} = M_{12}\frac{\partial}{\partial Q} + M_{22}\frac{\partial}{\partial P}.\end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}[X,Y]_{q,p} &= \frac{\partial X}{\partial q}\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial p}\frac{\partial Y}{\partial q}\\ &= \left(M_{11}\frac{\partial X}{\partial Q} + M_{21}\frac{\partial X}{\partial P}\right)\left(M_{12}\frac{\partial Y}{\partial Q} + M_{22}\frac{\partial Y}{\partial P}\right) -\\ &\quad -\left(M_{12}\frac{\partial X}{\partial Q} + M_{22}\frac{\partial X}{\partial P}\right)\left(M_{11}\frac{\partial Y}{\partial Q} + M_{21}\frac{\partial Y}{\partial P}\right)\\ &= M_{11}M_{12}\frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial Q} + M_{11}M_{22}\frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial P} + M_{21}M_{12}\frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial Q} + M_{21}M_{22}\frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial P} -\\ &\quad -\left(M_{12}M_{11}\frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial Q} + M_{12}M_{21}\frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial P} + M_{22}M_{11}\frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial Q} + M_{22}M_{21}\frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial P}\right)\\ &= (M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21})\frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial P} + (M_{21}M_{12} - M_{22}M_{11})\frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial Q}\\ &= \frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial P} - \frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial Q}\end{aligned}$$

car $M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. D'où l'expression recherchée.
Comme les crochets de Poisson entre les deux grandeurs sont conservés par la transformation, cela implique que la transformation est canonique.

Corrigé 4 : Les fonctions génératrices

Les quatre types des fonctions génératrices décrivant les transformations canoniques peuvent s'obtenir les unes des autres par des transformations de Legendre. On se propose d'en montrer quelques exemples.

1. Rappelons que les fonctions génératrices de type 1 vérifient
$$p = \frac{\partial F(q,Q)}{\partial q} \quad \text{et} \quad P = -\frac{\partial F(q,Q)}{\partial Q}.$$
On pose $G_1(q,Q) = -F_1(q,Q)$. Cherchons la transformée de Legendre de G_1 par rapport à Q que l'on note $G_1^*(q,P) = PQ - G_1(q,Q)$. Nous avons alors
$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial G_1^*(q,P)}{\partial q} & = & -\frac{\partial G_1(q,Q)}{\partial q} = \frac{\partial F_1(q,Q)}{\partial q} = p \\ \frac{\partial G_1^*(q,P)}{\partial P} & = & Q \end{array} \right.$$
qui ne sont d'autre que les propriétés d'une fonction génératrice de type 2. Aussi $F_2(q,P)$ est la transformée de Legendre de $-F_1(q,Q)$ par rapport à Q.
2. Les propriétés vérifiées par une fonction génératrice de type 3 sont données par
$$q = -\frac{\partial F_3(p,Q)}{\partial p} \quad \text{et} \quad P = -\frac{\partial F_3(p,Q)}{\partial Q}.$$
De la même manière, on pose $G = F_1(q,Q)$ et on procède à une transformation de Legendre par rapport cette fois-ci à q, ce qui donne $G^*(p,Q) = pq - G(q,Q)$ ce qui implique que
$$\begin{array}{lcl} \frac{\partial G^*}{\partial p} & = & +\frac{\partial F_1}{\partial p} = q \\ \frac{\partial G^*}{\partial Q} & = & -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = P \end{array}$$
si l'on prend $F_3 = -G^*$, l'opposé de la transformée de Legendre de F_1, on retrouve la fonction génératrice de type 3.

Corrigé : Encore des transformations canoniques !

Considérons la transformation donnée par
$$\begin{array}{lcl} q_1 & = & Q_1 \cos\alpha + \frac{P_2}{m\omega}\sin\alpha \\ p_1 & = & -m\omega Q_2 \sin\alpha + P_1 \cos\alpha \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} q_2 & = & Q_2 \cos\alpha + \frac{P_1}{m\omega}\sin\alpha \\ p_2 & = & -m\omega Q_1 \sin\alpha + P_2 \cos\alpha \end{array}$$

1. Pour établir la matrice jacobienne, trouvons d'abors $Q_k = Q_k(q_k, p_k)$ et $P_k = P_k(q_k, p_k)$. Pour ce faire nous résolvons le système d'équations précédents en utilisant la méthode de Cramer [1]
$$\begin{array}{rcl} Q_1 \cos\alpha + \frac{P_2}{m\omega}\sin\alpha & = & q_1 \\ Q_2 \cos\alpha + \frac{P_1}{m\omega}\sin\alpha & = & q_2 \\ -m\omega Q_2 \sin\alpha + P_1 \cos\alpha & = & p_1 \\ -m\omega Q_1 \sin\alpha + P_2 \cos\alpha & = & p_2 \end{array}$$
alors
$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & \frac{\sin\alpha}{m\omega} \\ 0 & \cos\alpha & \frac{\sin\alpha}{m\omega} & 0 \\ 0 & -m\omega\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -m\omega\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha \begin{vmatrix} \cos\alpha & \frac{\sin\alpha}{m\omega} & 0 \\ -m\omega\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha \end{vmatrix} -$$

1. On peut aussi utiliser la méthode par susbstitution. Toutefois, il est conseillé d'utiliser la méthode de Cramer de par son caractère systématique.

$$
\begin{aligned}
&-(-m\omega\sin\alpha)\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\sin\alpha}{m\omega} \\ \cos\alpha & \frac{\sin\alpha}{m\omega} & 0 \\ -m\omega\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{vmatrix} \\
&= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1
\end{aligned}
$$

et

$$
Q_1 = \frac{\begin{vmatrix} q_1 & 0 & 0 & \frac{\sin\alpha}{m\omega} \\ q_2 & \cos\alpha & \frac{\sin\alpha}{m\omega} & 0 \\ p_1 & -m\omega\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ p_2 & 0 & 0 & \cos\alpha \end{vmatrix}}{\Delta} = q_1\cos\alpha - p_2\frac{\sin\alpha}{m\omega}
$$

et

$$
Q_2 = \frac{\begin{vmatrix} \cos\alpha & q_1 & 0 & \frac{\sin\alpha}{m\omega} \\ 0 & q_2 & \frac{\sin\alpha}{m\omega} & 0 \\ 0 & p_1 & \cos\alpha & 0 \\ -m\omega\sin\alpha & p_2 & 0 & \cos\alpha \end{vmatrix}}{\Delta} = q_2\cos\alpha - p_1\frac{\sin\alpha}{m\omega}
$$

et

$$
P_1 = \frac{\begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 & q_1 & \frac{\sin\alpha}{m\omega} \\ 0 & \cos\alpha & q_2 & 0 \\ 0 & -m\omega\sin\alpha & p_1 & 0 \\ -m\omega\sin\alpha & 0 & p_2 & \cos\alpha \end{vmatrix}}{\Delta} = q_2 m\omega\sin\alpha + p_1\cos\alpha
$$

et enfin

$$
P_2 = \frac{\begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & q_1 \\ 0 & \cos\alpha & \frac{\sin\alpha}{m\omega} & q_2 \\ 0 & -m\omega\sin\alpha & \cos\alpha & p_1 \\ -m\omega\sin\alpha & 0 & 0 & p_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = q_1 m\omega\sin\alpha + p_2\cos\alpha
$$

La matrice jacobienne est ainsi obtenue comme suit

$$
M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & -\frac{\sin\alpha}{m\omega} \\ 0 & \cos\alpha & -\frac{\sin\alpha}{m\omega} & 0 \\ 0 & m\omega\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ m\omega\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \Longrightarrow {}^t M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & m\omega\sin\alpha \\ 0 & \cos\alpha & m\omega\sin\alpha & 0 \\ 0 & -\frac{\sin\alpha}{m\omega} & \cos\alpha & 0 \\ -\frac{\sin\alpha}{m\omega} & 0 & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}.
$$

Comme

$$
J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow JM = \begin{pmatrix} 0 & m\omega\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ m\omega\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & 0 & 0 & \frac{\sin\alpha}{m\omega} \\ 0 & -\cos\alpha & \frac{\sin\alpha}{m\omega} & 0 \end{pmatrix}
$$

On vérifiera que ${}^tMJM = J$ et par conséquence M est symplectique. *Cette question peut être résolue de manière simple en démontrant que si M est symplectique ${}^tM$ l'est aussi. Comme on peut déduire l'expression de ${}^tM$ directement des données du problème, puisque nous avons les expressions de (q_i, p_i).*

2. Puisque la fonction génératrice est de type 2 alors

$$\begin{aligned}
Q1 &= \frac{\partial F_2(q_k,P_k)}{\partial P_1} = \frac{q_1}{\cos\alpha} - \frac{P_2}{m\omega}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\
\Longrightarrow F_2(q_k,P_k) &= \frac{q_1P_1}{\cos\alpha} - \frac{P_2P_1}{m\omega}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + g_1(q_1,q_2,P_2) + K(=0) \\
\Longrightarrow \frac{\partial F_2(q_k,P_k)}{\partial P_2} &= -\frac{P_1}{m\omega}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\partial g_1}{\partial P_2} = Q_2 = \frac{q_2}{\cos\alpha} - \frac{P_1}{m\omega}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\
\Longrightarrow \frac{\partial g_1}{\partial P_2} &= \frac{q_2}{\cos\alpha} \Longrightarrow g_1(q_1,q_2,P_2) = \frac{q_2P_2}{\cos\alpha} + g_2(q_1,q_2). \\
\Longrightarrow F_2(q_1,q_2,P_1,P_2) &= \frac{q_1P_1}{\cos\alpha} - \frac{P_2P_1}{m\omega}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{q_2P_2}{\cos\alpha} + g_2(q_1,q_2)
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\partial F_2}{\partial q_1} = \frac{P_1}{\cos\alpha} + \frac{\partial g_2}{\partial q_1} = -m\omega\sin\alpha\left(q_2\cos\alpha - p_1\frac{\sin\alpha}{m\omega}\right) + P_1\cos\alpha \\
\Longrightarrow \frac{\partial g_2}{\partial q_1} &= -m\omega\sin\alpha\left(q_2\cos\alpha - p_1\frac{\sin\alpha}{m\omega}\right) + P_1\left(\cos\alpha - \frac{1}{\cos\alpha}\right) \\
\Longrightarrow g_2 &= \left[-m\omega\sin\alpha\left(q_2\cos\alpha - p_1\frac{\sin\alpha}{m\omega}\right) + P_1\left(\cos\alpha - \frac{1}{\cos\alpha}\right)\right] q_1 + g_3(q_2)
\end{aligned}$$

d'où

$$F_2(q_1,q_2,P_1,P_2) = \frac{q_2P_2}{\cos\alpha} - \frac{P_1P_2}{m\omega}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \left[-m\omega\sin\alpha\left(q_2\cos\alpha - p_1\frac{\sin\alpha}{m\omega}\right) + P_1\cos\alpha\right] q_1 + g_3(q_2).$$

Et finalement

$$\begin{aligned}
p_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial q_2} = \frac{P_2}{\cos\alpha} - m\omega\sin\alpha\cos\alpha q_1 + \frac{\partial g_3}{\partial q_2} \\
&= -m\omega\sin\alpha\left(q_1\cos\alpha - p_2\frac{\sin\alpha}{m\omega}\right) + P_2\cos\alpha \\
\Longrightarrow \frac{\partial g_3}{\partial q_2} &= P_2\left(\cos\alpha - \frac{1}{\cos\alpha}\right) + p_2\sin^2\alpha \\
\Longrightarrow g_3(q_2) &= P_2q_2\left(\cos\alpha - \frac{1}{\cos\alpha}\right) + p_2q_2\sin^2 \\
\Longrightarrow F_2(q_1,q_2,P_1,P_2) &= (q_1P_1 + q_2P_2)\cos\alpha - \frac{P_1P_2}{m\omega}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - m\omega\sin\alpha\cos\alpha q_1q_2 + (p_1q_1 + p_2q_2)\sin^2\alpha.
\end{aligned}$$

3. Nous avons

$$\begin{aligned}
p_1^2 &= m^2\omega^2Q_2^2\sin^2\alpha + P_1^2\cos^2\alpha - 2m\omega\sin\alpha\cos\alpha Q_2P_1 \\
p_2^2 &= m^2\omega^2Q_1^2\sin^2\alpha + P_2^2\cos^2\alpha - 2m\omega\sin\alpha\cos\alpha Q_1P_2 \\
\Longrightarrow \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} &= \frac{m\omega^2}{2}\sin^2\alpha\left(Q_1^2 + Q_2^2\right) + \frac{1}{2m}\cos^2\alpha\left(P_1^2 + P_2^2\right) - \omega\sin\alpha\cos\alpha\left(Q_1P_2 + Q_2P_1\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
q_1^2 &= Q_1^2\cos^2\alpha + \frac{P_2^2}{m^2\omega^2}\sin^2\alpha + \frac{2}{m\omega}Q_1P_2\cos\alpha\sin\alpha \\
q_2^2 &= Q_2^2\cos^2\alpha + \frac{P_1^2}{m^2\omega^2}\sin^2\alpha + \frac{2}{m\omega}Q_2P_1\cos\alpha\sin\alpha \\
\Longrightarrow \frac{m\omega^2}{2}\left(q_1^2 + q_2^2\right) &= \frac{m\omega^2}{2}\left(Q_1^2 + Q_2^2\right) + \frac{1}{2m}\sin^2\alpha\left(P_1^2 + P_2^2\right) + \omega\cos\alpha\sin\alpha\left(Q_1P_2 + Q_2P_1\right)
\end{aligned}$$

ainsi

$$H' = \frac{1}{2m}\left(P_1^2 + P_2^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(Q_1^2 + Q_2^2\right).$$