Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

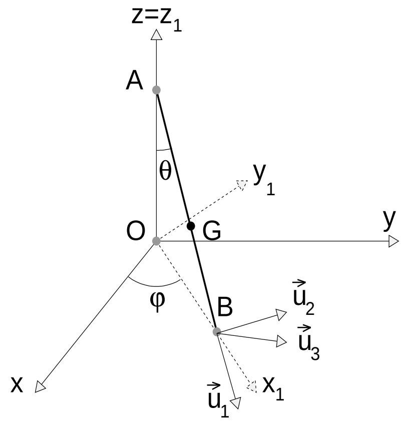
Année Universitaire 2014/2015

Corrigé du TD de Mécanique Analytique & Vibrations
Corrigés de la série N° 2
Filière SMP S5

Lagrangien et multiplicateurs de Lagrange

Exercice 1

Soit $\mathcal{R}(Oxyz)$ un repère galiléen et soit AB une barre homogène pesante de masse m et de longueur $2a$ et de section négligeable. L'extrémité A de la barre glisse sans frottement le long de Oz et l'extrémité B glisse sans frottement sur le plan Oxy. On désigne par φ l'angle que fait OB avec Ox, θ celui que fait AB avec AO. Soit $\mathcal{R}_1(Ox_1y_1z_1)$ le repère relatif tel que Ox_1 est porté par OB, voir figure ci-contre.



Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base cartésienne liée à $\mathcal{R}$, $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1 \equiv \vec{k})$ la base cartésienne liée à $\mathcal{R}_1$ et $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ une base orthonormée directe telle que $\vec{u}_1$ est le vecteur unitaire de la direction de $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}_2$ appartient au plan contenant $(\vec{k}, \vec{u}_1)$ et $\vec{u}_3$ perpendiculaire à ce plan. Autrement dit, $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est liée aux axes principaux de la barre.

1. Bilan des forces sachant que les réactions sont normales étant donné que la barre glisse sans frottement en A et en B :
   • le poids $m\vec{g} = -mg\vec{k}$;
   • la réaction de Oz sur la barre au point A : $\vec{R}_A = R_A\vec{i}_1$;
   • la réaction du plan (Oxy) sur la barre au point B : $\vec{R}_B = R_B\vec{k}_1$;

2. Relevons les contraintes :
   — L'extrémité A glisse sur Oz ce qui implique deux contraintes $x_A = 0$ et $y_A = 0$;
   — B glisse sur le plan (Oxy) ce qui donne une contrainte $z_B = 0$,
   ce qui donne au total trois contraintes.
   Etant donnée que la section de la barre est négligeable alors le nombre de degrés de liberté est de 5, les trois coordonnées de G et deux rotations repérées par φ et θ. En raison des trois contraintes, le nombre de degrés de liberté est finalement 2. Les coordonnées généralisées que l'on utilisera sont φ et θ.
   Une deuxième approche consiste à retrouver les paramètres indépendants qui décrivent le mouvement de la barre. On part de cinq paramètres $(x_G, y_G, z_G, \theta, \varphi)$ puisque la barre est de section négligeable, G étant le centre de masse de la barre. Comme

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BG} \\ &= 2a\sin\theta\left(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}\right) + a\cos\theta\vec{k} \end{aligned}$$

et donc $x_G = 2a\sin\theta\cos\varphi, y_G = 2a\sin\theta\sin\varphi, z_G = \cos\theta$. Il suffit alors des deux angles θ et φ pour décrire le mouvement. Et donc le nombre de degrés de liberté est égal à 2.

3. L'énergie cinétique de la barre est obtenue en utilisant le théorème de Koenig :

$$T = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}\,{}^t\Omega J_G \Omega$$

où V_G est la vitesse du centre de masse, Ω est la matrice colonne composée par les composantes du vecteur rotation $\vec{\omega}(AB/\mathcal{R})$, qui rappelons le est le même que celui par rapport au référentiel du centre de masse, et J_G est la matrice d'inertie au point G. Exprimons Ω et J_G dans le repère principal de la barre dont les axes principaux ont pour vecteurs unitaires $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, voir figure. Aussi la matrice d'inertie dans $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3,)$ de la barre est alors donnée par

$$J_G = \frac{1}{3}ma^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et le vecteur rotation a pour expression dans cette base

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\varphi}\vec{k} - \dot{\theta}\vec{j}_1 \\ &= \dot{\varphi}\left(-\cos\theta\vec{u}_1 + \sin\theta\vec{u}_2\right) - \dot{\theta}\vec{u}_3. \end{aligned}$$

Rappelons que $\vec{u}_3$ est parallèle $\vec{j}_1$. Aussi,

$$\Omega = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}\cos\theta \\ \dot{\varphi}\sin\theta \\ -\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,{}^t\Omega J_G \Omega &= \frac{1}{6}ma^2 \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}\cos\theta & \dot{\varphi}\sin\theta & -\dot{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}\cos\theta \\ \dot{\varphi}\sin\theta \\ -\dot{\theta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}ma^2\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) \end{aligned}$$

Quant à la vitesse du centre de masse

$$\begin{aligned} \vec{V}_G &= \frac{d}{dt}\left(a\cos\theta\vec{k} + a\sin\theta\vec{i}_1\right)\Big|_{\mathcal{R}} \\ &= -a\dot{\theta}\sin\theta\vec{k} + a\dot{\theta}\cos\theta\vec{i}_1 + a\dot{\varphi}\sin\theta\vec{j}_1 \\ \Longrightarrow V_G^2 &= a^2\dot{\theta}^2 + a^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \end{aligned}$$

L'énergie cinétique est ainsi donnée par

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}ma^2\left[\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right] + \frac{1}{6}ma^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) \\ &= \frac{2}{3}ma^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) \end{aligned}$$

4. Comme $\vec{R}_A$ et $\vec{R}_B$ ne travaillent pas, $\vec{R}_A \cdot \delta\overrightarrow{OA} = \vec{R}_B \cdot \delta\overrightarrow{OB} = 0$, alors

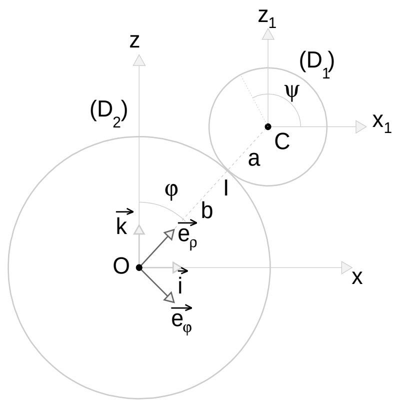
$$\begin{aligned} Q_\varphi &= m\vec{g} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OG}}{\partial\varphi} = -mg\vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(a\cos\theta\vec{k} + a\sin\theta\vec{i}_1\right) = 0 \\ Q_\theta &= m\vec{g} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OG}}{\partial\theta} = -mg\vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}\left(a\cos\theta\vec{k} + a\sin\theta\vec{i}_1\right) = mga\sin\theta \end{aligned}$$

5. Les équations de Lagrange en fonction de l'énergie cinétique et des composantes généralisées des forces sont données par

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}-\frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_\varphi \Longrightarrow \frac{4}{3}ma^2\frac{d\left(\dot\varphi \sin^2\theta\right)}{dt}=0 \Longrightarrow \dot\varphi\sin^2\theta = \text{constante} = K\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}-\frac{\partial T}{\partial \theta} &= Q_\theta \Longrightarrow \frac{4}{3}ma^2\ddot\theta-\frac{2}{3}ma^2\dot\varphi^2\sin 2\theta = mga\sin\theta\\
&\Longrightarrow \ddot\theta - K\frac{\text{cotg}\theta}{\sin^2\theta}-\frac{3g}{4a}\sin\theta=0
\end{aligned}
$$

Corrigé 2

Un disque D_1 de rayon a et de centre de masse C roule sans glisser sur un deuxième disque D_2 de rayon b. A l'instant $t=0$, D_1 est situé au sommet de D_2, figure ci-contre. (D_1) tourne avec une vitesse angulaire $\dot\psi$. La position de (C) est repérée par l'angle φ. On se limite au cas où (D_1) reste en contact avec (D_2). On utilise dans cet exercice la méthode des multiplicateurs de Lagrange.



Soit $\mathcal{R}(O,xyz)$ le référentiel lié à (D_2) et $(\vec\imath,\vec\jmath,\vec k)$ sa base cartésienne, supposé galiléen. Et soit $\mathcal{R}_c(C,x_1y_1z_1)$ le référentiel du centre de masse de (D_1) dont la base cartésienne est $(\vec\imath_1,\vec\jmath_1,\vec k_1)$. Notons que $(\vec e_\rho,\vec e_\varphi,-\vec\jmath\equiv-\vec\jmath_1)$ forme une base directe.

1. La condition de roulement sans glissement de (D_1) sur (D_2) est

$$\vec V(I\in D_1/\mathcal{R}) \;=\; \vec V(I\in D_2/\mathcal{R})$$

comme (D_2) est immobile alors la condition de roulement sans flissement est

$$
\begin{aligned}
\vec V(I\in D_1) &= -\dot\varphi\vec\jmath\wedge(a+b)\vec e_\rho-\dot\psi\vec\jmath_1\wedge(-a\vec e_\rho)\\
&= \left((a+b)\dot\varphi-a\dot\psi\right)\vec e_\varphi=\vec 0\Longrightarrow (a+b)\dot\varphi-a\dot\psi=0
\end{aligned}
$$

2. Le mouvement de (D_1) est décrit par celui d'un point de référence, que l'on prend égal à C, et trois rotations. Comme le mouvement a lieu dans le plan Oxz, cela réduit les paramètres décrivant le mouvement de C à x_c et z_c et celui décrivant la rotation de (D_1) autour de Cy_1 à l'angle ψ. Comme (D_1) reste en contact avec (D_2) alors la réaction normale en I de (D_2) sur (D_1) est non nulle, ce qui implique que $OC=a+b$ et $x_c=(a+b)\cos\varphi$ et $z_c=(a+b)\sin\varphi$. Aussi, les paramètres décrivant le mouvement de (D_1) sont φ et ψ qui sont lié par la condition de roulement sans glissement.
3. L'énergie cinétique de (D_1) est obtenue en appliquant le théorème de Koenig, sachant que (D_1) est en rotation dans $\mathcal{R}_c$ autour de l'axe $\Delta=Cy_1$, par

$$T(D_1) \;=\; \frac{1}{2}m\vec V(C/\mathcal{R})^2+\frac{1}{2}J_\Delta\Omega^2$$

où $J_\Delta=\frac{1}{2}ma^2$ est le moment cinétique de (D_1) par rapport à Cy_1 et $\vec\Omega$ est le vecteur rotation de (D_1) dans $\mathcal{R}_1$ qui est égal à $\vec\Omega=-\dot\psi\vec\jmath_1$. Aussi

$$\vec V(C/\mathcal{R}) \;=\; -\dot\varphi\vec k\wedge(a+b)\vec e_\rho=(a+b)\dot\varphi\vec e_\varphi\Longrightarrow T(D_1)=\frac{1}{2}m(a+b)^2\dot\varphi^2+\frac{1}{4}ma^2\dot\psi^2.$$

Quant à l'énergie potentielle,

$$\begin{aligned} dV &= m\vec{g}\cdot d\overrightarrow{OC} = -mg(a+b)\vec{k}\cdot d\varphi\vec{e}_\varphi \\ &= mg(a+b)\sin\varphi d\varphi \Longrightarrow V = -mg(a+b)\cos\varphi + V_0. \end{aligned}$$

On prend $V(\varphi=0) = 0 = V_0$ ce qui donne $V = -mg(a+b)\cos\varphi$.

4. Le lagrangien de (D_1) est donné par

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m(a+b)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}ma^2\dot{\psi}^2 + mg(a+b)\cos\varphi. \end{aligned}$$

Pour établir les équations du mouvement nous avons besoin d'introduire les multiplicateurs de Lagrange. Comme nous avons une seule liaison $f(\varphi,\psi)$ que l'on peut déduire de la condition de roulement sans glissement en intégrant sur le temps : $f(\varphi,\psi) = (a+b)\varphi - a\psi - K = 0$ où K est une constante. Aussi, nous introduisons un seul multiplicateur de Lagrange λ et les équations de mouvement deviennent

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} + \lambda\frac{\partial f}{\partial\varphi} &= -mg(a+b)\sin\varphi - m(a+b)^2\ddot{\varphi} + \lambda(a+b) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial\psi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} + \lambda\frac{\partial f}{\partial\psi} &= -\frac{1}{2}ma^2\ddot{\psi} - a\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}ma\ddot{\psi} \\ (a+b)\dot{\varphi} - a\dot{\psi} &= 0 \Longrightarrow \ddot{\psi} = \frac{a+b}{a}\ddot{\varphi} \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}m(a+b)\ddot{\varphi} \end{aligned}$$

ce qui permet de déduire les équations du mouvement

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \frac{2g}{3(a+b)}\sin\varphi &= 0 \\ \ddot{\psi} &= \frac{a+b}{a}\ddot{\varphi} \end{aligned}$$

5. Retrouvons les expressions des composantes généralisées de la réaction tangentielle $\vec{R}_T$ selon φ et ψ :

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= \lambda\frac{\partial f}{\partial\varphi} = \lambda(a+b) = -\frac{1}{2}m(a+b)^2\ddot{\varphi} = \frac{mg(a+b)}{3}\sin\varphi \\ Q_\psi &= \lambda\frac{\partial f}{\partial\psi} = -a\lambda = \frac{1}{2}ma(a+b)\ddot{\varphi} = -\frac{1}{3}mga\sin\varphi \end{aligned}$$

Corrigé 3 : Particule chargée dans un champs électromagnétique

Une particule de masse m et de charge q se dépalce dans une région où règne un champ électromagnétique ($\vec{E} = -\vec{\nabla}(\varphi) - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$), où $\vec{A} = \vec{A}(x,y,z;t)$ et $\varphi = \varphi(x,y,z;t)$ sont respectivement le potentiel scalaire et le potentiel vecteur et $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ est l'opérateur nabla. La position de la particule est repérée par les coordonnées $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3)$ et sa vitesse est donnée par $\vec{v} = (v_1 = \dot{x}_1, v_2 = \dot{x}_2, v_3 = \dot{x}_3,)$. Les coordonnées généralisées et les vitesses généralisées coincident avec les coordonnées et les composantes de la vitesse de la particule.

1. On sait que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \\ &= \vec{v}\cdot\vec{\nabla} + \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\frac{d\vec{A}_i}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{\nabla}(A_i) + \frac{\partial A_i}{\partial t}$$

aussi on écrit de manière générique

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

2. Sachant que

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} \Longrightarrow \vec{v}\wedge\vec{B} = \vec{v}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right) = v_j\vec{\nabla}A_j - (v_j\nabla_j)\vec{A}$$

Rappelons que tout indice répété correspond à une somme sur cet indice.
Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{F_i}{q} &= E_i + (\vec{v}\wedge\vec{B})_i \\ &= -\nabla_i\varphi - \frac{\partial A_i}{\partial t} + v_j\nabla_i A_j - (v_j\nabla_j)A_i \\ &= -\nabla_i\varphi - \frac{dA_i}{dt} + \vec{v}\cdot\nabla A_i + v_j\nabla_i A_j - \vec{v}\cdot\nabla A_i \\ &= -\nabla_i\varphi - \frac{dA_i}{dt} + v_j\nabla_i A_j\end{aligned}$$

or $v_j\nabla_i A_j = \nabla_i(v_j A_j)$, car x_i et v_i sont indépendantes les unes des autres, et

$$\frac{\partial}{\partial v_i}(\varphi - v_j A_j) = -\frac{\partial v_j}{\partial v_i}A_j = -\delta_{ij}A_j = -A_i.$$

Nous avons utilisé le fait que φ et $\vec{A}$ ne dépendent pas des vitesses. Ce qui permet d'écrire finalement

$$F_i = q\left(-\nabla_i\left(\varphi - \vec{v}\cdot\vec{A}\right) + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\varphi - \vec{v}\cdot\vec{A}\right)\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial v_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

avec $V = q\left(\varphi - \vec{v}\cdot\vec{A}\right)$, et qui n'est d'autre que la relation recherchée.

3. Le lagrangien de la particule chargée soumise à l'action de la force de Lorentz est alors

$$L(x_i, \dot{x}_i; t) = \; = T - V = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)^2 - q\left(\varphi - \vec{v}\cdot\vec{A}\right)$$

4. Calculons les moments conjugués

$$\begin{aligned}p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_1 \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{y} + qA_2 \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{z} + qA_3\end{aligned}$$

5. Le hamiltonien de la particule est donné par

$$\begin{aligned}H(x_i, p_i; t) = p_i\dot{x}_i - L &= m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + q\vec{v}\cdot\vec{A} - \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)^2 + q\left(\varphi - \vec{v}\cdot\vec{A}\right) \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi.\end{aligned}$$

Comme le champ magnétique ne travaille pas, le potentiel vecteur ne figure pas dans l'expression du hamiltonien. De même, l'énergie mécanique de la particule est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie $q\varphi$.

Corrigé 4 : Lois de symétrie

Considérons une particule qui se déplace dans le plan (OXY). Sachant que l'énergie cinétique $T = T(\dot{x}, \dot{y})$ et que $\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = T - V$, dire quelle est la loi de symétrie à laquelle obéit le lagrangien et quelle grandeur est conservée dans les cas suivants :

1. $V(x, y, t) = ax$
   Comme le potentiel ne dépend pas explicitement du temps, alors le lagrangien non plus et donc l'énergie mécanique du système est conservée ;
   y est une variable cyclique, alors p_y, l'impulsion selon Oy, est conservée ;
2. $V(x, y) = at(x^2 + y^2)$:
   Le potentiel dépend de r^2 et donc invariant par rapport à une rotation par rapport à n'importe quel axe ce qui implique que le moment cinétique par rapport au point O est conservé.

3. $V(x, y) = a(x - y)$
   Le potentiel ne dépend pas explicitement du temps alors l'énergie mécanique est conservée. De même si l'on fait une translation de s selon Ox, $x \to x' = x + s$, et selon Oy, $y \to y' = y + s$ alors $V(x', y') = a(x' - y') = a(x - y) = V(x, y)$. Et donc le lagrangien est invariant par rapport à cette translation. Notons que le fait que l'on fasse la même translation selon Ox et Oy, la translation résultante se fait selon la médiatrice et donc selon le théorème de Noether,l'impulsion est conservée selon la direction de cette médiatrice.