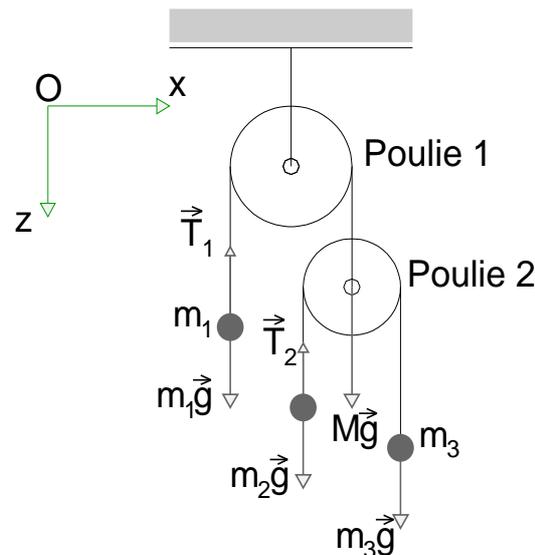


Corrigé du TD de Mécanique Analytique & Vibrations  
 Série N° 1  
 Filière SMP S5

## Corrigé 1 : Machine d'Atwood. Contraintes

Le dispositif de la machine d'Atwood est décrit par la figure ci-contre.



Notons le plan dans lequel le mouvement a lieu par  $(Oxz)$  et l'axe  $Oz$  est descendant. et soient  $z_i, i = 1, 2, 3$  les côtes respectivement de  $m_i, i = 1, 2, 3$ .

- Les forces appliquées aux trois masses sont
  - le poids  $m_1\vec{g}$  et la tension du fil  $\vec{T}_1$  appliqués à la masse  $m_1$  ;
  - en l'absence du frottement au niveau de la poulie 1, la tension du fil appliquée à  $M$  est  $\vec{T}_1$ .  $M$  est soumise également au poids  $M\vec{g}$ .
  - le poids  $m_2\vec{g}$  et la tension du fil  $\vec{T}_2$  appliqués à la masse  $m_2$  ;
  - en l'absence du frottement au niveau de la poulie 2, la tension du fil appliquée à  $m_3$  est  $\vec{T}_2$ .  $m_3$  est soumise également au poids  $m_3\vec{g}$ .
 Les forces de liaison sont les tensions  $\vec{T}_1$  et  $\vec{T}_2$ .

- Le caractère inextensible des fils implique que la longueur des fils reste constante et égale à  $L$ , ce qui implique

$$L = (z_1 - l_0) + (z - l_0) + \pi R_1 \implies f_1(z_1, z_2) = (z_1 - l_0) + (z - l_0) + \pi R_1 - L = 0 \text{ Poulie 1}$$

$$L = (z_2 - z) + (z_3 - z) + \pi R_2 \implies f_2(z_1, z_2) = (z_2 - z) + (z_3 - z) + \pi R_2 - L = 0 \text{ Poulie 2}$$

et les deux contraintes sont ainsi holonomes puisqu'elles ne dépendent que des côtes ;  $z$  étant la côte de la poulie 2.

- Le système est formé de 4 masses considérées comme des points matériels, ce qui donne pour le nombre total de coordonnées  $4 \times 3 = 12$ . Comme le mouvement est dans le plan  $(Oxz)$  alors

les coordonnées selon  $Oy$  sont nulles, ce qui laisse  $12 - 4 = 8$ . Le mouvement des masses est dû à la gravité et donc les trajectoires sont rectilignes ce qui implique que les coordonnées selon  $Ox$  sont constantes, ce qui laisse  $8 - 4 = 4$ . Nous avons deux contraintes holonomes  $f_i, i = 1, 2$  ce qui donne pour le nombre de coordonnées indépendantes  $4 - 2$ . Aussi le nombre de degrés de liberté est égal à 2. On peut choisir comme coordonnées généralisées  $z_1$  et  $z_2$ . Les autres côtes se déduisent comme suit

$$\begin{aligned} z &= L + 2l_0 - \pi R_1 - z_1 \\ z_3 &= L + 2z - \pi R_2 - z_2 = 3L + 4l_0 - \pi(R_2 - R_1) - (2z_1 + z_2). \end{aligned}$$

4. Appliquons le principe fondamental de la dynamique au système formé par les trois masses et la poulie 2, en projetant sur l'axe  $Oz$

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 &= m_1 g - T_1 & \implies & m_1 \ddot{z}_1 + T_1 = m_1 g \\ m_2 \ddot{z}_2 &= m_2 g - T_2 & \implies & m_2 \ddot{z}_2 + T_2 = m_2 g \\ m_3 \ddot{z}_3 &= m_3 g - T_2 & \implies & -m_3(2\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2) + T_2 = m_3 g \\ M \ddot{z} &= Mg - T_1 + 2T_2 & \implies & -M\ddot{z}_1 + T_1 - 2T_2 = Mg \end{aligned}$$

aussi nous disposons de quatre équations à quatre inconnues que l'on peut mettre sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 1 \\ -2m_3 & -m_3 & 0 & 1 \\ -M & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 g \\ m_2 g \\ m_3 g \\ Mg \end{pmatrix}$$

et que l'on peut résoudre en utilisant la méthode de Cramer

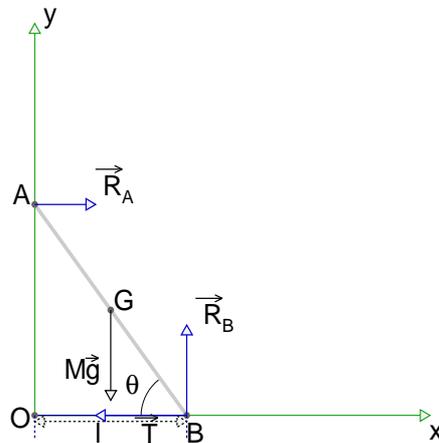
$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 &= \frac{\begin{vmatrix} m_1 g & 0 & 1 & 0 \\ m_2 g & m_2 & 0 & 1 \\ m_3 g & -m_3 & 0 & 1 \\ Mg & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 1 \\ -2m_3 & -m_3 & 0 & 1 \\ -M & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \left[ \frac{(m_1 - M)(M + m_3) - 4m_2 m_3}{(m_1 + M)(m_2 + m_3) + 4m_2 m_3} \right] g \\ \ddot{z}_2 &= \frac{\begin{vmatrix} m_1 & m_1 g & 1 & 0 \\ 0 & m_2 g & 0 & 1 \\ -2m_3 & m_3 g & 0 & 1 \\ -M & Mg & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 1 \\ -2m_3 & -m_3 & 0 & 1 \\ -M & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \left[ \frac{(m_1 + M)m_2 + (M - 3m_1 + 4m_2)m_3}{(m_1 + M)(m_2 + m_3) + 4m_2 m_3} \right] g \\ T_1 &= \frac{\begin{vmatrix} m_1 & 0 & m_1 g & 0 \\ 0 & m_2 & m_2 g & 1 \\ -2m_3 & -m_3 & m_3 g & 1 \\ -M & 0 & Mg & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 1 \\ -2m_3 & -m_3 & 0 & 1 \\ -M & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \left[ \frac{2m_1 [4m_2 m_3 + M(m_2 + m_3)]}{(m_1 + M)(m_2 + m_3) + 4m_2 m_3} \right] g \end{aligned}$$

$$T_2 = \frac{\begin{vmatrix} m_1 & m_1 g & 1 & 0 \\ 0 & m_2 g & 0 & 1 \\ -2m_3 & m_3 g & 0 & 1 \\ -M & Mg & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 1 \\ -2m_3 & -m_3 & 0 & 1 \\ -M & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \left[ \frac{4m_1 m_2 m_3}{(m_1 + M)(m_2 + m_3) + 4m_2 m_3} \right] g$$

Notons que les accélérations sont constantes ce qui est attendu puisque le mouvement est rectiligne et uniformément varié.

## Corrigé 2 : Déplacement et travail virtuels

On munit le repère utilisé de la base cartésienne  $(\vec{i}, \vec{j})$ . Soient  $(x_G, y_G)$  les coordonnées cartésiennes du centre de masse  $G$ .



1. Les forces appliquées à l'échelle sont

- le poids  $M\vec{g}$ ;
- la réaction au point  $A$   $\vec{R}_A$ ;
- la réaction au point  $B$   $\vec{R}_B$ ;
- la tension du fil  $\vec{T}$ .

sachant que les forces de liaison sont  $\vec{R}_A$ ,  $\vec{R}_B$  et  $\vec{T}$ .

2. La contrainte de liaison imposée en  $B$ , en plus de  $\vec{R}_B = R_B \vec{j}$ , est que  $\|\vec{OB}\| = l$ . Comme  $\vec{OB} = \vec{OG} + \vec{GB} = x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + \frac{l}{2} (\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j}) = (x_G + \frac{l}{2} \cos\theta) \vec{i} + (y_G - \frac{l}{2} \sin\theta) \vec{j}$ , alors la contrainte se met sous la forme

$$\left(x_G + \frac{L}{2} \cos\theta\right)^2 + \left(y_G - \frac{L}{2} \sin\theta\right)^2 - l^2 = 0$$

qui est donc une contrainte holonome.

Quand l'échelle se déploie (s'ouvre), avant d'atteindre sa position d'équilibre, le nombre de degrés de liberté possibles de l'échelle est six, trois translations, décrites par les coordonnées du centre de masse  $G$ , et trois rotations. Comme le mouvement a lieu dans le plan, alors deux coordonnées suffisent pour décrire la position de  $G$  et seule une rotation est possible, décrite par l'angle  $\theta$ . Comme  $A$  est astreinte à se déplacer sur le mur et  $B$  sur le sol, alors on a

$$OA = L \sin\theta \text{ et } OB = L \cos\theta.$$

On peut ainsi déduire que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} \\ &= L\sin\theta\vec{j} - \frac{L}{2}\sin\theta\vec{j} + \frac{L}{2}\cos\theta\vec{i} \\ &= \frac{L}{2}\sin\theta\vec{j} + \frac{L}{2}\cos\theta\vec{i} \implies x_G - \frac{L}{2}\cos\theta = 0 \text{ et } y_G - \frac{L}{2}\sin\theta = 0\end{aligned}$$

ces deux dernières équations étant deux liaisons holonomes, ce qui réduit le nombre de degrés de liberté à  $3 - 2 = 1$ .

3. On se propose d'établir l'expression de la tension  $\vec{T} = -T\vec{i}$ .

**3-a)** On choisit le déplacement virtuel  $\delta\theta$ , qui consiste à ce que lorsque  $\theta$  passe à  $\theta + \delta\theta$  l'échelle se déplace de manière que  $A$  glisse sur le mur et  $B$  glisse sur le sol. Aussi le travail de  $R_A$  est nul et celui de  $R_B$  l'est également et c'est le résultat recherché.

**3-b)** Pour établir l'expression de la composante de la force généralisée  $Q_\theta$  associée à la coordonnée généralisée  $\theta$ , il suffit d'exprimer le travail élémentaire sous forme  $\delta W = Q_\theta\delta\theta$ . Sachant que

$$\delta W = -Mg\vec{j} \cdot \delta\overrightarrow{OG} + \vec{T} \cdot \delta\overrightarrow{OB}$$

et que  $\overrightarrow{OB} = L\cos\theta\vec{i} \implies \delta\overrightarrow{OB} = -L\sin\theta\delta\theta\vec{i}$  et  $\overrightarrow{OG} = \frac{L}{2}(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})$  ce qui implique pour ce dernier que  $\delta\overrightarrow{OG} = \frac{L}{2}(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})\delta\theta$ , l'expression du travail élémentaire devient

$$\delta W = -Mg\frac{L}{2}\cos\theta\delta\theta + LT\sin\theta\delta\theta = -\left(\frac{Mg}{2}\cos\theta - T\sin\theta\right)L\delta\theta.$$

ce qui permet de déduire que  $Q_\theta = -\left(\frac{Mg}{2}\cos\theta - T\sin\theta\right)L$ .

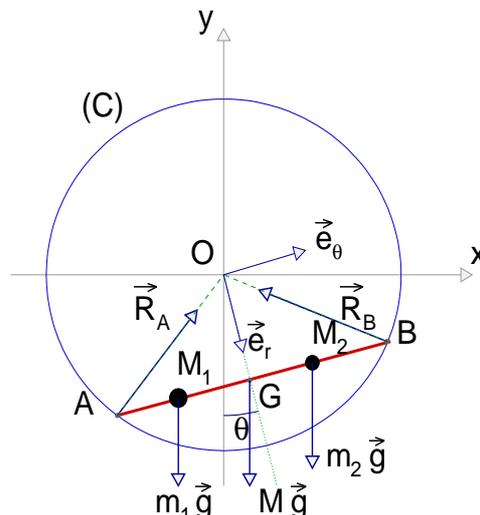
**3-c)** Le principe de d'Alembert stipule que  $\delta W = 0$ , comme  $\delta\theta$  est arbitraire cela implique que  $Q_\theta = 0$  et donc

$$\frac{Mg}{2}\cos\theta - T\sin\theta = 0 \implies T = \frac{1}{2}Mg\cot\theta$$

et qui n'est d'autre que le résultat recherché.

## Corrigé de l'exercice 3

On considère un cerceau  $(C)$  de centre  $O$  et de rayon  $a$  faisant partie du plan vertical  $(Oxy)$ . Soit  $AB$  une barre de longueur  $\|AB\| = a\sqrt{3}$  et dont les extrémités  $A$  et  $B$  glissent sans frottement sur  $(C)$ , voir figure ci-après.



Avant de répondre aux questions de cet exercice, établissons d'abord quelques relations géométriques.

Le triangle  $(OAB)$  est isocèle car  $OA = OB = a$ . Comme  $G$  est le milieu de  $AB$ , alors  $\overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{AB}$  car  $OG$  est la bissectrice de l'angle  $(AOB)$ . On en déduit alors<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} OA &= OB = a \\ OG &= \sqrt{OA^2 - AG^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a \\ GM_1 &= GM_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a \\ OM_1 &= OM_2 = \sqrt{GM_2^2 + OG^2} = a\sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{4}a \\ \beta &= (\widehat{M_1OG}) = \arccos\left(\frac{OG}{OM_1}\right) = \arccos\left(\frac{a/2}{a\sqrt{7}/4}\right) = \arccos\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right) \end{aligned}$$

- Les forces appliquées au système  $\Sigma$  sont
  - Poids  $M\vec{g}$  appliqué en  $G$  ;
  - Poids  $m_1\vec{g}$  appliqué en  $M_1$  ;
  - Poids  $m_2\vec{g}$  appliqué en  $M_2$  ;
  - Réaction de  $(C)$  sur la barre en  $A$ ,  $\vec{R}_A$ , dont la direction est normale à la surface de contact puisqu'il n'y a pas de frottement ;
  - Réaction de  $(C)$  sur la barre en  $B$ ,  $\vec{R}_B$ , dont la direction est normale à la surface de contact puisqu'il n'y a pas de frottement ; $\vec{R}_A$  et  $\vec{R}_B$  sont des forces de liaison.
- Rappelons que  $(\Sigma) = (AB) + (m_1) + (m_2)$ . Comme les points matériels  $m_1$  et  $m_2$  sont solidaires de la barre, l'ensemble peut être considéré comme un seul solide. D'où les coordonnées décrivant le mouvement de  $\Sigma$  sont les coordonnées du centre de masse  $G$ ,  $x_G$ ,  $y_G$  et  $z_G$ , d'une part, et les angles de précession, de nutation et de rotation qui se réduisent à l'angle  $\theta$ , d'autre part. Comme le mouvement a lieu dans le plan du cerceau confondu avec  $(Oxy)$ , cela implique que  $z_G = 0$ . De même, les extrémités de la barre se déplacent sur le cerceau, ce qui engendre les contraintes

$$x_G = \frac{a}{2}\sin\theta \text{ et } y_G = -\frac{a}{2}\cos\theta$$

ce qui laisse finalement une seule coordonnée indépendante  $\theta$ . D'où le nombre de degré de liberté est égal à 1.

- Le déplacement virtuel ne faisant pas travailler à la fois  $\vec{R}_A$  et  $\vec{R}_B$  coïncide avec le déplacement réel où  $A$  et  $B$  glissent sur  $(C)$  car les réactions sont perpendiculaires au déplacement et donc leurs travaux sont nuls.

## 1<sup>ère</sup> méthode

Considérons la base polaire  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ . On note bien que

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_r &= \sin\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{j} \\ \vec{e}_\theta &= \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \end{aligned} \right\} \implies \delta\vec{e}_r = [\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}] \delta\theta = \delta\theta\vec{e}_\theta.$$

---

1. les expressions ci-dessous sont les modules des vecteurs considérés.

Aussi, les vecteurs position et les déplacements élémentaires sont donnés par

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OG} &= \frac{a}{2}\vec{e}_r \implies \delta\overrightarrow{OG} = \frac{a}{2}\delta\theta\vec{e}_\theta \\
\overrightarrow{OM}_1 &= \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_1 \\
&= \frac{a}{2}\vec{e}_r - \frac{a\sqrt{3}}{4}\vec{e}_\theta \implies \delta\overrightarrow{OM}_1 = \left[ \frac{a}{2}\vec{e}_\theta + \frac{a\sqrt{3}}{4}\vec{e}_r \right] \delta\theta \\
\overrightarrow{OM}_2 &= \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}_2 \\
&= \frac{a}{2}\vec{e}_r + \frac{a\sqrt{3}}{4}\vec{e}_\theta \implies \delta\overrightarrow{OM}_2 = \left[ \frac{a}{2}\vec{e}_\theta - \frac{a\sqrt{3}}{4}\vec{e}_r \right] \delta\theta.
\end{aligned}$$

Le travail élémentaire est alors égal à

$$\begin{aligned}
\delta W &= m_1\vec{g} \cdot \delta\overrightarrow{OM}_1 + m_2\vec{g} \cdot \delta\overrightarrow{OM}_2 + M\vec{g} \cdot \delta\overrightarrow{OG} \\
&= \vec{g} \cdot \left[ (m_1 - m_2) \frac{a\sqrt{3}}{4}\vec{e}_r + (m_1 + m_2 + M) \frac{a}{2}\vec{e}_\theta \right] \delta\theta \\
&= -g \cdot \left[ -(m_1 - m_2) \frac{a\sqrt{3}}{4}\cos\theta + (m_1 + m_2 + M) \frac{a}{2}\sin\theta \right] \delta\theta
\end{aligned}$$

sachant que  $\vec{g} = -g\vec{j}$ . Le principe de d'Alembert stipule que  $\delta W = 0$  et comme  $\delta\theta$  est arbitraire alors

$$\begin{aligned}
-(m_1 - m_2) \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\theta + (m_1 + m_2 + M) \frac{1}{2}\sin\theta &= 0 \\
\implies \operatorname{tg}\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M}.
\end{aligned}$$

Notons bien que si  $m_1 = m_2$  alors  $\operatorname{tg}(\theta) = 0$  ce qui est attendu puisque dans ce cas là la barre sera en équilibre dans la position verticale.

## 2<sup>ème</sup> méthode

Etablissons les expressions des vecteurs positions suivants  $\overrightarrow{OG} = \frac{a}{2} (\sin\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{j})$ ,  $\overrightarrow{OM}_1 = \frac{\sqrt{7}}{4}a [-\sin(\beta - \theta)\vec{i} - \cos(\beta - \theta)\vec{j}]$  et  $\overrightarrow{OM}_2 = \frac{\sqrt{7}}{4}a [\sin(\beta + \theta)\vec{i} - \cos(\beta + \theta)\vec{j}]$  ce qui donne pour les déplacements élémentaires

$$\begin{aligned}
\delta\overrightarrow{OM}_1 &= \frac{\sqrt{7}}{4}a [\cos(\beta - \theta)\vec{i} - \sin(\beta - \theta)\vec{j}] \delta\theta \\
\delta\overrightarrow{OM}_2 &= \frac{\sqrt{7}}{4}a [\cos(\beta + \theta)\vec{i} + \sin(\beta + \theta)\vec{j}] \delta\theta \\
\delta\overrightarrow{OG} &= \frac{a}{2} [\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}] \delta\theta
\end{aligned}$$

et pour le travail élémentaire

$$\delta W = m_1\vec{g} \cdot \delta\overrightarrow{OM}_1 + m_2\vec{g} \cdot \delta\overrightarrow{OM}_2 + M\vec{g} \cdot \delta\overrightarrow{OG}.$$

Comme  $\vec{g} = -g\vec{j}$ , alors

$$\delta W = \left[ +m_1ga\frac{\sqrt{7}}{4}\sin(\beta - \theta) - m_2ga\frac{\sqrt{7}}{4}\sin(\beta + \theta) - Mg\frac{a}{2}\sin\theta \right] \delta\theta$$

$$\begin{aligned}
&= ga \frac{\sqrt{7}}{4} [m_1 (\sin\beta \cos\theta - \sin\theta \cos\beta) - m_2 (\sin\beta \cos\theta + \sin\theta \cos\beta)] \delta\theta - Mg \frac{a}{2} \sin\theta \delta\theta \\
&= ga \frac{\sqrt{7}}{4} [(m_1 - m_2) \sin\beta \cos\theta - (m_1 + m_2) \cos\beta \sin\theta] \delta\theta - Mg \frac{a}{2} \sin\theta \delta\theta.
\end{aligned}$$

Or le principe de d'Alembert donne  $\delta W = 0$  et comme  $\delta\theta$  est arbitraire alors

$$\begin{aligned}
ga \frac{\sqrt{7}}{4} [(m_1 - m_2) \sin\beta \cos\theta - (m_1 + m_2) \cos\beta \sin\theta] - Mg \frac{a}{2} \sin\theta &= 0 \\
\implies \operatorname{tg}\theta \left[ M + \frac{\sqrt{7}}{2} (m_1 + m_2) \cos\beta \right] &= \frac{\sqrt{7}}{2} (m_1 - m_2) \sin\beta \\
\implies \operatorname{tg}\theta &= \frac{\frac{\sqrt{7}}{2} (m_1 - m_2) \sin\beta}{M + \frac{\sqrt{7}}{2} (m_1 + m_2) \cos\beta}
\end{aligned}$$

avec  $\sin\beta = GM_2/OM_2 = \frac{a\sqrt{3}/4}{a\sqrt{7}/4} = \sqrt{21}/7$  et  $\cos\beta = OG/GM_2 = \frac{a/2}{a\sqrt{7}/4} = 2\sqrt{7}/7$  ce qui donne finalement

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} (m_1 - m_2)}{M + m_1 + m_2}.$$

On vérifie bien que si  $m_1 = m_2$  alors  $\operatorname{tg}\theta = 0 \implies \theta = 0$  ce qui est attendu car dans ce cas la barre sera en équilibre dans la position horizontale.

4. Soient  $\vec{u}_{AB}, \vec{u}_A, \vec{u}_B$  et  $\vec{u}_G$  les vecteurs unitaires respectivement des directions de  $\overrightarrow{AB}, \vec{R}_A, \vec{R}_B$  et  $\overrightarrow{OG}$ . On cherche un déplacement virtuel qui annule le travail de  $\vec{R}_A$ . Pour ce faire, on considère une rotation du cerceau d'un angle  $\varphi$  autour du point  $A$  en fixant  $\theta$ . Considérons le repère fixe  $\mathcal{R}_1(A, x'y'z')$  et la base cartésienne qui lui est associée  $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ . La rotation a lieu donc autour de  $Az'$ . Soit  $\vec{v}_{AB}$  le vecteur unitaire  $\perp$  à  $\vec{u}_{AB}$ . On peut écrire

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= a\sqrt{3}\vec{u}_{AB} \\
\overrightarrow{AM}_1 &= a\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{u}_{AB} \\
\overrightarrow{AG} &= a\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_{AB} \\
\overrightarrow{AM}_2 &= a\frac{3\sqrt{3}}{4}\vec{u}_{AB} \\
\overrightarrow{AB} &= a\sqrt{3}\vec{u}_{AB}.
\end{aligned}$$

Comme  $\vec{u}_{AB} = \cos(\theta + \varphi)\vec{i}' + \sin(\theta + \varphi)\vec{j}' \implies \delta\vec{u}_{AB} = (-\sin(\theta + \varphi)\vec{i}' + \cos(\theta + \varphi)\vec{j}') \delta\varphi = \delta\varphi\vec{v}_{AB}$ . Le travail élémentaire engendré lors du déplacement virtuel, calculé dans  $\mathcal{R}_1$ , est alors égal à

$$\delta W = m_1\vec{g} \cdot \delta\overrightarrow{AM}_1 + m_2\vec{g} \cdot \delta\overrightarrow{AM}_2 + M\vec{g} \cdot \delta\overrightarrow{AG} + \vec{R}_B \cdot \delta\overrightarrow{AB}$$

sachant que  $\vec{R}_A$  ne travaille pas car le point  $A$  ne se déplace pas.

Or  $\vec{g} = -g\vec{j}' = -g[\sin(\theta + \varphi)\vec{u}_{AB} + \cos(\theta + \varphi)\vec{v}_{AB}] \implies \vec{g} \cdot \vec{v}_{AB} = -g\cos(\theta + \varphi)$  et  $\vec{R}_A = R_B\vec{u}_B = R_B\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_{AB} + \frac{1}{2}\vec{v}_{AB}\right] \implies \vec{R}_A \cdot \vec{v}_{AB} = \frac{1}{2}R_B$ . En substituant les différentes expressions dans le résultat du travail élémentaire, on obtient

$$\delta W = \left( -ag\sqrt{3}\cos(\theta + \varphi) \left[ \frac{m_1}{4} + \frac{M}{2} + \frac{3m_2}{4} \right] + a\frac{\sqrt{3}}{2}R_B \right) \delta\varphi.$$

Or  $\delta\varphi$  est arbitraire ce qui implique que  $\delta W = 0$  et donne

$$R_B = g \cos(\theta + \varphi) \left( \frac{m_1}{2} + M + \frac{3m_2}{2} \right)$$

Cette dernière relation est valable quelque soit  $\varphi$  et particulièrement pour  $\varphi = 0$  ce qui donne comme résultat final

$$R_B = g \cos\theta \left( \frac{m_1}{2} + M + \frac{3m_2}{2} \right).$$

## Corrigé de l'exercice 3 : Calcul variationnel. Equation d'Euler

1. Calculons  $\frac{d\tilde{I}}{d\alpha}$ . Tout d'abord rappelons que

$$\frac{d}{d\alpha} = \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial z'}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial \alpha}$$

avec  $z' = \partial z / \partial x$ . Ainsi,

$$\frac{d\tilde{I}}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F [z(x, \alpha), \frac{\partial z}{\partial x}(x, \alpha), x]}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{\partial F [z(x, \alpha), \frac{\partial z}{\partial x}(x, \alpha), x]}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial \alpha} \right] dx.$$

Or  $\partial z / \partial \alpha = \eta(x)$  et  $z' = y'(x) + \alpha \eta'(x) \implies \partial z' / \partial \alpha = \eta'(x)$ , ce qui donne

$$\frac{d\tilde{I}}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial z} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial z'} \eta'(x) \right] dx.$$

On intègre le deuxième terme par partie

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial z'} \eta'(x) dx = \left[ \frac{\partial F}{\partial z'} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F}{\partial z'} \right] \eta(x) dx$$

comme  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \implies \left[ \frac{\partial F}{\partial z'} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} = 0$  et nous obtenons

$$\frac{d\tilde{I}}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F}{\partial z'} \right] \right) \eta(x) dx$$

2. Sachant que  $I[y]$  est extrémale si  $\frac{d\tilde{I}}{d\alpha}|_{\alpha=0} = 0$ , et comme

$$\frac{\partial F [z(x, \alpha), \frac{\partial z}{\partial x}(x, \alpha), x]}{\partial z} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial F (y, y', x)}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial F [z(x, \alpha), \frac{\partial z}{\partial x}(x, \alpha), x]}{\partial z'} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial F (y, y', x)}{\partial y'}$$

nous pouvons écrire

$$\frac{d\tilde{I}}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F (y, y', x)}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F (y, y', x)}{\partial y'} \right] \right) \eta(x) dx$$

comme  $\eta(x)$  est arbitraire alors

$$\frac{d\tilde{I}}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0 \implies \frac{\partial F (y, y', x)}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F (y, y', x)}{\partial y'} \right] = 0$$

et qui n'est d'autre que l'équation d'Euler.

3. Le chemin optique est donné par

$$\begin{aligned} L &= \int n ds \\ &= \int n \sqrt{dy^2 + dx^2} = \int n \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int n (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx. \end{aligned}$$

En partant des résultats de la question précédente, on peut noter que

$$F(y, y', x) = n (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On note que  $F(y, y', x)$  ne dépend pas de  $y$  et en appliquant l'équation d'Euler

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = n \frac{d}{dx} \left[ \frac{y'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = 0$$

ce qui donne  $y' = \text{Cte} \implies y = ax + b$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes. On en conclut que le chemin emprunté par la lumière selon le principe de Fermat est une droite.