Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2017/2018

Corrigé du TD de Mécanique Analytique & Vibrations
Série N^{O} 3 - Filière SMP S5

Exercice : Symétries et quantités conservées

Considérons une particule se déplaçant sur un plan (O,xy) munis de la base $(\vec{e}_x,\vec{e}_y)$. Rappelons que la symétrie du Lagrangien est déterminée par celle du potentiel car l'énergie cinétique dépend des vitesses et que la transformation de symétrie porte sur les coordonnées de l'espace.

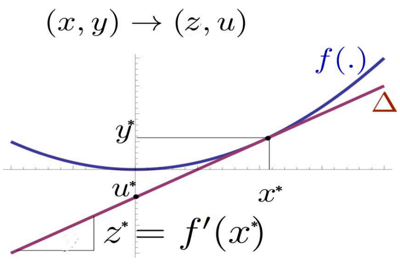
a- L'impulsion selon $\vec{e}_x$, p_x, est conservée et donc la variable x est cyclique. Comme p_y n'est pas une intégrale première alors y n'est pas cyclique et donc n'importe quelle fonction $f(y;t) = \alpha x g(t)$ décrira bien le potentiel dans ce cas. La transformation de symétrie associée est la translation selon Ox.

b- La symétrie associée à l'invariance du moment cinétique est la symétrie de rotation, il faut donc que le lagrangien soit invariant par rotation et donc ne dépend que de x^2+y^2. Comme l'énergie mécanique n'est pas conervée, alors le potentiel dépend explicitement du temps et donc le potentiel $V(x,y;t) = \alpha(x^2+y^2)t$.

La symétrie associée à ce cas est celle de la translation par rapport $\vec{e}_x+\vec{e}_y$ et donc $x \to x' = x+\epsilon$ et $y \to y' = y+\epsilon$. Pour que la symétrie soit vérifiée, il suffit que le potentiel dépende de $(x-y)$ car $x'-y' = x+\epsilon-y-\epsilon = x-y$ et donc invariante. Alors $V(x,y;t) = \alpha t(x-y)$.

Exercice 1 : Transformation de Legendre

Considérons une fonction à une seule variable réelle $f(x)$. Chaque point M du graphique est bien décrit par la donnée $(x, y = f(x))$. Soit $z* = f'(x*)$, la dérivée de f au point $x*$. Soit $u*$ l'intersection de la tangente (Δ) avec l'axe (Oy). Notons que pour chaque x, nous avons $z = f'(x)$ et telle que u est l'intersection de la tangente en x avec l'axe (Oy). On définit la fonction : $F : z \to u$. $F(z)$ est appelée la tranformation de Legendre de $f(x)$.



1. On rappelle que l'équation de (Δ) est donnée par $f(x) - f(x^*) = f'(x^*)(x-x^*)$. L'intersection de (Δ) avec (Oy) est obtenue pour $x = 0$ et donc

$$u^* = f(x^*) - f'(x^*)x^*.$$

Aussi pour tout x, nous avons $u = f(x) - f'(x)x$ et comme $z = f'(x)$ et $u = F(z)$, nous avons donc

$$F(z) \quad = \quad f(x) - zx.$$

Comme f' est inversible alors $x = f'^{-1}(z)$, ce qui donne

$$F(z) \quad = \quad f(f'^{-1}(z)) - zf'^{-1}(z).$$

Dans le cas d'une fonction de plusieurs variables $f(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)$, la transformée de Legendre parrapport aux variables $(y_1,\cdots,y_m)$ est obtenue, en appliquant pour chaque y_i, le résultat obtenu pour une seule variable,

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) \to F(x_1, \cdots, x_n, z_1, \cdots, z_m) \;=\; f(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) - \sum_{i=1}^{m} x_i z_i$$

avec $z_i = \partial f(x_1, \cdots x_n, y_1, \cdots y_m)/\partial y_i$.

Application : $f(x) = x^2/2 \Longrightarrow f'(x) = x$. Comme $f'(x) = z \Longrightarrow x = z$, ce qui donne $F(z) = \frac{z^2}{2} - z^2 = -\frac{1}{2}z^2$.

2. Considérons un système à un degré de liberté dont le lagrangien est $L(q, \dot{q}; t)$.

i- En appliquant le résultat généralisé à une fonction de plusieurs variables nous obtenons

$$F(q, p; t) \;=\; L(q, \dot{q}; t) - p\dot{q}.$$

ii- La fonctionnelle de Hamilton doit vérifier $\dot{q} = \partial H = \partial p$. Si l'on prend comme solution

$$H(q, p; t) = F(q, p; t) = L(q, p; t) - p\dot{q}$$

nous aurons alors $\partial H/\partial p = -\dot{q}$ et donc pour avoir $\dot{q} = \partial H/\partial p$ il suffit de prendre $H(q, p; t) = -F(q, p; t)$.

Application

Nous avons $f(x, y) = x^2/2 - y^2/2 \to F(z, y)$ avec $z = \partial f(x, y)/\partial x$. En appliquant le résultat démontré

$$F(z, y) \;=\; f(x, y) - zx = x^2/2 - y^2/2 - zx.$$

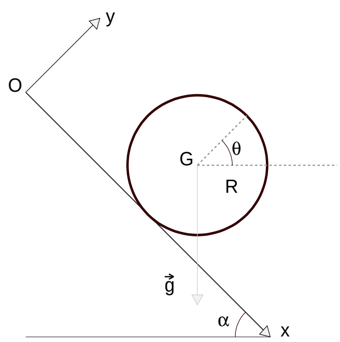
Toutefois, il faut substituer x du membre de droite. Pour ce faire calculons

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= x \text{ or } z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ \Longrightarrow x &= z \Longrightarrow F(x, z) = z^2/2 - y^2/2 - z^2 = -z^2/2 - y^2/2. \end{aligned}$$

Notez bien que $f(x, y)$ peut être identifiée au lagrangien d'un oscillateur harmonique, à une normalisation près, où $\dot{q} = x$, $q = y$ et donc $p = z$. Il est facile de voir que $H(x, z) = -F(x, z)$.

Exercice 3 : Cylindre sur une pente

Considérons un cylindre homogène de masse M et de rayon R roulant sans glissement sur une pente d'angle α, voir figure ci-contre. On donne le moment d'inertie du cylindre selon son axe de révolution $I_{Oz} = \frac{MR^2}{2}$. On prend $\theta(0) = 0$ et $x(0) = 0$.



1. Le système est formé par un cylindre et donc 6 mouvements possibles. Le mouvement a lieu sur un plan incliné $\Longrightarrow$ une rotation au tour de (Oz), repérée par θ, qui décroit quand le cylindre roule, et une translation selon (Ox) repérée par x. La condition de roulement sans glissement implique que $\dot{x} - R\dot{\theta} = 0 \Longrightarrow x - R\theta = K = 0$. En final, nous avons un seul degré de liberté et on prend x comme

coordonnée généralsée. On peut faire également le choix de θ comme coordonnée généralisée. Nous avons

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 \\ V &= Mg\sin\alpha x \\ \Longrightarrow L &= \frac{3}{4}M\dot{x}^2 + Mg\sin\alpha x \end{aligned}$$

comme $p = 3M\dot{x}/2 \Longrightarrow H(x,p) = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 - Mg\sin\alpha x = \frac{p^2}{3M} - Mg\sin\alpha x$. Ce dernier résultat peut être obtenu directement en prenant $H = T + V$ étant donné que la seule force qui travaille est le poids. Rappelons que la force de frottement, $\vec{T}$, ne travaille pas. En effet, son point d'application est I et comme $\vec{V}(I/\mathcal{R}) = \vec{0}$, roulement sans glissement, donc $\vec{T}\cdot\vec{V} = 0 \Longrightarrow W(\vec{T}) = 0$.
L'équation du mouvement est ainsi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} \Longrightarrow \dot{x} = \frac{2p}{3M} \Longrightarrow \dot{p} = \frac{3}{2}M\ddot{x} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = Mg\sin\alpha \Longrightarrow \frac{3}{2}M\ddot{x} = Mg\sin\alpha \Longrightarrow \ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin\alpha. \end{aligned}$$

2. L'équation horaire avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$ est donnée par $x = \frac{1}{3}g\sin\alpha t^2$. Notons que s'il n'y avait pas la condition de roulement sans glissement l'équation horaire en x serait $x = \frac{1}{2}g\sin\alpha t^2$ et donc la condition ralentit l'accélération d'un facteur de 2/3.
Il serait intéressant de refaire rapidement l'exercice en omettant la condition de roulement sans glissement pour montrer la différence.

Exercice 4 : Hamiltonien d'une particule chargée soumise à $(\vec{E}, \vec{B})$

Une particule de charge q et de masse m est soumise à un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$. On rappelle que le potentiel généralisé de la force de Lorentz est $V(\vec{r}, \vec{v}; t) = q\left(\varphi(\vec{r}, t) - \vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{r}, t)\right)$.
On reprend les résultats de l'exercice 6 de la série précédente avec les notations utilisées :

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\left(\varphi(\vec{r}, t) - \vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{r}, t)\right) \text{ et } \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + q\vec{A}.$$

1. L'expression du hamiltonien est donc

$$\begin{aligned} H &= \vec{p}\cdot\vec{v} - L \\ &= mv^2 + q\vec{v}\cdot\vec{A} - \frac{1}{2}mv^2 + q\left(\varphi - \vec{v}\cdot\vec{A}\right) \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 + q\varphi. \end{aligned}$$

Notons que $H = 1/2mv^2 + q\varphi$, ce qui correspondrait à l'énergie mécanique d'une particule soumise uniquement à un potentiel scalaire. Ce qui est bien entendu attendu étant donné que la force magnétique ne travaille pas.
Si $\vec{A} = \vec{0}$, cela implique que $\vec{p} = m\vec{v}$, et donc l'impulsion est égale à la quantité de mouvement, et $H = \frac{p^2}{2m} + q\varphi$. On en conclut que si l'on veut déduire l'expression du hamiltonien en présence d'un potentiel vecteur il suffit de faire la substitution

$$\vec{p} \to \vec{p} - q\vec{A}$$

et c'est ce que l'on appelle la subsitution par couplage minimal.
Noter bien qu'en présence du champ $\vec{A}$, l'impulsion $\vec{p}$ est différente de la quantité de mouvement $m\vec{v}$.

2. Les équations du mouvement s'obtiennent des équations canoniques comme suit

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right) \\
\dot{\vec{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = \frac{q}{m}\sum_{i=1}^{3}\left(p_i - qA_i\right)\frac{\partial A_i}{\partial \vec{r}} - q\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} \\
\Longrightarrow \ddot{\vec{r}} &= \frac{1}{m}\left(\dot{\vec{p}} - q\dot{\vec{A}}\right)
\end{aligned}$$

Notons que, avec $x_1 = x$, $x_2 = y$ et $x_3 = z$,

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{A}} &= \frac{d\vec{A}}{dt} = \sum_{i=1,3}\frac{\partial \vec{A}}{x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\
&= \sum_{i=1,3} v_i\left(\vec{\nabla}\right)_i(\vec{A}) + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
m\ddot{\vec{r}} &= \frac{q}{m}\sum_{i=1}^{3}\left(p_i - qA_i\right)\frac{\partial A_i}{\partial \vec{r}} - q\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} - q\dot{\vec{A}} \\
&= q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + q\left(\sum_{i=1}^{3} v_i\vec{\nabla}A_i - \sum_{i=1,3} v_i\left(\vec{\nabla}\right)_i(\vec{A})\right) \\
&= q\vec{E} + q\left(\vec{v}\wedge\left[\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right]\right) \\
&= \vec{F}
\end{aligned}$$

où $\vec{F}$ est la force de Lorentz. On retrouve les équations du mouvement obtenues à partir du PFD.

Corrigé 5 : Transformations canoniques

1. Considérons un système à un degré de liberté. La nouvelle coordonnée est donnée par $Q = q^2 + \frac{1}{2}\cos(q)$. Pour que cette transformation soit canonique il suffit que

$$\begin{aligned}
\{Q, P\}_{(q,p)} &= 1 \\
\Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} &= 1 \\
\Longrightarrow \left(2q - \frac{1}{2}\sin q\right)\frac{\partial P}{\partial p} &= 1 \\
\Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial p} &= \frac{1}{2q - \frac{1}{2}\sin q} \\
\Longrightarrow P &= \frac{p}{2q - \frac{1}{2}\sin q} + f(q;t)
\end{aligned}$$

et $f(q)$ peut être n'importe quelle fonction différentiable de q. Considérons un système dont le hamiltonien exprimé en coordonnées polaires est donné par

$$H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) + V(r, \varphi)$$

où p_r et p_φ sont respectivement les moments conjugués de r et de φ
En comparant les deux hamiltoniens, nous en déduisons, étant donné que $P_1 = p_r$, que $P_2 = \frac{p_\varphi}{r}$.
Calculons le crochet de poisson suivant, en utilisant les deux relations précédentes,

$$\begin{aligned}
\{P_1, P_2\} &= \frac{\partial P_1}{\partial r}\frac{\partial P_2}{\partial p_r} - \frac{\partial P_1}{\partial p_r}\frac{\partial P_2}{\partial r} + \frac{\partial P_1}{\partial \varphi}\frac{\partial P_2}{\partial p_\varphi} - \frac{\partial P_1}{\partial p_\varphi}\frac{\partial P_2}{\partial \varphi} \\
&= \frac{p_\varphi}{r^2} \neq 0
\end{aligned}$$

et l'on conclut qu'aucune transformation de la sorte ne peut être canonique. Car dans le cas contraire, le crochet de poisson ci-dessus devait être nul.

2. Une transformation canonique pour un système à un seul degré de liberté est décrite par la fonction génératrice de type $F_4(p, P)$ d'expression $F_4(p, P) = P^2 \cosh(p)$.
Nous avons

$$q = -\frac{\partial F_4}{\partial p} = -P^2 \sinh(p) \text{ et } Q = \frac{\partial F_4}{\partial P} = 2P\cosh(p)$$

et nous cherchons $F_3(q, P)$ telle que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_3}{\partial p} &= -q = P^2 \sinh(p) = \frac{Q^2 \sinh(p)}{4\cosh^2(p)} \\
\frac{\partial F_3}{\partial Q} &= -P = -\frac{Q}{2\cosh(p)}.
\end{aligned}$$

La dernière équation implique

$$F_3(Q, p) = -\frac{Q^2}{4\cosh(p)} + g(p).$$

En dérivant par rapport à p nous obtenons

$$\frac{\partial F_3}{\partial p} = \frac{Q^2}{4\cosh^2(p)}\sinh(p) + g'(p).$$

Sachant que $\frac{\partial F_3}{\partial p} = \frac{Q^2 \sinh(p)}{4\cosh^2(p)} \Longrightarrow g'(p) = 0 \Longrightarrow g(p) =$Cst=0. Ce qui donne finalement

$$F_3(Q, p) = -\frac{Q^2}{4\cosh(p)}.$$

Deuxième méthode : Transformée de Legendre $F_4(p, P)$ est une transformée de Legendre de $F_3(p, Q)$ ce qui donne $F_3(p, P) = F_4(p, Q) - QP$ ce qui implique que

$$\begin{aligned}
F_3(p, Q) &= F_4(p, P) - QP \\
&= P^2 \cosh(p) - QP = \frac{Q^2}{4\cosh^2(p)}\cosh(p) - Q\frac{Q}{2\cosh(p)} \\
&= \frac{Q^2}{4\cosh(p)} - \frac{Q^2}{2\cosh(p)} = -\frac{Q^2}{4\cosh(p)}.
\end{aligned}$$

Corrigé 6 : Un pas vers la mécanique quantique

On considère un oscillateur harmmonique à une dimension dont le hamiltonien est donné par

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

(q, p) étant le couple coordonnée généralisée et son moment conjugué et ω la pulsation de l'oscillateur.

1. On procède à la transformation $q = Q/\sqrt{m\omega}$ et $p = P\sqrt{m\omega}$.

   a-

$$\begin{aligned} \{Q, P\} &= \{\sqrt{m\omega}, \frac{p}{\sqrt{m\omega}}\} \\ &= \{q, p\} = 1 \end{aligned}$$

   On en conclut que les nouvelles variables sont canoniques.

   b- En faisant la substitution

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\omega P^2 + \frac{1}{2}\omega X^2 = \frac{1}{2}\omega\left(X^2 + P^2\right).$$

2. En inversant les relations, nous obtenons

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^*) \quad \text{et} \quad P = \frac{-i}{\sqrt{2}}(a - a^*)$$

   ce qui donne pour le hamiltonien

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4}\omega\left[a^2 + a*^2 + 2aa^* - a^2 - a*^2 + 2aa^*\right] = \omega a * a.$$

3.

$$\begin{aligned} \{a, a*\} &= \frac{1}{2}\{Q + iP, Q - iP\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\{Q, Q\} - i\{Q, P\} + i\{P, Q\} + \{P, P\}\right) = -i \\ \{a, a\} = \{a*, a*\} &= 0 \end{aligned}$$

   C'est la méthode utilisé pour la quantification d'un oscillateur harmonique.

4. On note que f ne dépend pas explicitement de t alors $\partial f/\partial t = 0$, alors

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t}$$

   et en utilisant les équations canoniques et en utilisant la définition des crochets de Poisson, nous obtenons

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\mathcal{H}}{\partial P} - \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\mathcal{H}}{\partial Q} = \{f, \mathcal{H}\}.$$