

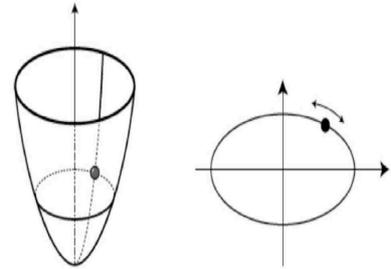
TD de Mécanique Analytique & Vibrations  
 Série N° 1  
 Filière SMP S5

## Classification des contraintes

### Corrigé 1

Considérons les systèmes, illustrés dans les figures ci-contre, constitués par

- Système 1 : une masse ponctuelle glissant sur la surface intérieure d'un paraboloides de révolution ;
- Système 2 : un point matériel astreint à se déplacer sur une trajectoire elliptique.



— Système 1

- i** C'est un point matériel et donc le nombre de mouvements possibles est 3 qui peuvent être paramétrés en raison de la symétrie du système par les coordonnées cylindriques. Ce qui donne pour les paramètres de configuration  $(\rho, \theta, z)$ .
- ii**  $M$  est astreint à se déplacer sur la face intérieure du paraboloides et par conséquent ses coordonnées doivent vérifier l'équation d'un paraboloides,  $z = a(x^2 + y^2)$ , qui est donnée en coordonnées cylindrique par  $z = a\rho^2$ . Comme c'est une équation reliant seulement les coordonnées ce qui implique que la liaison correspondante est holonome. De plus, comme cette dernière ne dépend pas du temps, elle est donc scléronome.
- iii**  $M$  est soumis à une seule contrainte, le nombre de  $ddl$  est alors  $d = 3 - 1 = 2$ .
- iv** Le choix le plus approprié de coordonnées généralisées est dans ce cas est deux coordonnées indépendantes et donc  $(\rho, \theta)$  ou  $(\theta, z)$ .

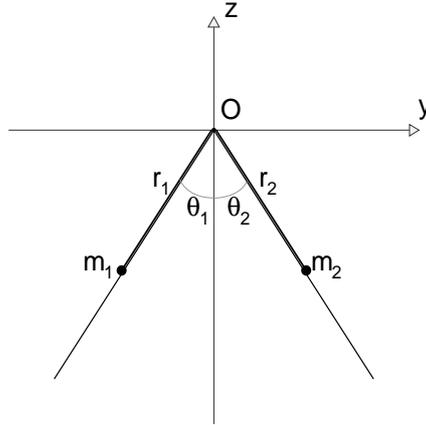
— Système 2

- i** Le système est un point matériel et le mouvement est plan ce qui implique que le nombre de mouvements possibles est 2. Comme le mouvement a lieu dans le plan  $(xOy)$ , on prend ainsi pour les paramètres de configuration les coordonnées cartésiennes de  $M$   $(x, y)$ .
- ii**  $M$  est astreint à se déplacer le long d'une ellipse ce qui contraint ses coordonnées à vérifier l'équation d'une ellipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$  où  $a$  et  $b$  sont les demi-axes de l'ellipse. L'équation précédente relie les coordonnées et ne dépend pas du temps ce qui implique que la liaison est holonome et scléronome.
- iii**  $M$  est soumis à une seule contrainte, en plus du mouvement plan, et donc le nombre de  $ddl$  est  $d = 2 - 1 = 1$ .
- iv** La coordonnée généralisée à choisir dans ce cas est  $x$  ou  $y$ .

### Corrigé 2 : Deux boules ponctuelles liées par un fil

On considère un système formé par deux boules ponctuelles, de masses respectives  $m_1$  et  $m_2$ , liées par un fil inextensible de longueur  $l$ . Les deux boules glissent sans frottement sur deux plans

inclinés d'angles respectivement  $\theta_1$  et  $\theta_2$  par rapport à la verticale et pouvant basculer autour de leur charnière commune, supposée parfaite, voir la figure ci-contre. Soit  $\mathcal{R}(O, xyz)$  un repère galiléen. On pose  $l = r_1 + r_2$  où  $\overrightarrow{Om_1} = r_1 \vec{u}_1$  et  $\overrightarrow{Om_2} = r_2 \vec{u}_2$  et  $\vec{u}_i$  est le vecteur unitaire de  $\overrightarrow{Om_i}$ .



1. le système est composé de deux points matériels et le mouvement a lieu dans le plan  $(yOz)$  ce qui laisse pour chacun des points matériels deux mouvements possibles. Aussi, les paramètres de configuration sont donnés par les coordonnées polaires de chacune des masses  $(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2)$  On peut prendre aussi les coordonnées cartésiennes des deux points matériels.

Les masses sont reliées par un fil inextensible et donc chacune d'elle est soumise à la tension du fil. Cette contrainte peut s'exprimer par  $r_1 + r_2 = l$ . C'est une liaison holonome et scléronome.

Le nombre de degrés de liberté est ainsi égal à  $d = 4 - 1 = 3$ . Les coordonnées généralisées que l'on peut adopter sont  $(r_1, \theta_1, \theta_2)$ .

2. Les positions des deux masses sont repérées comme mentionné ci-dessus par  $\overrightarrow{Om_1} = r_1 \vec{u}_1$  et  $\overrightarrow{Om_2} = (l - r_1) \vec{u}_2$ . Comme la charnière est figée, alors  $d\vec{u}_i = \vec{0}$ . Ce qui donne pour les vitesses  $V^2(m_1/R) = \dot{r}_1^2$  et  $V^2(m_2/R) = \dot{r}_1^2$ . Aussi l'énergie cinétique du système formé par les deux masses est donnée par

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{r}_1^2.$$

Notons par  $m_i \vec{g}$ ,  $\vec{T}_i$  et  $\vec{R}_i$  respectivement le poids, la tension du fil et la réaction normale appliquées à la masse  $m_i$ , avec  $i = 1, 2$ . Soit  $d\overrightarrow{Om_i} = dr_i \vec{u}_i + r_i d\vec{u}_i$  le déplacement élémentaire (réel) de la masse  $m_i$ . Le travail élémentaire engendré est donné par

$$\begin{aligned} \delta W &= (m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{R}_1) \cdot d\overrightarrow{Om_1} + (m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{R}_2) \cdot d\overrightarrow{Om_2} \\ &= (m_1 g \cos \theta_{01} - T_1) dr_1 + (m_2 g \cos \theta_{02} - T_2) dr_2 \\ &= (m_1 \cos \theta_{01} - m_2 \cos \theta_{02}) g dr_1 - (T_1 - T_2) dr_1 \end{aligned}$$

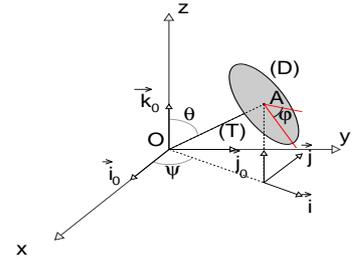
où  $dr_1 + dr_2 = 0$ . Comme le fil est inextensible et la charnière est parfaite alors  $T_1 = T_2$ , ce qui donne

$$dV = -\delta W = -(m_1 \cos \theta_{01} - m_2 \cos \theta_{02}) g dr_1 \implies V = -(m_1 \cos \theta_{01} - m_2 \cos \theta_{02}) g r_1 + Cst.$$

## Corrigé 3 : Disque soudé à une tige sans masse

L'espace est rapporté à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_0(O, xyz)$  munis d'une base orthonormée  $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ ,  $\vec{k}_0$  étant un vecteur vertical ascendant. Soit  $(\Sigma)$  un système constitué par :

- Un disque  $(D)$  de centre  $A$ , de rayon  $R$  et de masse  $m$ ;
- Une tige  $(OA)$  sans masse de longueur  $l$  dont l'extrémité  $O$  est l'origine du repère  $\mathcal{R}_0$  et l'extrémité  $A$  est soudée au centre du disque  $(D)$ . La tige  $(OA)$  est perpendiculaire au plan du disque, voir la figure ci-contre.



Soit  $\mathcal{R}(O, x_1y_1z_1)$  un repère en rotation autour de  $\vec{k}_0$  avec une vitesse angulaire  $\dot{\psi}\vec{k}_0$ .  $\mathcal{R}$  est munis de la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = \vec{k}_0)$ . Le vecteur  $\vec{i}$  est porté par la projection de  $\vec{OA}$  sur le plan  $(x_0Oy_0)$ . On désigne par  $\vec{u}$  le vecteur unitaire porté par  $(OA)$ . Soient  $\theta$  l'angle  $(\vec{k}_0, \vec{u})$ ,  $\psi$  l'angle  $(\vec{i}_0, \vec{i})$  et  $\varphi$  l'angle repérant la rotation propre du système  $(\Sigma)$  autour de  $(OA)$ .

- i Comme la tige est sans masse et la liaison en  $O$  est une liaison rotule<sup>1</sup>, alors les mouvements possibles de  $(\Sigma)$  sont au nombre de 4, 3 translations de  $A$  et la rotation propre du disque. Les paramètres de configurations sont  $(x_A, y_A, z_A, \varphi)$  où  $(x_A, y_A, z_A)$  sont les coordonnées cartésiennes de  $A$ <sup>2</sup>
- ii La liaison en  $A$  est complète (aucun degré de liberté du disque par rapport à la tige), la contrainte imposée par cette liaison est

$$x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 = l^2.$$

C'est une équation reliant les coordonnées et ne dépendant pas du temps ce qui implique que la liaison est holonome et scleronome.

- iii Le nombre de  $ddl$  est  $d = 4 - 1 = 3$ . Les coordonnées généralisées peuvent être identifiés à  $(x_A, y_A, \varphi)$ . ou bien les trois angles  $(\theta, \psi, \varphi)$ .

**On peut aussi présenter la solution comme suit. Le système est un solide il a six degrés de liberté, 3 translations et trois rotations. Nous les repérons par les coordonnées du centre de masse et les trois angles d'Euler,  $(x_A, y_A, z_A, \psi, \theta, \phi)$ . Comme**

$$\begin{cases} x_A = l \sin \theta \cos \psi \\ y_A = l \sin \theta \sin \psi \\ z_A = l \cos \theta \end{cases}$$

**Ce qui fait que la donnée des deux angles identifie les coordonnées de  $A$  et donc le mouvement du système peut être décrit par les trois angles.**

2. Le plan  $(x_0Oy_0)$  est matérialisé ce qui implique que  $\theta$  est constant et que  $\theta = \theta_0 = \text{atan}(R/l)$ . On rappelle que

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \cos \theta_0 \vec{k}_0 + \sin \theta_0 \vec{i} \\ \vec{i} &= \cos \psi \vec{i}_0 + \sin \psi \vec{j}_0 \\ \left. \frac{d\vec{i}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} &= \dot{\psi} \vec{j} \\ \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} &= \dot{\psi} \sin \theta_0 \vec{j}. \end{aligned}$$

1. 3 degrés de liberté de rotation.

2. On peut utiliser aussi les coordonnées sphériques de  $A$ .

- a-** Soit  $I$  le point de contact du disque avec le plan  $(x_0Oy_0)$ . Nous avons  $\vec{OI} = L\vec{i}$  avec  $L = \sqrt{R^2 + l^2}$  ce qui donne  $\vec{AI} = \vec{OI} - \vec{OA} = L\vec{i} - l\vec{u}$ .

La vitesse de  $A$  est égale à

$$\vec{V}(A/\mathcal{R}_0) = \left. \frac{d\vec{OA}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \dot{x}_A \vec{i}_0 + \dot{y}_A \vec{j}_0$$

ce qui donne pour la vitesse de  $I$

$$\begin{aligned} \vec{V}(I \in (D)/\mathcal{R}_0) &= \vec{V}(A/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}((D)/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{AI} \\ &= \dot{x}_A \vec{i}_0 + \dot{y}_A \vec{j}_0 + \left( \dot{\psi} \vec{k}_0 + \dot{\varphi} \vec{u} \right) \wedge \left( L\vec{i} - l\vec{u} \right) \\ &= \dot{x}_A \vec{i}_0 + \dot{y}_A \vec{j}_0 + \left[ L \left( \dot{\varphi} \cos \theta_0 + \dot{\psi} \right) - l \dot{\psi} \sin \theta_0 \right] \vec{j} \\ &= \left( \dot{x}_A - \left[ L \left( \dot{\varphi} \cos \theta_0 + \dot{\psi} \right) - l \dot{\psi} \sin \theta_0 \right] \sin \psi \right) \vec{i}_0 + \\ &\quad + \left( \dot{y}_A + \left[ L \left( \dot{\varphi} \cos \theta_0 + \dot{\psi} \right) - l \dot{\psi} \sin \theta_0 \right] \cos \psi \right) \vec{j}_0 \\ &= \left( \dot{x}_A - L \left( \dot{\varphi} \cos \theta_0 + \dot{\psi} \right) \sin \psi - \dot{x}_A \right) \vec{i}_0 + \\ &\quad + \left( \dot{y}_A + L \left( \dot{\varphi} \cos \theta_0 + \dot{\psi} \right) \cos \psi - \dot{y}_A \right) \vec{j}_0 \\ &= L \left( \dot{\varphi} \cos \theta_0 + \dot{\psi} \right) \left( -\sin \psi \vec{i}_0 + \cos \psi \vec{j}_0 \right) \\ &= L \left( \dot{\varphi} \cos \theta_0 + \dot{\psi} \right) \vec{j}. \end{aligned}$$

Nous avons roulement sans glissement si  $\vec{V}(I \in (D)/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(I \in (x_0Oy_0))$ , or cette dernière est nulle et donc  $\vec{V}(I \in (D)/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$ . Ce qui donne finalement

$$\dot{\varphi} \cos \theta_0 + \dot{\psi} = 0.$$

Comme les contraintes mettent en jeu les vitesses angulaires et est intégrable, les liaisons correspondantes sont semi-holonomes.

Si ce sont les angles qui sont pris comme coordonnées généralisées, alors

$$\vec{V}(A/\mathcal{R}_0) = l \dot{\psi} \sin \theta_0 \vec{j}$$

et la vitesse du point  $I$  est donnée par

$$\begin{aligned} \vec{V}(I \in (D)/\mathcal{R}_0) &= \vec{V}(A/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}((D)/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{AI} \\ &= l \dot{\psi} \sin \theta_0 \vec{j} + \left( \dot{\psi} \vec{k}_0 + \dot{\varphi} \vec{u} \right) \wedge \left( L\vec{i} - l\vec{u} \right) \\ &= \left[ l \dot{\psi} \sin \theta_0 + L \left( \dot{\varphi} \cos \theta_0 + \dot{\psi} \right) - l \dot{\psi} \sin \theta_0 \right] \vec{j} \\ &= L \left[ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta_0 \right] \vec{j} \end{aligned}$$

et la condition de roulement sans glissement est  $\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta_0 = 0$ . Comme l'équation relie des vitesses angulaires et qu'elle est intégrable alors c'est une liaison semi-holonome.<sup>3</sup>

- b-** Le contact entre le disque  $(D)$  et le plan  $(x_0Oy_0)$  implique que  $z_A - l \cos \theta_0 = 0$ , qui est une liaison holonome scléronome.

En coordonnées angulaires, la condition de contact est traduite par la relation  $\theta = \theta_0 = \text{atan} \frac{R}{l}$  qui est une liaison holonome.

---

3. On peut déduire cette dernière relation des conditions de roulement sans glissement précédente en remplaçant  $\dot{x}_A = -l \sin \theta_0 \dot{\psi} \sin \psi$  et  $\dot{y}_A = \dot{\psi} \sin \theta_0 \cos \psi$ .

- d- Notons par  $\mathcal{R}_2(A, x_2y_2, z_2)$  le repère principal de  $(D)$  où ce dernier est contenu dans le plan  $(Ax_2y_2)$ . Soit  $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2 = \vec{u})$  la base liée à  $\mathcal{R}_2$ .  
L'énergie cinétique de  $(\Sigma)$  dans  $\mathcal{R}_0$  est  $T(\Sigma/\mathcal{R}_0) = T((D)/\mathcal{R}_0) + T(\text{Tige}/\mathcal{R}_0) = T((D)/\mathcal{R}_0)$  étant donnée que la tige est sans masse.

Pour calculer l'énergie cinétique, on utilise le theoreme de Koenig :

$$T((D)/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(A/\mathcal{R}_0) + \frac{1}{2}\Omega((D)/\mathcal{R}_2)\mathbb{I}_A\Omega((D)/\mathcal{R}_2).$$

Rappelons que le terme de rotation est invariant et on l'exprime donc dans le repère principal de  $(D)$  où la matrice d'inertie du disque est donnée par

$$\mathbb{I}_A = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}$$

et l'expression du vecteur rotation est

$$\vec{\Omega} = \dot{\psi}\vec{k}_0 + \dot{\varphi}\vec{u}.$$

Or  $\vec{k}_0 = \cos\theta_0\vec{u} + \sin\theta_0(\cos\varphi\vec{i}_2 + \sin\varphi\vec{j}_2)$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} &= \dot{\psi} \left[ \cos\theta_0\vec{k}_2 + \sin\theta_0(\cos\varphi\vec{i}_2 + \sin\varphi\vec{j}_2) \right] + \dot{\varphi}\vec{k}_2. \\ &= \dot{\psi}\sin\theta_0\cos\varphi\vec{i}_2 + \dot{\psi}\sin\theta_0\sin\varphi\vec{j}_2 + (\dot{\psi}\cos\theta_0 + \dot{\varphi})\vec{k}_2 \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\psi}\sin\theta_0\cos\varphi \\ \dot{\psi}\sin\theta_0\sin\varphi \\ \dot{\psi}\cos\theta_0 + \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2}. \end{aligned}$$

L'énergie cinétique est ainsi égale à

$$\begin{aligned} T[(D)/\mathcal{R}_0] &= \frac{1}{2}ml^2\sin^2\theta_0\dot{\psi}^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} \dot{\psi}\sin\theta_0\cos\varphi & \dot{\psi}\sin\theta_0\sin\varphi & \dot{\psi}\cos\theta_0 + \dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi}\sin\theta_0\cos\varphi \\ \dot{\psi}\sin\theta_0\sin\varphi \\ \dot{\psi}\cos\theta_0 + \dot{\varphi} \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{m}{2} \left[ \sin^2\theta_0\dot{\psi}^2 \left( l^2 + \frac{R^2}{4} \right) + \frac{R^2}{2} (\cos\theta_0\dot{\psi} + \dot{\varphi})^2 \right]. \end{aligned}$$

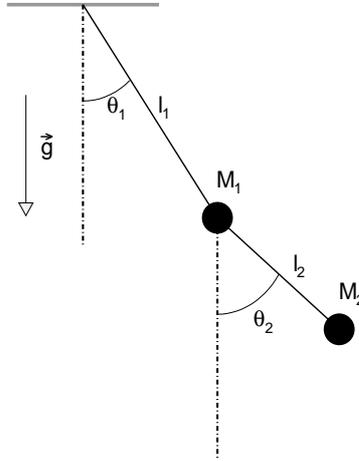
et en utilisant la relation de roulement sans glissement, nous obtenons

$$\begin{aligned} T[(D)/\mathcal{R}_0] &= \frac{1}{2}m \left[ \sin^2\theta_0\cos^2\theta_0\dot{\varphi}^2 \left( l^2 + \frac{R^2}{4} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{R^2}{2} (-\cos^2\theta_0 + 1)^2 \dot{\varphi}^2 \right] \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2 \left[ \sin^2\theta_0\cos^2\theta_0 \left( l^2 + \frac{R^2}{4} \right) + \frac{R^2}{2}\sin^4\theta_0 \right] \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2\sin^2\theta_0 \left[ \cos^2\theta_0l^2 + \frac{R^2}{4}(1 + \cos^2\theta_0) \right] \end{aligned}$$

Quant à l'énergie potentielle, elle est nulle étant donnée que la réaction en  $I$  ne travaille pas, absence de frottement, et le poids en  $A$  ne travaille pas non plus car ce dernier est perpendiculaire au déplacement de  $A$ .

## Corrigé de l'exercice 4

Considérons un double pendule constitué d'un point matériel  $M_1$ , de masse  $m_1$ , lié par un fil inextensible de longueur  $l_1$  à une position fixe  $O$ . Un deuxième point matériel  $M_2$  de masse  $m_2$  est lié par un fil inextensible de longueur  $l_2$  à  $M_1$ , voir la figure ci-contre.



- Notons par  $\mathcal{R}(O, xyz)$  le repère du laboratoire considéré galiléen,  $(Ox)$  étant l'axe vertical descendant. Le mouvement du système a lieu dans le plan  $(Oxy)$ . Pour établir le nombre de degrés de liberté, comme le système est formé de deux points matériels le nombre de mouvement possibles est 6. Soient  $(x_1, y_1, z_1)$  et  $(x_2, y_2, z_2)$  les coordonnées cartésiennes des deux masses. Leurs expressions sont données par

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \cos \theta_1 & x_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \\ y_1 = l_1 \sin \theta_1 & y_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \\ z_1 = 0 & z_2 = 0. \end{cases}$$

On relève que les 6 coordonnées sont bien définies par la donnée des angles  $\theta_1$  et de  $\theta_2$  ce qui implique que le nombre de degrés de liberté est égal à 2.

**Raisonnement qualitatif :** *Le système est composé de deux points matériels et donc le nombre de mouvements possibles est 6 translations. Comme le mouvement est plan, les mouvements possibles de chaque point matériel sont réduits à 2 translations. Comme les deux points matériels sont attachés par des fils inextensibles et donc le nombre de mouvements possibles pour le système est réduit à 2. Aussi le nombre de degrés de liberté est égal à 2.*

Les coordonnées généralisées bien adaptées sont  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

- Pour établir les vitesses, utilisons les bases polaires  $(\vec{u}_i, \vec{v}_i, \vec{k})$ ,  $\overrightarrow{OM_1} = l_1 \vec{u}_1$  et  $\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = l_1 \vec{u}_1 + l_2 \vec{u}_2$ . Aussi les vitesses sont

$$\begin{cases} \vec{V}(M_1/\mathcal{R}) = l_1 \dot{\theta}_1 \vec{v}_1 \implies V^2(M_1/\mathcal{R}) = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ \vec{V}(M_2/\mathcal{R}) = l_1 \dot{\theta}_1 \vec{v}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \vec{v}_2 \implies V^2(M_2/\mathcal{R}) = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2). \end{cases}$$

L'expression de l'énergie cinétique est égale à

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

Quant à l'énergie potentielle, les deux forces qui travaillent sont les poids  $m_1\vec{g}$  et  $m_2\vec{g}$ , ce qui donne

$$\begin{aligned}
dV &= -m_1\vec{g} \cdot d\vec{M}_1 - m_2\vec{g} \cdot d\vec{M}_2 \\
&= -l_1m_1g\vec{i} \cdot d\vec{u}_1 - m_2g\vec{i} \cdot (l_1d\vec{u}_1 + l_2d\vec{u}_2) \\
&= -l_1m_1gd\theta_1\vec{i} \cdot \vec{v}_1 - m_2g(l_1d\theta_1\vec{i} \cdot \vec{v}_1 + l_2d\theta_2\vec{i} \cdot \vec{v}_2) \\
&= l_1m_1g\sin\theta_1d\theta_1 + m_2g(l_1\sin\theta_1d\theta_1 + l_2\sin\theta_2d\theta_2) \\
\implies V &= -g[l_1\cos\theta_1(m_1 + m_2) + m_2l_2\cos\theta_2] + K(= 0).
\end{aligned}$$

Quant à l'expression du lagrangien du système, nous avons

$$\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)] + \\
&\quad + g[l_1\cos\theta_1(m_1 + m_2) + m_2l_2\cos\theta_2].
\end{aligned}$$

3. Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) - gl_1(m_1 + m_2)\sin\theta_1 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= -m_2gl_2\sin\theta_2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2); \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2l_2^2\dot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2);
\end{aligned}$$

Ce qui donne également

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + \\
&\quad + m_2l_1l_2(\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\sin(\theta_1 - \theta_2)) \\
&= (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + \\
&\quad + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\sin(\theta_1 - \theta_2) \\
&= m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2).
\end{aligned}$$

ce qui donne pour les équations de Lagrange

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = -gl_1(m_1 + m_2)\sin\theta_1 - (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 - \\
\quad - m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2) \\
\implies (m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2) = -g(m_1 + m_2)\sin\theta_1 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = -m_2gl_2\sin\theta_2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) - \\
\quad - m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 - m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\
\implies m_2l_2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1 - \theta_2) = -m_2g\sin\theta_2
\end{array} \right.$$

4. On prend  $m_1 = m_2 = m$  et  $l_1 = l_2 = l$ , autour de la position  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ , les équations de Lagrange deviennent

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_2 &= -\frac{g}{l}\theta_1 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 &= -\frac{g}{l}\theta_2 \end{cases}$$