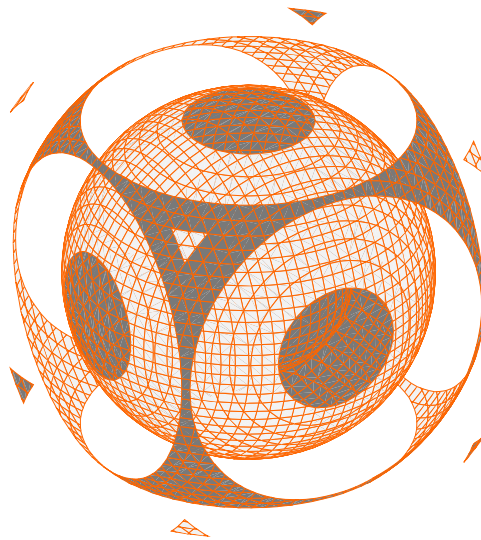


Eléments du Cours de Mécanique Analytique

MOHAMED EL KACIMI

Année universitaire 2014/2014



Chapitre 1

Formalisme de Lagrange

1.1 Introduction

Le formalisme de la mécanique analytique n'apporte pas de nouveauté conceptuelle par rapport au formalisme de la dynamique Newtonienne. Toutefois, l'approche de la mécanique analytique constitue la formulation la mieux adaptée à de nombreux domaines de la physique moderne. Elle est à l'origine de la quantification des dynamiques classiques et fournit nombre de concepts et d'outils mathématiques pour élaborer la mécanique quantique moderne. La mécanique analytique constitue un cadre bien adapté à la formulation des modèles des interactions fondamentales de manière intuitive en se basant sur les théories de symétrie de Jauge, partant de l'interaction électromagnétique et passant par les interactions faibles et fortes.

1.2 Coordonnées généralisées

L'approche standard de la mécanique newtonienne consiste à relier les quantités de mouvement des diverses particules aux forces qui en sont à l'origine sous forme d'équations différentielles vectorielles de deuxième ordre. Les forces mises en jeu sont décrites soit par des lois fondamentales, dont celles de la force gravitationnelle et de la force électromagnétique, ..., soit par des lois phénoménologiques qui décrivent les forces de frottement. Rappelons que les forces de frottements constituent des effets à l'échelle macroscopique des forces fondamentales. L'ensemble des équations différentielles dynamiques associées aux conditions initiales permettent de prédire complètement le mouvement. La résolution de ces équations restent en général fastidieuse lorsque des contraintes existent entre les positions ou bien entre les posi-

tions et les vitesses. En effet, la présence des forces de liaison où en général les forces de contact introduisent des dépendances entre les variables qui décrivent le système. Aussi, si le système est formé par N particules, en raison des contraintes, les $3N$ coordonnées qui décrivent le système ne sont plus indépendantes entre elles. De plus, les forces à l'origine des contraintes sont mal connues et de ce fait introduisent à leurs tours de nouvelles inconnues liées à leurs valeurs.

L'idée de base de la mécanique analytique est d'éliminer les forces inconnues et de ne décrire le système que par des coordonnées qui sont indépendantes et qui ne sont soumises à aucune contrainte. Ces coordonnées s'appellent **les coordonnées généralisées**. Elles sont de nature arbitraire et peuvent être une longueur, un angle, ... cependant ces coordonnées décrivent de manière univoque l'état mécanique du système si l'on prend en compte les contraintes. Pour se fixer les idées, prenons l'exemple du double pendule, figure 1.1. En principe le système est décrit par 6 coordonnées, 3 coordonnées pour chacun des pendules. Or,

- les fils sont de longueur fixe, ce qui engendre deux contraintes, chacune sur les coordonnées d'un pendule

$$\overrightarrow{OM}_1 = l_1 \quad \overrightarrow{M}_1\overrightarrow{M}_2 = l_2;$$

- le mouvement doit avoir lieu sur un plan, ce qui rajoute deux contraintes supplémentaires, chacune sur un pendule.

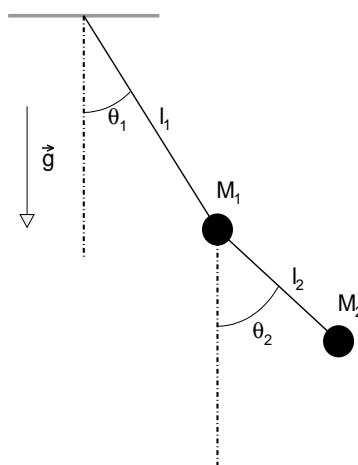


FIGURE 1.1 – Deux pendules liés astreints à se déplacer sur le même plan. Les angles θ_1 et θ_2 suffisent pour décrire le mouvement du système.

D'où le mouvement du système peut être décrit seulement par deux coordonnées au lieu de six. Le choix tout à fait naturel est constitué par les deux angles repérant les rotations des deux pendules.

L'idée est de réexprimer les lois qui régissent le mouvement du système non pas avec les coordonnées habituelles mais en fonction des coordonnées généralisées. Si l'on est en présence de k contraintes, le nombre de coordonnées indépendantes est égal à $n = 3N - k$. Ces n coordonnées, que l'on appelle les coordonnées généralisées, sont notées $q_i, i = 1, \dots, n$. On dit que le système possède n degrés de liberté. Chacune des coordonnées généralisées est identifiée à un degré de liberté. Aussi, il s'agit d'identifier les coordonnées généralisées, $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n, t)$, et de les utiliser pour la description du système.

Revenons aux contraintes. Rappelons que généralement quand on résout un problème, on est intéressé par la solution du mouvement et non par la connaissance des forces de liaison qui sont à l'origine des contraintes sur les coordonnées. La mécanique analytique permet d'établir les équations du mouvement en éliminant les forces de liaison, comme on le verra par la suite, et fournit les outils nécessaires pour déterminer les forces de contact.

Nous allons donner quelques définitions des contraintes que nous utiliserons dans la suite de ce cours.

1.2.1 Contraintes et définitions

On appelle contrainte holonome toute contrainte vérifiant la forme

$$f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$$

différentiable en tout point. On distingue deux classes de contraintes holonomes. Les contraintes sont dites **scléronomes** si elles ne dépendent pas explicitement du temps. Dans le cas contraire, elles sont dites **rhéonomes**.

Notons que dans le cas du double pendule, étant donné que la longueur des fils est constante, et comme la contrainte est imposée c'est la longueur du fil, alors elles est cléronome.

La physique moderne est essentiellement sub-atomique et l'on est rarement

confronté aux contraintes et quand elles apparaissent dans un problème, elles sont holonomes.

1.3 Equations de Lagrange

Comme c'est indiqué dans le paragraphe précédent, il s'agit de décrire la dynamique du système avec les coordonnées généralisées. Pour ce faire, il est indispensable d'établir les équations auxquelles les variables généralisées sont soumises et ceci est réalisé à l'aide de la fonction de Lagrange que l'on appelle le lagrangien, notée $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, et qui est homogène à une énergie.

Nous allons présenter les équations de Lagrange en utilisant deux approches. L'une d'elles est basée sur le principe de moindre action, qui est un formalisme sous-tendu par les chemins d'intégrale. Une deuxième approche dérivée des lois fondamentales de la dynamique fera l'objet de ce paragraphe.

Dans la suite, nous adopterons les indices grecs α pour énumérer les particules qui composent le système et les indices romains pour énumérer les coordonnées généralisées. Les forces de liaison seront notées \vec{F}_l et les forces extérieures par \vec{F}_e .

1.3.1 Principe de moindre action

On postule qu'il existe une fonction $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ telle que l'action, définie, par

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt,$$

est extrémale pour la trajectoire empruntée effectivement par le système entre les instants t_1 à t_2 dont les coordonnées généralisées respectives sont $q_i(t_1)$ et $q_i(t_2)$, valeurs de départ et d'arrivée de la trajectoire.

Il est très important de remarquer que ce qui est stipulé ne sont pas des équations différentielles sur les variables dynamiques du système, comme c'est le cas du principe fondamental de la dynamique, mais un principe variationnel qui postule le caractère extrémale d'une intégrale calculée sur la trajectoire.

Un autre exemple du principe variationnel utilisé en physique est celui de Fermat qui sous tend les lois de l'optique géométrique et qui stipule que le rayon lumineux emprunte toujours le trajet ayant un temps de parcours extremal, minimal dans ce cas ci.

Notons que la fonction de Lagrange ne dépend que des coordonnées généralisées et leurs premières dérivées car les équations fondamentales de la dynamique sont de second ordre.

1.3.2 Théorème de d'Alembert

Ce théorème permettra de déduire les équations de Lagrange à l'aide du principe fondamental de la dynamique en introduisant la notion de déplacement virtuel.

Théorème

Lors d'un déplacement virtuel, le travail des forces de liaison est nul.

Notons qu'un déplacement virtuel correspond à un déplacement de chaque vecteur position \vec{r}_i d'une quantité $\delta\vec{r}_i$ à un instant t donné. Alors qu'un déplacement réel $d\vec{r}$ met en jeu une translation correspondante dans le temps.

Ce théorème stipule donc que les déplacements virtuels sont ceux pour lesquels les forces de liaisons n'engendrent aucun travail et n'affecte donc pas l'énergie du système. Si les contraintes ne dépendent pas du temps alors les déplacements virtuels coïncident avec les déplacements réels.

Prenons quelques exemples :

Pendule simple : le fil est inextensible. Lors des oscillations du pendule la tension du fil \vec{T} ne travaille pas. Le déplacement virtuel coïncide avec le déplacement réel.

Boule : une boule qui roule sans glisser. La force de liaison qui l'empêche de glisser est perpendiculaire au plan de roulement. Aussi, le travail de cette force est nul.

Calculons le travail des forces le long d'un déplacement virtuel, que l'on appelle le travail virtuel,

$$\delta W = \sum_{\alpha} (\vec{F}_{e,\alpha} + \vec{F}_{l,\alpha}) \cdot \delta\vec{r}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{e,\alpha} \cdot \delta\vec{r}_{\alpha}.$$

Or le déplacement virtuel peut s'exprimer comme suit

$$\delta \vec{r}_\alpha = \sum_i \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i$$

sachant que $\delta t = 0$ pour un déplacement virtuel. Le travail virtuel prend alors la forme

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{\alpha,i} \vec{F}_{e,\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i \\ &= \sum_i Q_i \delta q_i \end{aligned}$$

où Q_i est la i ème composante de la force généralisée telle que

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{e,\alpha} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}.$$

Nous revenons sur ce concept pour établir l'équation de Lagrange à partir des principes de la dynamique.

1.3.3 Principe variationnel

Cette approche est basée sur les chemins d'intégrale. Considérons deux trajectoires entre les coordonnées $q(1)$ et $q(2)$, figure 1.2. L'une constitue la trajectoire effectivement suivie et que l'on notera par $q_i(t)$. L'autre trajectoire, que l'on appellera la trajectoire variée, infiniment proche de la trajectoire effective, correspond à chaque instant à $q_i(t) + \delta q_i(t)$, où $\delta q_i(t)$ est un accroissement infinitésimal de la coordonnée

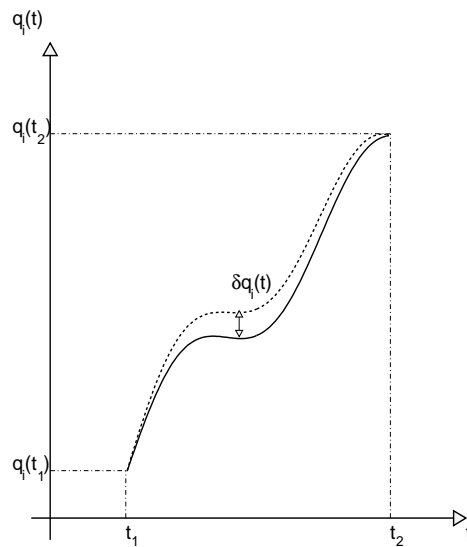


FIGURE 1.2 – Trajectoires effective et variée. Les deux coïncident aux instants t_1 et t_2 .

et qui s'annule aux instants t_1 et t_2 puisque les deux trajectoires se confondent en ces points. Le postulat est que l'action est extrémale pour la trajectoire effective, ce qui veut dire que l'accroissement de l'action δS autour de cette trajectoire est nul. Calculons cet accroissement

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} (L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) - L(q_i, \dot{q}_i, t)) dt \\ &= \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\delta q_i}{dt} dt \right)\end{aligned}$$

nous avons utilisé $\delta \dot{q}_i = d\delta q_i/dt$. En intégrant par partie le deuxième terme entre les deux instants t_1 et t_2 , on obtient

$$\delta S = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}$$

Comme les deux trajectoires coïncident aux instants t_1 et t_2 alors $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, ce qui fait que

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

Le terme qui reste est nul, sachant que les δq_i sont arbitraires et indépendants, si et seulement si les n équations suivantes sont simultanément nulles

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

ce qui constitue les équations de Lagrange.

Si les coordonnées généralisées coïncident avec les coordonnées cartésiennes, les équations de Lagrange s'écrivent comme suit

$$\frac{\partial L(r_i, v_i, t)}{\partial \vec{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(r_i, v_i, t)}{\partial \vec{v}} = 0.$$

Notons qu'à partir d'un principe variationnel, qu'est le principe de moindre action, on aboutit à n équations différentielles du second ordre. Remarquons aussi que

- les équations du mouvement ne changent pas si la fonction de Lagrange est multipliée par une constante. Ceci correspond seulement au choix de l'unité de L . Rappelons qu'elle est homogène à une énergie.
- la forme de L doit obéir aux symétries du système physique (invariance par translation dans le temps et dans l'espace, invariance relativiste, ...). D'ailleurs, c'est cela qui guide la construction des modèles théoriques et plus particulièrement les théories des interactions fondamentales.
- les équations du mouvement restent inchangées si l'on rajoute au lagrangien une dérivée totale d'une fonction des coordonnées et du temps. Posons $L' = L + df(q_i, t)/dt$. f ne dépend pas de \dot{q}_i car L ne dépend que des dérivées premières par rapport au temps. En effet

$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{df(q_i, t)}{dt} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{df}{dt} \right]$$

or

$$\frac{d}{dt} = \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \ddot{q}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{df}{dt} \right] = \dot{q}_i \frac{\partial^2 f}{\partial^2 q_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i} \\ \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{df}{dt} = \dot{q}_i \frac{\partial^2 f}{\partial^2 q_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial t} \end{cases}$$

ce qui implique que

$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

et donc les équations de Lagrange restent invariantes.

— le Lagrangien de deux systèmes indépendants est égale à la somme des lagrangiens de chacun des systèmes, $L = L_1 + L_2$.

1.3.4 Principe de la dynamique

Reprenons le travail virtuel des forces extérieures défini auparavant. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on a

$$\delta W = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \ddot{\vec{r}}_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha}.$$

Reexprimons le travail virtuel en utilisant l'accélération généralisée de manière à ce que

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \ddot{\vec{r}}_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} &= \sum_{\alpha, k} m_{\alpha} \dot{\vec{v}}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \delta q_k \\ &= \sum_k A_k \delta q_k \end{aligned}$$

l'expression des composantes de l'accélération généralisée sont

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{v}}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \right) - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \right). \end{aligned}$$

De même, l'expression de la vitesse peut se mettre sous la forme

$$\vec{v}_{\alpha} = \dot{\vec{r}}_{\alpha} = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial t} \implies \frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k}.$$

Aussi nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \right) &= \sum_i \frac{\partial^2 \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 \vec{r}_{\alpha}}{\partial t \partial q_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_i \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial q_k} \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial q_k} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \right) \end{aligned}$$

ce qui aboutit finalement à

$$A_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

où T est l'énergie cinétique de la particule α . En combinant l'expression de l'accélération généralisée à celle de la force généralisée on trouve

$$\sum_k (A_k - Q_k) \delta q_k$$

Cette dernière relation est vérifiée quelque soit le déplacement virtuel δq_k si et seulement si

$$A_k = Q_k \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

et qui traduit l'équation de Lagrange en fonction de l'énergie cinétique et de la force généralisée.

Rappelons que la relation précédente est établie dans un référentiel galiléen. Dans le cas où le référentiel n'est pas galiléen, comme la relation fondamentale de la dynamique dans ce référentiel est

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} + \vec{f}_{\alpha}^{in}$$

où \vec{f}^{in} sont les forces d'inertie, l'accélération généralisée devient

$$A_k = Q_k + Q_k^{in}$$

où

$$Q_k^{in} = \sum_{\alpha} \vec{f}_{\alpha}^{in} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k}$$

Notons que l'énergie cinétique est évaluée dans le référentiel non galiléen.

1.3.5 Lagrangien d'une particule libre non relativiste

Comme il a été mentionné auparavant, le lagrangien d'un système, en l'occurrence une particule isolée, est guidé par les symétries du système. En raison du principe fondamental de la dynamique, la particule est animée d'un mouvement uniforme, $m\dot{\vec{v}} = \vec{0}$. Les symétries qui vont guider la construction du lagrangien sont

- l'invariance par rapport aux translations dans le temps (conservation de l'énergie), le lagrangien ne doit pas dépendre explicitement du temps ;
- l'invariance par rapport à l'espace (conservation de la quantité de mouvement), le lagrangien ne doit pas dépendre de \vec{r} ;
- l'invariance par rapport aux rotations (conservation du moment cinétique), le lagrangien ne doit pas dépendre de la direction de \vec{v} ;

ce qui fixe la forme de la fonction de Lagrange à $L = f(v^2)$. Si l'on applique les équations de Lagrange, on obtient

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{df}{dv^2} \vec{v} \right)$$

et l'équation du mouvement de la particule isolée $m\dot{\vec{v}} = \vec{0}$, est satisfaite si $df/dv^2 = \text{constante} = m/2$.

Une deuxième approche consiste à utiliser le principe qui stipule que toutes les lois physiques doivent avoir la même forme dans les référentiels galiléens, et les équations de Lagrange n'échappent pas à cette règle.

Rappelons que nous sommes dans le cas non relativiste et la transformation qui permet de passer d'un repère galiléen \mathcal{R} à un autre \mathcal{R}' est donnée par la transformation de Galilée :

$$\begin{aligned} \vec{v}(M/\mathcal{R}) &= \vec{v}(M/\mathcal{R}') + \vec{V}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \\ \vec{OM} &= \vec{O'M} + \vec{V}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})t \\ t &= t' \end{aligned}$$

où t et t' sont mesurés respectivement par des horloges liées aux repères \mathcal{R} et \mathcal{R}' .

Supposons que $\vec{V}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{e} \rightarrow \vec{0}$. La vitesse de la particule dans ce nouveau repère est $\vec{v}'(M/\mathcal{R}') = \vec{v}(M/\mathcal{R}) - \vec{e}$. Les équations de Lagrange conservent la même forme dans les deux référentiels si les deux fonctions de Lagrange respectivement dans les deux repères diffèrent par une dérivée totale par rapport aux temps :

$$L' = f(v'^2)$$

$$\begin{aligned}
&= f([\vec{v} - \vec{e}]^2) \\
&\simeq f(v^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{e}) \\
&= f(v^2) - 2\frac{df}{dv^2}\vec{v} \cdot \vec{e} \\
&= f(v^2) - 2\frac{df}{dv^2}\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{e}
\end{aligned}$$

le cas simple où les deux expressions du lagrangien diffèrent par une dérivée totale par rapport au temps est lorsque df/dv^2 est constante, ce qui donne

$$L' = L - \frac{d}{dt} \left(2\frac{df}{dv^2} \vec{r} \cdot \vec{e} \right)$$

$df/dv^2 = C \implies f = Cv^2$ et donc $L = Cv^2$. Sachant que le moment conjugué

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 2C\vec{v} = m\vec{v} \implies C = \frac{1}{2}m$$

ce qui donne finalement pour le lagrangien d'une particule libre non relativiste $L = \frac{1}{2}mv^2$.

1.3.6 Système de particules interagissant par des forces conservatives

On considère un système formé de N particules. On suppose dans ce cas que la force extérieure qui s'exerce sur chacune des particules dérive d'un potentiel et que le potentiel ne dépend que des coordonnées généralisées $V(q_i)$. Ainsi la force $\vec{F}_\alpha^{ext} = -\partial V/\partial \vec{r}_\alpha = -\vec{\nabla}_\alpha V$. On laissera tomber de préciser le caractère extérieur de la force par souci d'allègement des notations. Les composantes de la force généralisée peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
Q_k &= \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k} \\
&= - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial r_{\alpha,i}} \frac{\partial r_{\alpha,i}}{\partial q_k}
\end{aligned}$$

or $\partial/\partial q_k = \sum_{\alpha,i} \partial r_{\alpha,i}/\partial q_k \partial/\partial r_{\alpha,i}$ ce qui donne

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

ainsi $L = T - V$ définit bien le lagrangien et satisfait les équations de Lagrange.

Notons que le potentiel ne dépend ni explicitement du temps ni de \dot{q}_i .

Pour une particule, nous avons

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k;$$

puisque T ne dépend que de \dot{q}_i . En comparant les équations de Lagrange au principe fondamental de la dynamique

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = Q_k = \frac{d}{dt} p_k$$

ce qui permet de définir

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

comme étant l'impulsion généralisée ou le moment conjugué de q_k .

1.3.7 Système de particules interagissant par des forces dérivant d'un potentiel généralisé $V(q, \dot{q})$

Même si le potentiel n'est pas conservatif au sens usuel, notons qu'il dépend des vitesses généralisées \dot{q} , si la composante de la force généralisée peut se mettre sous la forme

$$Q_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

le lagrangien $L = T - V$ satisfait toujours les équations de Lagrange. C'est le cas pour l'exemple de la force de Lorentz, comme cela sera traité en travaux dirigés.

1.3.8 Cas des forces dissipatives : fonction de Rayleigh

Si toutes les forces ne dérivent pas d'un potentiel, on peut toujours écrire les équations de Lagrange sous la forme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$$

où les Q_k sont les forces généralisées qui ne dérivent pas d'un potentiel, même généralisé.

Le cas des forces de frottement qui s'écrivent comme $F_i = -k_i v_i$ peut être traité en utilisant la fonction dite de dissipation de Rayleigh définie par

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (k_x v_{\alpha,x}^2 + k_y v_{\alpha,y}^2 + k_z v_{\alpha,z}^2)$$

sachant que la force généralisée peut se mettre sous la forme $Q_k = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k}$.

1.3.9 Cas de contraintes non holonomes : multiplicateurs de Lagrange

Le caractère holonome des contraintes, $f_l(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 0$, $l \in \{1, m\}$, assure que les coordonnées généralisées ($q_i, i = 1, n$) où $n = N - m$ soient indépendantes deux à deux et c'est ce qui permet d'établir les équations de Lagrange à partir du principe de moindre action. Que se passe-t-il si les contraintes ne sont pas holonomes ?

Méthode des multiplicateurs

Supposons que l'on a m équations de contrainte qui peuvent se mettre sous la forme

$$\sum_k a_{lk} dq_k + a_{lt} dt = 0$$

où $l = 1, \dots, m$ et $k = 1, N$; alors la méthode dite des multiplicateurs de Lagrange peut s'appliquer et apporter une réponse tout en déterminant les forces de liaison.

Considérons un déplacement virtuel, $dt = 0$, les équations précédentes deviennent

$$\sum_k a_{lk} \delta q_k = 0.$$

On introduit m constantes indéterminées λ_l et les m relations suivantes sont vérifiées

$$\lambda_l \sum_k a_{lk} \delta q_k = 0 \quad \text{et} \quad \int_{t_1}^{t_2} \sum_l \lambda_l \sum_k a_{lk} \delta q_k dt = 0.$$

Le principe de moindre action s'écrit comme suit

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right] \delta q_k = 0$$

et la somme des deux équations précédentes donne

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} \right] \delta q_k = 0.$$

Rappelons que les n coordonnées généralisées q_i ne sont pas indépendantes. On peut choisir les $N - m$ premières coordonnées comme indépendantes, et les $N - m$ restantes sont fixées par $\sum_k a_{lk} \delta q_k = 0$. Comme les m constantes λ_l introduites sont libres, on peut les choisir de manière à ce que

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_l \lambda_l a_{lk} = 0$$

pour $k = N - m + 1, \dots, N$ ainsi on obtient

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_l \lambda_l a_{lk} \quad \text{pour } k = 1, \dots, N$$

où il y a $N + m$ inconnues : les N coordonnées q_k et les m constantes λ_l . Pour résoudre le système complet des inconnues, nous rajoutons les m équations de contraintes

$$\sum_{k=1, N} a_{lk} \delta q_k + a_{lt} = 0$$

ce qui fait le compte, un système de $N + m$ équations pour $N + m$ inconnues. Quelle est la signification physique des multiplicateurs de Lagrange λ_l ? On a vu que les équations de Lagrange en présence de forces conservatives et non conservatives s'écrivent comme suit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$$

où les Q_k sont les forces généralisées associées aux forces non conservatives. Les multiplicateurs de Lagrange s'identifient aux forces généralisées de contraintes. La puissance de cette méthode réside dans la possibilité de résoudre les équations de Lagrange sans connaître les expressions explicite des forces de liaison; il suffit de connaître seulement les contraintes imposées par celles-ci sur les coordonnées généralisées.

1.3.10 Lagrangien d'une particule libre relativiste

Il s'agit dans ce cas d'une particule relativiste et la transformation des vitesses pour passer d'un repère galiléen à l'autre est donnée par la transformation de Lorentz, que nous n'explicitons pas ici.

Nous procédons de la même manière en se basant sur les symétries pour construire le lagrangien d'une particule relativiste libre :

- l'action d'une particule libre relativiste doit être un invariant relativiste : elle est invariante par rapport à la transformation de Lorentz et donc possède la même forme quelque soit le référentiel galiléen. L'expression la plus simple est que l'action soit l'intégrale d'un scalaire relativiste.
- L'action ne doit contenir que des termes différentiels du premier ordre, pour que, après l'application des équations de Lagrange, on obtient des équations différentielles du second ordre.
- On construit alors l'action à partir du scalaire $ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dr^2}$, qui n'est d'autre qu'un intervalle infinitésimal de l'espace de Minkowski, comme

$$S = -a \int_{t_1}^{t_2} ds = -ac \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

où a est une constante qui dépend de la nature de la particule et le signe - se justifiera, comme on le verra par la suite.

- On identifie alors le lagrangien de la particule libre à

$$L = -ac \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

- Comme celui-ci doit se confondre avec le lagrangien d'une particule libre non relativiste lorsque $v/c \rightarrow 0$ alors

$$L = -ac \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) = -ac + \frac{a}{2c} v^2 \simeq \frac{1}{2m} v^2$$

le premier terme est constant et n'influe pas sur les équations de la dynamique de la particule. On a ainsi $a = mc$ ce qui donne pour le lagrangien d'une particule relativiste libre

$$L = -mc \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt.$$

1.4 Quelques exemples

Quelques exemples sont traités dans les sous paragraphes suivants.

1.4.1 Pendule simple

Soit un pendule de longueur l avec une masse M placé dans un champ de pesanteur \vec{g} et astreint à se déplacer dans un plan (x, y) , figure 1.3. Ce système jouit de deux dimensions et soumis à une contrainte $x^2 + y^2 = l^2$. Aussi, ce système possède un seul degré de liberté. On choisit l'angle θ comme coordonnée généralisée.

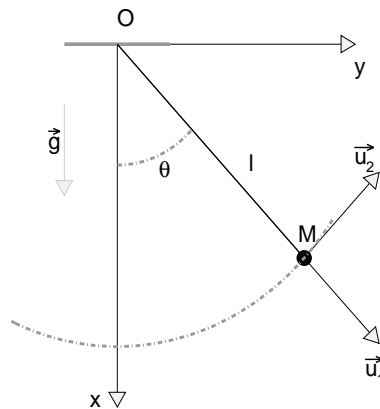


FIGURE 1.3 – Pendule de longueur l et de masse m .

Pour établir le lagrangien, nous calculons l'énergie cinétique ; ensuite nous utiliserons deux approches pour établir l'équation du mouvement. Soit $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{u}_z$ avec $\vec{u}_z = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$.

On considère que le référentiel dans lequel on étudie le mouvement est galiléen ; si non, il faut tenir compte des forces d'inertie.

La position de M est repérée par $\overrightarrow{OM} = l\vec{u}_1$ ce qui donne pour la vitesse

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} = l\vec{u}_1 &\implies \vec{v} = l\dot{\vec{u}}_1 \\ &= l\vec{\Omega} \wedge \vec{u}_1 \\ &= l\dot{\theta}\vec{u}_2 \end{aligned}$$

ainsi l'énergie cinétique du pendule est

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2.$$

On procède par deux approches :

Méthode 1 : on ne connaît pas l'expression du potentiel. Considérons un déplacement virtuel $\delta\vec{r} = l\delta\theta\vec{u}_2$. La seule force qui travaille est le poids, et le travail est donné par

$$\begin{aligned}\delta W &= m\vec{g} \cdot \delta\vec{r} \\ &= -mg\sin\theta\delta\theta = Q_\theta\delta\theta\end{aligned}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial\theta} = Q_\theta = -mgl\sin\theta \implies \ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0$$

avec $\omega^2 = g/l$.

Méthode 2 On connaît l'expression du potentiel

$$V = mgl(1 - \cos\theta)$$

à une constante près. Alors, le lagrangien est

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$$

et l'équation de Lagrange donne le résultat obtenu précédemment.

1.4.2 Masse sur une tige rappelée avec un ressort

Soit une masse M astreinte à se déplacer sur une tige indéformable faisant un angle θ avec l'axe vertical Oz , figure 1.4. La tige tourne avec un vecteur rotation imposé $\vec{\Omega} = \dot{\phi}\vec{u}_z$. La masse est attachée à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 . La masse glisse sans frottement et est soumise à son poids.

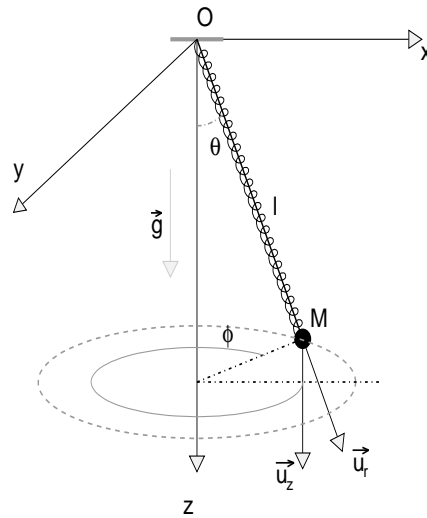


FIGURE 1.4 – Masse M glissant sur une tige en rotation imposée et soumise à une force de rappel d'un ressort.

Le système possède un seul degré de liberté. Nous prenons $r = \overrightarrow{OM}$ comme coordonnée généralisée.

Le référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$ est galiléen. La vitesse de M est donnée par

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \dot{r}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} \\ &= \dot{r}\vec{u}_r + r\vec{\Omega} \wedge \vec{u}_r\end{aligned}$$

ce qui donne pour l'énergie cinétique

$$T = \frac{M}{2}(\dot{r}^2 + r^2\Omega^2\sin^2\theta).$$

Les équations de Lagrange s'écrivent

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} &= Q_r \\ M(\ddot{r} - r\Omega^2\sin^2\theta) &= Q_r\end{aligned}$$

Q_r étant la composante de la force généralisée selon r . Pour un déplacement virtuel $\delta\vec{r} = \delta r\vec{u}_r$, le travail virtuel du poids et de la force de rappel du ressort est

$$\begin{aligned}\delta W &= m\vec{g} \cdot \delta\vec{r} - k(r - l_0)\vec{u}_r \cdot \delta\vec{r} \\ &= [Mg\cos\theta - k(r - l_0)]\delta r = Q_r\delta r\end{aligned}$$

L'équation de Lagrange dans ce cas est

$$\ddot{r} - r(\Omega^2\sin^2\theta - \omega^2) - g\cos\theta - \omega^2l_0 = 0$$

1.4.3 Exemple de calcul de contrainte

Considérons un cerceau de rayon R et de masse M roulant sans glisser sur un plan incliné d'un angle α sous l'effet de son poids, figure 1.5. L'énergie cinétique du cerceau est égale à

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

où I est le moment d'inertie du cerceau par rapport à l'axe de rotation passant par G , $I = \int r^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$; $v_G = \dot{x}$ est la vitesse de G et $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de rotation du cerceau sur lui même.

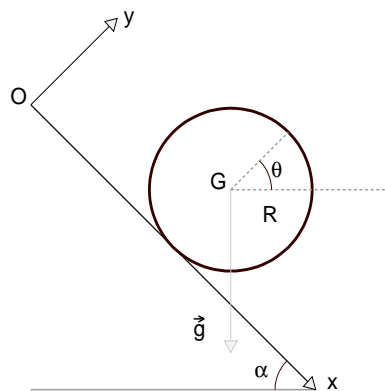


FIGURE 1.5 – Cerceau de masse M roulant sans glisser sur un plan incliné d'un angle α .

Ce système possède deux coordonnées généralisées reliées par la contrainte de roulement sans glissement

$$\dot{x}a = aR\dot{\theta}.$$

Cette contrainte peut se mettre sous une forme holonome auquel cas on peut utiliser les équations de lagrange usuelles. Toutefois, nous utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Introduisons un multiplicateur de Lagrange λ et conservons les deux coordonnées généralisées. L'équation de contrainte est

$$dx - R d\theta = a_{1x} dx + a_{1\theta} d\theta \implies a_{1x} = 1, \quad a_{1\theta} = -R.$$

Ainsi les équations de Lagranges généralisées deviennent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= \lambda a_{1x} = \lambda \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \lambda a_{1\theta} = -\lambda R \end{aligned}$$

On obtient un système de trois équations à trois inconnues (x, θ, λ) :

$$\begin{aligned} M\ddot{x} - Mg \sin \alpha &= \lambda \\ MR\ddot{\theta} &= -\lambda \\ \dot{x} &= R\dot{\theta} \end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{g \sin \alpha}{2} \\ \dot{\theta} &= \frac{\dot{x}}{R} \\ \lambda &= -\frac{Mg \sin \alpha}{2} \end{aligned}$$

On note que le cerceau descend avec une accélération égale à la moitié s'il n'y avait pas de frottements dus à la contrainte λ , dirigée selon x .

1.5 Symmétries et lois de conservation

Nous avons utilisé les propriétés de symmétrie pour la construction du lagrangien. Le théorème de Nother définit un cadre mathématique rigoureux qui relie les symmétries du lagrangien aux lois de conservation. Avant d'aborder le théorème, introduisons les variables cycliques

1.5.1 Variable cyclique

Une variable q_k est dite cyclique si le lagrangien ne dépend pas explicitement de cette variable, alors

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

or

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

ce qui implique

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \implies \frac{d}{dt} p_k = 0$$

et donc le moment conjugué est conservé.

Le moment conjugué d'une variable cyclique est une intégrale première du système.

1.5.2 Théorème de Noether

Enoncé Soit un jeu de coordonnées généralisées $\tilde{q}_k(s)$ dépendant continuellement d'un paramètre s et tel que $\tilde{q}_k(0) = q_k$. Si le lagrangien est invariant par rapport à la transformation $q_k \rightarrow \tilde{q}_k$, c'est à dire $L(\tilde{q}_k, \dot{\tilde{q}}_k, t) = L(q_k, \dot{q}_k, t)$, alors

$$I(q_k, \dot{q}_k) = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\tilde{q}_k}{ds} \Big|_{s=0}$$

est une constante du mouvement.

Démonstration L est indépendant de s , implique

$$\begin{aligned} \frac{dL}{ds} &= \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial \tilde{q}_k} \frac{d\tilde{q}_k}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_k} \frac{d\dot{\tilde{q}}_k}{ds} \right) \\ &= \sum_k \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_k} \frac{d\tilde{q}_k}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_k} \frac{d}{dt} \frac{d\tilde{q}_k}{ds} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_k} \frac{d\tilde{q}_k}{ds} \right) = 0 \end{aligned}$$

ce qui en évaluant l'expression obtenue en $s = 0$ prouve le théorème.

1.5.3 Invariance par rapport à la translation dans le temps

On considère une translation infinitésimale dans le temps, $t \rightarrow t + s$, le résultat reste valable pour une translation quelconque. Ainsi,

$$\begin{aligned}\tilde{q}_k(s) &= q_k(t + s) \\ &\simeq q_k(t) + \frac{\partial q_k}{\partial t} s \implies \frac{d\tilde{q}_k(s)}{ds} = \dot{q}_k.\end{aligned}$$

Selon le théorème de Noether, la quantité

$$\begin{aligned}I(q_k, \dot{q}_k) &= \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\tilde{q}_k}{ds} \Big|_{s=0} \\ &= \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \\ &= \sum_k p_k \dot{q}_k\end{aligned}$$

est constante. Comme le lagrangien est indépendant du temps, on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right) \\ &= \sum_k \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dt} \right) \\ &= \sum_k \left(\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right] \right) \\ &= \sum_k \left(\frac{d}{dt} [p_k \dot{q}_k] \right) \implies \frac{d}{dt} (\sum_k p_k \dot{q}_k - L) = 0\end{aligned}$$

Alors la quantité $H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$, appelée intégrale de Jacobi, ou Hamiltonien, est une quantité conservée.

Mais quelle est sa signification? Reprenons l'expression de l'énergie cinétique,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_{\alpha}^2$$

et donnons son expression en fonction des coordonnées généralisées, dans l'hypothèse de contraintes scléronomes, c'est à dire $\partial \vec{r}_i / \partial t = 0$, c'est à dire

que les coordonnées ne dépendent pas explicitement du temps,

$$\begin{aligned} v_\alpha^2 &= \vec{v}_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha \\ &= \left(\sum_k \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) \cdot \left(\sum_l \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) \\ &= \sum_{k,l} \left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k} \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_l} \right) \dot{q}_k \dot{q}_l. \end{aligned}$$

L'énergie cinétique peut se mettre sous la forme

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,l} m_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l$$

où la matrice $[m]$ est réelle, symétrique et définie par

$$\begin{aligned} [m_{kl}] &= \sum_\alpha m_\alpha \left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k} \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_l} \right) \\ &= \sum_\alpha m_\alpha \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_n} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_n} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notons que l'énergie cinétique est une fonction homogène d'ordre 2,

$$T(q_k, \lambda \dot{q}) = \lambda^2 T(q_k, \dot{q})$$

ce qui implique que l'énergie cinétique vérifie la propriété suivante

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T(q_k, \dot{q}_k).$$

Cette dernière propriété est la conséquence du théorème d'Euler.¹ Trouvons l'expression de l'hamiltonien en fonction de l'énergie cinétique et du potentiel. Pour ce faire, nous allons considérer deux cas de figures :

Forces conservatives : le potentiel est de la forme $V = V(q)$, alors

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$$

1. Une fonction homogène d'ordre n , tel que $f(\lambda x_i, y_i) = \lambda^n f(x_i, y_i)$ et

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) - T + V \\
 &= \sum_k \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) - T + V
 \end{aligned}$$

car $V = V(q)$ et donc sa dérivée par rapport à \dot{q}_k est nulle. Sachant que T est homogène d'ordre 2, alors

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T$$

grâce au théorème d'Euler, et on peut déduire finalement que

$$H = 2T - T + V = T + V = E$$

et donc la fonction de Hamilton n'est d'autre que l'énergie mécanique du système.

Potentiel de la forme $V(q, \dot{q})$: la fonction de Hamilton s'écrit dans ce cas comme suit

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_k \dot{q}_k \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right) - T + V \\
 &= T + V - \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}
 \end{aligned}$$

C'est toujours l'énergie totale du système et c'est le cas pour l'exemple de la force de Lorentz, $H = T + qU$, voir TD.

L'invariance du Lagrangien par rapport à la translation dans le temps engendre la conservation de l'énergie mécanique du système.

1.5.4 Invariance par rapport à la translation spatiale

Prenons les coordonnées cartésiennes comme coordonnées généralisées. Et supposons que le lagrangien est invariant par rapport à une translation selon les trois axes, $r_i \rightarrow \tilde{r}_i = r_i + \epsilon$, $i = x, y, z$ alors $d\tilde{r}_i/d\epsilon = 1$ alors la quantité

$$I = \sum_{i=x,y,z} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \sum_{i=x,y,z} \sum_{\alpha} p_{\alpha,i}$$

est conservée et qui ne sont d'autres que les composantes de l'impulsion totale selon les trois axes.

L'invariance du lagrangien par rapport à la translation dans l'espace engendre la conservation de la quantité de mouvement.

1.5.5 Invariance par rapport à une rotation

Prenons une rotation infinitésimale d'un angle $\theta \rightarrow 0$ autour de l'axe Oz . La matrice de rotation peut s'écrire comme suit

$$\mathcal{O}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \theta & 0 \\ -\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \theta & 0 \\ -\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \theta y \\ y - \theta x \\ z \end{pmatrix}$$

ce qui implique que \vec{r} se transforme comme

$$\vec{r} = \vec{r} + \vec{r} \wedge \theta \vec{u}_z \implies \left(\frac{d\vec{r}}{d\theta} \right)_i = (\vec{r} \wedge \vec{u}_z)_i = \epsilon_{ij3} r_j$$

sachant que ϵ_{ijk} est le tenseur de Levi-Civita.

Le lagrangien est invariant par rapport à la rotation alors la quantité

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=1,2,3} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \frac{d\dot{r}_i}{d\theta} \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{i=1,2,3} p_{\alpha,i} \epsilon_{ij3} r_j \\ &= \sum_{\alpha} (p_{\alpha,1} \epsilon_{1j3} r_j + p_{\alpha,2} \epsilon_{2j3} r_j) \\ &= \sum_{\alpha} (p_{\alpha,1} y - p_{\alpha,2} x) = \sum_{\alpha} J_{\alpha,3} \end{aligned}$$

qui n'est d'autre que le moment cinétique totale selon l'axe Oz . L'invariance par rotation donc entraîne la conservation du moment cinétique. Le résultat reste général.

Si le lagrangien est invariant par rotation, alors le moment cinétique est conservé.

1.6 Quelques exemples simples d'application du calcul variationnel

Nombreux sont les problèmes qui peuvent être résolus par le formalisme de Lagrange, et plus particulièrement, lorsque celui-ci peut se mettre sous la forme d'une fonctionnelle pour laquelle il faut calculer l'extremum. En général, si la fonctionnelle, comme c'était le cas de l'action dans ce chapitre, peut s'écrire sous la forme

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', s) ds$$

où y' est la dérivée de y par rapport à x . Notons que x joue le rôle du temps dans ce que nous avons vu auparavant. Dans ce cas la méthode variationnelle fonctionne et les équations que l'on obtient ne sont pas les équations de Lagrange, puisqu'il ne s'agit pas du lagrangien comme défini auparavant c'est à dire une grandeur ayant la dimension d'une énergie, mais on peut appliquer l'ensemble des résultats que nous avons établis.

1.6.1 Plus petite distance dans un plan

Le problème est de déterminer la distance minimale entre deux points A et B dans un plan. La quantité à minimiser est donc la distance $ds = \sqrt{x^2 + y^2}$, si le plan est muni d'un repère (Oxy) .

Ainsi la fonctionnelle à minimiser est

$$S = \int_A^B ds = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

On note que la variable x joue le rôle du temps et le "lagrangien" est

$$L(y') = \sqrt{1 + y'^2}$$

qui ne dépend pas de y et donc cette dernière est une variables cyclique, ce qui implique

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = p_y = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

est constant ce qui implique $y' = dy/dx$ est constant et donc $y = f(x)$ est une droite. La distance minimale est la longueur du segment droit qui sépare les points A et B .

1.6.2 La brachistochrone

Considérons un point matériel de masse m glissant sans frottement sur un plan vertical sous l'action de son poids. Quelle est l'équation de la courbe joignant deux points O et A pour laquelle le temps mis par le point matériel est minimum ?

La quantité à minimiser dans ce cas est le temps $dt = ds/v$, v étant la vitesse du point matériel :

$$\begin{aligned} S &= \int_0^A dt \\ &= \int_0^A \frac{ds}{v} \\ &= \int_0^{x_A} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx \end{aligned}$$

où $v = \sqrt{2gy}$, déduite à partir du théorème de l'énergie cinétique. De la même façon, x joue le rôle du temps et le "lagrangien" pour ce cas est

$$L(y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}.$$

Comme L ne dépend pas de x , alors $\partial L/\partial x = 0$ et donc le hamiltonien est une intégrale première

$$H = y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L = \frac{-1}{\sqrt{2gy(1+y')}}.$$

ce qui donne finalement $y(1+y'^2) = a$, où a est une constante. La solution de cette équation est un cycloïde, comme on le verra en travaux dirigés.

Chapitre 2

Formalisme de Hamilton

Le formalisme de Hamilton n'apporte aucune nouveauté sur le plan du contenu de la physique mais il définit un cadre mathématique très puissant et bien adapté à la physique moderne. D'ailleurs, il a constitué le cadre qui a sous-tendu le développement de la mécanique quantique, la théorie des champs, ...

2.1 Hamiltonien d'un système

Dans le formalisme du lagrangien, un système ayant n degrés de liberté est décrit par le lagrangien $L(q_k, \dot{q}_k, t) = T - V$, lorsque les forces sont conservatives. L'état du système dépend des conditions initiales de position $q_k(0)$ et de vitesse $\dot{q}_k(0)$, qui sont indépendantes les unes des autres. Le formalisme de Hamilton permet de décrire le système avec le jeu de variables (q_k, p_k) , coordonnées généralisées et leurs moments conjugués, qui sont indépendantes les unes des autres.

Adoptons l'approche suivante pour définir la fonction de Hamilton en cherchant à décrire le système avec une fonction $g(q_k, p_k, t)$. Il suffit de chercher une fonction $h(q_k, \dot{q}_k, p_k, t)$ comme suit

$$g(q_k, p_k, t) = L(q_k, \dot{q}_k, t) + h(q_k, \dot{q}_k, p_k, t)$$

En différentiant l'expression précédente, on a

$$\begin{aligned} dg &= \sum_k \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial g}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial g}{\partial t} dt \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_k \left(\frac{\partial h}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial h}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k + \frac{\partial h}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial h}{\partial t} dt \end{aligned}$$

$$= \sum_k \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial h}{\partial q_k} \right) dq_k + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial h}{\partial \dot{q}_k} \right) d\dot{q}_k + \frac{\partial h}{\partial p_k} dp_k \right] + \left(\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) dt$$

en identifiant terme à terme les deux membres de l'égalité on obtient

$$\frac{\partial g}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial h}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial g}{\partial p_k} = \frac{\partial h}{\partial p_k}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial h}{\partial \dot{q}_k}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t}$$

On déduit que

$$\frac{\partial h}{\partial \dot{q}_k} = -p_k \implies h(q_k, \dot{q}_k, p_k, t) = - \sum_k \dot{q}_k p_k + f(q_k, p_k, t).$$

la solution triviale pour f est de prendre $f(q_k, p_k, t) = 0$. Ce qui donne pour la fonction g

$$\frac{\partial g}{\partial p_k} = -\dot{q}_k \implies g = - \sum_k \dot{q}_k p_k + f(q_k, t)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial q_k} = \frac{\partial f}{\partial q_k} + \frac{\partial L}{\partial q_k} \implies g = - \sum_k \dot{q}_k p_k + L$$

qui n'est d'autre que la fonction de Hamilton à un signe près.

On définit alors la fonction de Hamilton par

$$H(q_k, p_k, t) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$$

appelée le hamiltonien du système.

2.2 Equations canoniques de Hamilton

Etant donné que ce sont les coordonnées généralisées q_k et les moments conjugués p_k qui sont utilisés pour décrire le système à l'aide de la fonction

de Hamilton, il faut retrouver les équations auxquelles le système obéit. Calculons la dérivée totale de H par rapport au temps

$$\frac{dH}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t}.$$

En reprenant la même dérivée, mais cette fois-ci en utilisant l'expression du hamiltonien en fonction du lagrangien, on a

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_k \left(\dot{p}_k \dot{q}_k + p_k \ddot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_k \left(-\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \dot{p}_k \dot{q}_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

en identifiant les termes des deux expressions de l'hamiltonien, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{aligned}$$

et ce jeu d'équations s'appelle les équations canoniques de Hamilton. Ainsi, la dynamique du système est régie maintenant par $2n$ équations différentielles de premier ordre, ce qui apporte une simplification mathématique non négligeable, au lieu de n équations différentielles dans le cas des équations de Lagrange.

La recette à suivre est la suivante

1. Etablir l'énergie cinétique T du système et l'énergie potentiel V . En déduire le lagrangien L ;
2. Déterminer les moments conjugués p_k ;
3. Calculer le hamiltonien $H(q_k, p_k, t) = \sum_k \dot{q}_k p_k - L$;
4. Résoudre les $2n$ équations canoniques de Hamilton.

Notons que toutes les propriétés de symétrie du système se retrouvent dans le Hamiltonien et plus particulièrement, les variables cycliques où l'on voit directement que leurs moments conjugués sont des intégrales premières.

De même, si l'on reprend l'expression de la dérivée totale du hamiltonien, on a

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Si le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps, le hamiltonien est une intégrale première et l'énergie mécanique est conservée.

2.3 Equations de Hamilton à partir du principe variationnel

Nous allons établir cette fois-ci les équations canoniques de Hamilton à partir du principe de moindre action. En effet, l'action s'écrit en fonction du hamiltonien comme suit

$$\begin{aligned} S &= \int L dt \\ &= \int (p_k \dot{q}_k - H) dt \end{aligned}$$

Lors d'une variation du chemin effectif du système, la variation de l'action est, on prend le cas d'un degré de liberté pour alléger les notations

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int (p_k \dot{q}_k - H) dt \\ &= \int \left(\dot{q} \delta p + p \frac{d\delta q}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \right) dt \\ &= \int \left[\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p - \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q \right] dt + [p \delta q]_1^2 \end{aligned}$$

comme $\delta q(1) = \delta q(2)$ et les variables p et q sont indépendantes et arbitraires, alors δS est nulle si

$$\begin{cases} \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} = 0 & \implies \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} = 0 & \implies \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

ce qui donne les équations canoniques.

2.4 Etude d'un pendule : Portrait de phase

Nous allons étudier le cas d'un pendule simple et introduire par la même occasion la notion du portrait de phase d'un système.

2.4.1 Hamiltonien du système

Nous avons déjà établi que l'énergie cinétique du pendule est $T = 1/2 m l^2 \dot{\theta}^2$, l étant la longueur du pendule, m sa masse et θ est l'angle qui repère les

oscillations. Le potentiel s'écrit à une constante près comme $V = -mgl\cos\theta$. Ce qui donne pour le lagrangien $L = 1/2ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$. La coordonnée généralisée est $q = \theta$ et le moment conjugué est $p = \partial L/\partial \dot{q} = ml^2\dot{\theta}$, qui est tout simplement le moment cinétique du pendule par rapport à l'origine. On pose $I = ml^2$ et $\omega^2 = g/l$, le hamiltonien s'écrit alors comme suit

$$\begin{aligned} H(p, q) &= T + V = p\dot{q} - L \\ &= \frac{p^2}{2I} - \omega^2 I \cos q \end{aligned}$$

et la dynamique du système est complètement déterminée par la résolution des équations de Hamilton.

Toutefois, nous allons procéder par une autre approche en tirant profit de ce formalisme.

En effet, on peut déjà d'emblée dire que l'énergie est conservée car le hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps et que H est une intégrale première. De même, le mouvement du pendule peut être étudié sans avoir à résoudre les équations canoniques en l'étudiant dans l'espace de phase. Rappelons que l'espace de phase est formé par (p, q) . Ce n'est pas un espace vectoriel, ..., ce qui constitue un autre point fort du formalisme de Hamilton.

2.4.2 Portrait de phase

Sachant que $H = E$, on peut exprimer le moment conjugué en fonction de la coordonnée généralisée comme suit

$$p = \pm \omega I \sqrt{2} \sqrt{\cos q + \frac{E}{\omega^2 I}}.$$

Le mouvement du pendule va dépendre donc de la valeur de l'énergie E . On va donc étudier l'évolution de p en fonction de q en prenant E comme un paramètre. Comme $-1 < \cos q < 1$ et que l'argument de la racine carrée doit être positif, nous distinguons trois cas, en fonction de la valeur de E :

1. $0 < E < \omega^2 I$ alors la racine carrée n'est définie que si $\cos q \leq E/\omega^2 I$. On peut donc déduire que les variations de q sont bornées : on assiste donc à un mouvement d'oscillations libres. Ce mouvement est appelé un **mouvement de libration**. Les points pour lesquels $p = 0$ sont appelés **les points tournants**, ce sont les points où le pendule change de sens d'oscillation.

2. $E > \omega^2 I$, la racine carrée est toujours définie. Il y a une solution quelque soit la valeur q , parcontre p reste toujours bornée. On en déduit que le mouvement est un mouvement de rotation; on dit aussi un mouvement de **circulation**.
3. $E = \omega^2 I$, correspond au cas limite séparant les 2 régimes de libration et de circulation. La courbe associée à ce régime s'appelle la **séparatrice**.

2.4.3 Etude aux voisinages des points d'équilibre

Reprenons le potentiel $V = -I\omega^2 \cos q$, alors $dV/dq = I\omega^2 \sin q = 0$ pour $q_e = 0, \pm\pi$. Comme $V'' = d^2V/dq^2 = I\omega^2 \cos q$, ce qui donne $V''(0) > 0$ et $V''(\pi) < 0$ et donc le point $q = 0$ est un point d'équilibre stable alors que celui de $q = \pi$ est un point d'équilibre instable.

Etudions le mouvement autour de ces deux points. Pour ce faire, faisons un développement limité du potentiel au tour de $q_e = 0$, $V(x = q - q_e) = I\omega^2 \frac{x^2}{2}$ à une constante près, ce qui donne

$$\frac{p^2}{2I} + \frac{\omega^2 I}{2} x^2 = E$$

L'équation est une ellipse et le point $q_e = 0$ est dit un **un point elliptique**. On note que si l'on procède au changement de variables $Q = \sqrt{I\omega} x$ et $P = \partial L / \partial \dot{Q}$, alors l'équation devient

$$\frac{\omega}{2} (P^2 + Q^2) = E$$

qui est l'équation d'un cercle.

Les équations de Hamilton sont

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{I} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \implies I\ddot{x} = -\omega^2 Ix \end{aligned}$$

dont la solution est $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$, x_0 et φ_0 sont des réels fixés par les conditions initiales de la position et de la vitesse.

En $q_e = \pm\pi$, on procède de la même manière et on trouve l'équation suivante

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{2I} - \frac{\omega^2 I}{2} x^2 &= E \\ &= \frac{\omega}{2} (P^2 - Q^2) \end{aligned}$$

qui est l'équation d'une hyperbole. Les points $q_e = \pm\pi$ s'appellent **les points hyperbolique**. Les axes de l'hyperbole sont les séparatrices, $p = \pm l x$. Les équations de Hamilton donnent la solution $x(t) = x_0 e^{\omega t}$.

La figure 2.1 récapitule les différents régimes, en faisant varier l'énergie E , ainsi que la séparatrice.

- En rouge, on est en présence du régime de libration : ce sont des ellipses ; ce qui confirme le comportement aux voisinages de $q = 2k\pi$. En fonction de la valeur de E , le domaine de variation de q est borné. Le comportement est périodique de période 2π , qui est la période de $\cos q$;
- En vert, c'est le régime circulaire, q n'est plus bornée, c'est p qui l'est.
- La séparatrice est en bleu. Comme prévu, elle a un comportement hyperbolique aux voisinages de $q = (2k + 1)\pi$.

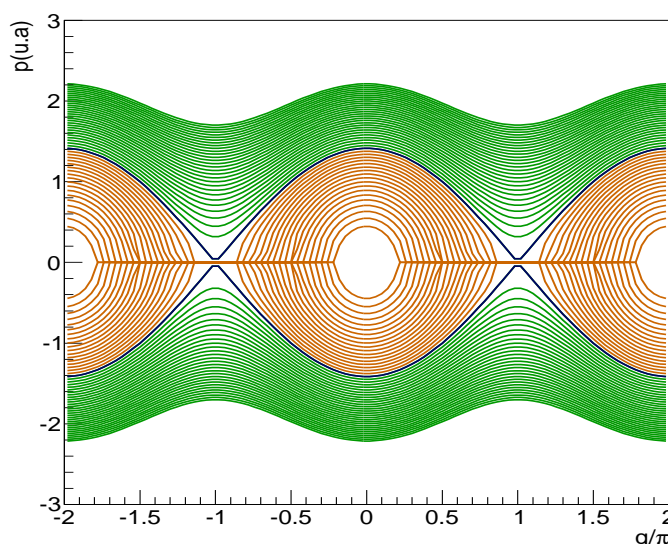


FIGURE 2.1 – Portrait de phase d'un pendule simple : en rouge le régime de libration, en vert celui de la circulation et en bleu la séparatrice entre les deux régimes.

2.4.4 Remarques

Ce qu'il faut retenir de cette étude et peut être appliquer en général est :

1. Dans le cadre du formalisme hamiltonien, l'état d'un système est caractérisé par un point de l'espace de phases, qui pour un système ayant n degrés de liberté, est de dimension $2n$ et formé par les (q_i, p_i) .
2. Le tracé du portrait de phase permet de déduire des informations sur le comportement dynamique d'un système sans avoir à résoudre les équations.

tions de Hamilton. Chaque courbe du portrait de phases correspond à la solution de l'équation différentielle qui régit la dynamique du système.

3. On peut construire une vue globale du comportement du système en prolongeant analytiquement les courbes aux voisinages des points singuliers du système. Ce qui permet de restreindre la résolution seulement aux voisinages des points singuliers et détendre continument de manière analytique les solutions sur le reste de l'espace de phases.

4. Poincaré a introduit une classification des points singuliers :

Centre ou point elliptique : les solutions sont des courbes fermées à ses voisinages ;

Col ou selle ou encore point hyperbolique : les solutions sont des hyperboles à ses voisinages ;

Noeud : lorsqu'un point est traversé par une infinité de courbes ;

Foyer : c'est un point vers lequel les courbes convergent.

2.5 Théorie de Hamilton-Jacobi

Rappelons que le principe de moindre action ou le principe variationnel est à la base du développement du formalisme de Lagrange dont les équations différentielles décrivent la dynamique d'un système. Ainsi, un système ayant n degrés de liberté est décrit par n équations différentielles de second ordre dont la solution fixe la dynamique du système en question. Le formalisme de Hamilton permet de décrire le système avec $2n$ équations différentielles de premier ordre et introduit la notion de l'espace de phases. Aussi, l'état du système à un instant t est décrit par un point de l'espace de phases, et c'est cela qui va être à la base du développement de la théorie de Hamilton-Jacobi. Le principe est le suivant : soient deux états du système aux instants t et t' . Ils sont décrits alors par deux points de l'espace des phases, respectivement (p, q) et (P, Q) . La résolution de l'évolution de l'un à l'autre peut se faire soit par les équations différentielles, soit tout simplement en trouvant la fonction qui fait changer le point de l'espace de phase (p, q) au point (P, Q) . La théorie de Hamilton Jacobi traite cette deuxième approche.

2.5.1 Transformations canoniques et fonctions génératrices

Les transformations auxquelles nous avons affaire jusqu'à maintenant sont de la forme $Q_k = Q_k(q_i, t)$ et sont dites des transformations ponctuelles. C'est

le cas par exemple du passage des systèmes de coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires ou sphériques.

Dans ce qui suit comme on le verra, les variables q_k et p_k jouent un rôle équivalent et on définit ce que l'on appelle une transformation de contact toute transformation dans l'espace de phases de la forme

$$\begin{cases} q_k \rightarrow Q_k = Q_k(q_i, p_i, t) \\ p_k \rightarrow P_k = P_k(q_i, p_i, t) \end{cases}$$

Cette transformation est dite canonique si les nouvelles coordonnées (Q_k, P_k) sont soumises à de nouvelles équations de Hamilton tels que

$$\begin{cases} \dot{Q}_k = \frac{\partial H'}{\partial P_k} \\ \dot{P}_k = -\frac{\partial H'}{\partial Q_k} \end{cases}$$

où H' est le nouveau hamiltonien en fonction des nouvelles coordonnées qui décrit toujours le même système.

Comme postulé dans le paragraphe précédent, H' est l'hamiltonien du système avec les nouvelles variables (Q_k, P_k) et donc obéit au principe de moindre action

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int L dt \\ &= \delta \int (p_k \dot{q}_k - H) dt \\ &= \delta \int (P_k \dot{Q}_k - H') dt \end{aligned}$$

et comme les deux équations satisfont le principe de moindre action, alors elles ne diffèrent que par une dérivée totale par rapport au temps.

Définition Une transformation canonique est une transformation de contact définie dans l'espace de phases et qui satisfait la condition

$$H' = H + \sum_k (P_k \dot{Q}_k - p_k \dot{q}_k) + \frac{dG}{dt}.$$

G est dite la fonction génératrice de la transformation canonique.

Etudions le cas d'un système ayant un degré de liberté. Quatre configurations de fonction génératrice se présentent.

$G_1(q, Q, t)$: En utilisant l'expression précédente, on a

$$\begin{aligned}
 H' &= H + P\dot{Q} - p\dot{q} + \frac{\partial G_1}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial G_1}{\partial Q}\dot{Q} + \frac{\partial G_1}{\partial t} \\
 H' &= H + \frac{\partial G_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial G_1}{\partial q} - p\right)\dot{q} + \left(\frac{\partial G_1}{\partial Q} + P\right)\dot{Q} \\
 \Rightarrow (H' - H - \frac{\partial G_1}{\partial t})dt &= \left(\frac{\partial G_1}{\partial q} - p\right) dq + \left(\frac{\partial G_1}{\partial Q} + P\right) dQ
 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} p = \frac{\partial G_1}{\partial q} \\ P = -\frac{\partial G_1}{\partial Q} \end{cases}$$

Ainsi la donnée de $G_1(q, Q, t)$ et de ces deux dernières équations déterminent complètement la dynamique du système avec les nouvelles variables. Si $G_1(q, Q)$ ne dépend pas explicitement du temps, alors $H' = H$.

$G_2(q, P, t)$: On procède de la même manière et on a

$$(H' - H - \frac{\partial G_2}{\partial t})dt = \left(\frac{\partial G_2}{\partial q} - p\right) dq + P dQ + \frac{\partial G_2}{\partial P} dP$$

or dans ce cas c'est le couple (q, P) qui est indépendant alors que Q peut s'exprimer en fonction de ce couple. Pour pallier à cela, il suffit de procéder au changement de Legendre $G_2 \rightarrow G_2 + PQ$, ce genre de changement est très pratiqué en thermodynamique. En fait cela revient à ajouter une dérivée totale par rapport au temps $d(PQ)/dt$ et ceci n'altère en rien les équations de la dynamique. Ainsi on a :

$$(H' - H - \frac{\partial G_2}{\partial t})dt = \left(\frac{\partial G_2}{\partial q} - p\right) dq + \left(Q + \frac{\partial G_2}{\partial P}\right) dP$$

ce qui donne

$$\begin{cases} p = \frac{\partial G_2}{\partial q} \\ Q = \frac{\partial G_2}{\partial P} \end{cases}$$

Deux autres configurations sont possibles, $G_3(p, Q, t)$ et $G_4(p, P, t)$ et le traitement est le même que les deux cas précédents. Et chaque fois que c'est nécessaire, on peut appliquer la transformation de Legendre

pour se ramener aux deux variables indépendantes.

Bien que les résultats ont été obtenus pour un système de dimension $n = 1$, ils sont valables pour un système ayant n degrés de liberté.

2.5.2 Quelques exemples de transformation

Identité Soit la transformation

$$G_2(q, P) = \sum_k q_k P_k$$

D'après les résultats précédents, on a

$$\begin{cases} p_k = \frac{\partial G_2}{\partial q_k} = P_k \\ Q_k = \frac{\partial G_2}{\partial P_k} = q_k \end{cases}$$

et $H' = H$ puisque G_2 ne dépend pas explicitement du temps. On voit donc que les nouvelles variables sont identiques aux anciennes, ce qui vaut à la transformation le nom identité.

Rôle équivalent entre les variables Cette transformation montre bien le rôle équivalent que jouent les variables q_k et p_k . Soit la transformation $G_1 = \sum_k q_k Q_k$. En appliquant les résultats précédents, nous avons $p_k = Q_k$ et $P_k = q_k$ et on voit qu'aucune des variables n'est privilégiée par rapport à l'autre.

Oscillateur harmonique 1D Le système a un seul degré de liberté. On prend comme coordonnée généralisée $q = x$ ainsi l'énergie cinétique est $T = 1/2 m \dot{q}^2$ et l'énergie potentiel est $V(q) = kq^2$. On pose $\omega^2 = k/m$, ce qui donne pour le lagrangien

$$L = T - V = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

le moment conjugué est $p = \partial L / \partial \dot{q} = m\dot{q}$. Le hamiltonien est alors égal à

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

et les équations de Hamilton sont

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \quad \text{et} \quad \dot{p} = -m\omega^2 q$$

Rappelons que l'intérêt d'opérer une transformation canonique est de retrouver des équations dynamiques plus simples et même triviales et le changement inverse permet de retrouver les équations avec les coordonnées d'origine.

Considérons l'exemple de la fonction génératrice suivante

$$F(q, Q, t) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot Q$$

notons que la difficulté d'une telle démarche est de trouver la bonne génératrice, ce qui n'est pas généralement aisé à faire.

On voit que F est de la famille $G_1(q, Q, t)$. On applique les résultats obtenus :

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = m\omega q \cot Q \quad \text{et} \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q}$$

et à partir de ces deux expressions, on en déduit que

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \quad \text{et} \quad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q$$

Notons que la fonction génératrice ne dépend pas explicitement du temps, ce qui implique que $H' = H$ et comme nous avons l'expression des anciennes variables en fonction des nouvelles, on peut déduire H' , comme suit

$$H' = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q = \omega P.$$

On relève que la variable Q est cyclique et donc $\dot{P} = 0$ et donc P est une constante du mouvement. Et c'est le but recherché, de trouver un nouvel hamiltonien avec des variables cycliques. Comme H ne dépend pas explicitement du temps, l'énergie est conservée. Alors P peut être exprimée comme $P = E/\omega$, ce qui donne pour Q

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = \omega$$

et la solution est simplement

$$Q = \omega t + \phi$$

où ϕ est déterminée par les conditions initiales. Et la solution en fonction de l'ancienne variable est

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \phi)$$

qui est la solution que l'on connaît. On remarque que Q est homogène à un angle et P à une action. Comme on le verra par la suite les variables conjuguées (angle, action) sont à même de bien décrire un système à variable cyclique.

2.6 Crochets de Poisson

Les crochets de Poisson apparaissent de manière naturelle si l'on considère la dérivée par rapport au temps d'une fonction définie sur l'espace de phases. En effet

$$\frac{df}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Si l'on tient compte des équations de Hamilton, on obtient

$$\frac{df}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

ce qui donne, en notation de crochets de Poisson, comme il sera précisé plus tard,

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

et on voit bien que si f est une intégrale première, $df/dt = 0$, et qu'elle ne dépend pas explicitement du temps, on peut affirmer que $\{f, H\} = 0$. Ce qui nous donne un outil puissant pour vérifier si une grandeur est une intégrale première.

Définition Considérons deux fonctions définies $f(q_k, p_k, t)$ et $g(q_k, p_k, t)$ dans l'espace de phases. On appelle par les crochets de Poisson entre les deux fonctions l'expression suivante

$$\{f, g\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right)$$

On constate que dans le cas particulier où $f = q_k$ et $g = p_k$, on a

$$\begin{aligned} \{q_i, p_j\} &= \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \right) \\ &= \sum_k \delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{ij} \\ \{q_i, q_j\} &= 0 \quad \text{et} \quad \{p_i, p_j\} = 0. \end{aligned}$$

2.6.1 Quelques propriétés

Nous présentons quelques propriétés, qui seront démontrées en partie aux TD,

$$\begin{aligned}
 \{f, g\} &= -\{g, f\} \\
 \{f, c\} &= 0 \quad (c \text{ est une constante}) \\
 \{f_1 + f_2, g\} &= \{f_1, g\} + \{f_2, g\} \\
 \{f_1 f_2, g\} &= f_1 \{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2 \\
 \frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} \\
 \{f, q_i\} &= -\frac{\partial f}{\partial p_i} \\
 \{f, p_i\} &= \frac{\partial f}{\partial q_i}
 \end{aligned}$$

On donne enfin une identité dite de Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$$

Notons que nous avons mentionné dans les propriétés la dérivée partielle par rapport au temps et qui à ne pas confondre avec la dérivée totale par rapport au temps. Ainsi, l'identité de Jacobi permet de démontrer la relation suivante

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \{f, g\} &= \{\{f, g\}, H\} + \frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} \\
 &= \{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} + \frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} \\
 &= \left\{ f, \frac{dg}{dt} - \frac{\partial g}{\partial t} \right\} - \left\{ g, \frac{df}{dt} - \frac{\partial f}{\partial t} \right\} + \frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} \\
 &= \left\{ \frac{df}{dt}, g \right\} + \left\{ f, \frac{dg}{dt} \right\}
 \end{aligned}$$

2.6.2 Crochets de Poisson et transformations canoniques

On opère sur le système une transformation canonique qui $q_k \rightarrow Q_k$ et $p_k \rightarrow P_k$. Que deviennent les crochets de Poisson entre les nouvelles variables?

Théorème Les crochets de Poisson sont indépendants du jeu de variables canoniques dans lequel ils sont exprimés, ainsi

$$\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P}$$

ce théorème ne sera pas démontré ici.

Toutefois, ce qui découle de ce théorème est que les propriétés citées précédemment restent donc valables pour les nouvelles variables (Q_i, P_i) , il suffit de substituer les anciennes par les nouvelles.

Les crochets de Poisson nous permettent aussi de tester le caractère canonique d'une transformation. En effet, on a le théorème suivant, que l'on peut utiliser mais qui ne va pas être démontré.

Théorème Une transformation est canonique si les crochets de Poisson sont invariants par rapport à cette transformation, autrement dit, il suffit que les nouvelles variables préservent la forme des crochets de Poisson.

2.6.3 Symétries et crochets de Poisson

Nous avons vu que le théorème de Noether permet de calculer les constantes d'un mouvement à partir des symétries du lagrangien. Ce que nous allons aborder dans ce paragraphe est le fait d'exprimer l'effet d'une transformation de symétrie sur une fonction $g = g(q_k, p_k, t)$ définie sur l'espace de phases. En effet, supposons que l'on a une transformation infinitésimale sur les coordonnées, q_k et p_k

$$\begin{aligned} q_k &\rightarrow Q_k + \delta q_k \\ p_k &\rightarrow P_k + \delta p_k \end{aligned}$$

dont la fonction génératrice est G . On cherche alors à exprimer l'effet de G sur une fonction g .

Pour ce faire, la fonction génératrice peut être écrite comme la fonction génératrice identité augmentée d'une quantité infinitésimale. On peut formuler la fonction génératrice, en utilisant la fonction génératrice identité, $G_2(q, P) = \sum_k q_k P_k$, comme suit

$$G(q_k, P_k) = \sum_k q_k P_k + \epsilon F$$

où $\epsilon \rightarrow 0$ et appelé le paramètre de la transformation et F une fonction qui dépend de la nature de la transformation de la symétrie à laquelle le lagrangien est invariant et qui est appelée le générateur infinitésimal de la transformation. Ainsi l'information complète de l'effet de G est maintenant dans F . On applique les résultats précédents, et on a

$$p_k = \frac{\partial G}{\partial q_k} = P_k + \epsilon \frac{\partial F}{\partial q_k}$$

$$Q_k = \frac{\partial G}{\partial P_k} = q_k + \epsilon \frac{\partial F}{\partial q_k}$$

$$H' = H$$

ainsi on peut écrire

$$\delta p_k = P_k - p_k = -\epsilon \frac{\partial F}{\partial q_k}$$

$$\delta q_k = Q_k - q_k = \epsilon \frac{\partial F}{\partial p_k} \sim \epsilon \frac{\partial F}{\partial p_k}$$

Exprimons maintenant l'accroissement de g due à cette transformation,

$$\begin{aligned} \delta g &= \sum_k \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial g}{\partial p_k} \delta p_k \right) \\ &= \epsilon \sum_k \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial q_k} \right) \\ &= \epsilon \{g, F\} \end{aligned}$$

Ainsi l'on voit que les crochets de Poisson permettent de calculer l'effet sur une fonction définie dans l'espace de phases par une transformation canonique de paramètre ϵ . Avant de donner un exemple, nous allons d'abord reexprimer cette relation en fonction des invariants pour faire apparaître les symétries du système.

2.6.4 Invariants d'un système

Nous avons établi que les intégrales premières, I_k , d'un système vérifient $\{H, I_k\} = 0$.

Ainsi, si une transformation canonique F vérifie $\{H, F\} = 0$, alors en raison du résultat du paragraphe précédent, $\delta H = 0$, c'est à dire que la transformation laisse invariant le hamiltonien et le générateur de la transformation est lui même une intégrale première. Ce qui montre bien que ce résultat est plus général que celui établi par le théorème de Noether. De plus pour une transformation de symétrie, nous identifions le générateur de la transformation et l'on peut l'exprimer en fonction de ce dernier.

Reprenons les exemples déjà abordés dans le cadre du théorème de Noether.

Translation dans le temps Nous avons établi auparavant que l'hamiltonien d'un système est invariant par rapport à une translation dans le

temps si ce dernier ne dépend pas explicitement du temps.
Prenons, $F = H$ et voyons ce que cela donne :

$$\begin{aligned}\delta p_k &= -\epsilon \frac{\partial H}{\partial q_k} = \epsilon \dot{p}_k \\ \delta q_k &= \epsilon \frac{\partial H}{\partial p_k} = \epsilon \dot{q}_k\end{aligned}$$

on voit bien que $\epsilon = dt$ et que le hamiltonien est bien le générateur infinitésimal des translations dans le temps faisant évoluer le système d'un instant t à un instant $t + dt$.

Ainsi, **le mouvement d'un système entre deux instant t_1 et t_2 peut être décrit par une succession de transformations canoniques infinitésimales dont le générateur est H .**

Translation d'un q_k Nous savons que si q_k est une variable cyclique, alors le hamiltonien est invariant par rapport à une translation de q_k et que le moment conjugué p_k est une intégrale première. Prenons cette fois-ci $F = p_k$, alors

$$\begin{aligned}\delta p_i &= -\epsilon \frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0 \\ \delta q_i &= \epsilon \frac{\partial p_i}{\partial p_k} = \epsilon \delta_{ik}\end{aligned}$$

on voit bien que $\epsilon = \delta q_k$ et que l'impulsion est le générateur infinitésimal des translations selon q_k .

Rotation

2.7 L'espace de phases

Nous avons vu que le formalisme de Hamilton a introduit l'espace de phases dans lequel l'état d'un système à un instant donné t est décrit par un point $x(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$. La dimension de l'espace de phases pour un système dont le nombre de degrés de liberté est n , la dimension est $2n$. Notons que cette espace n'a pas la structure d'un espace vectoriel. C'est une variété différentiable.

2.7.1 Flot Hamiltonien

Nous avons vu aussi que la dynamique d'un système est décrite par $2n$ équations différentielles de premier ordre qui peuvent se mettre sous forme

compacte comme suit

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ - \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ - \frac{\partial H}{\partial q_n} \end{pmatrix} \quad \text{que l'on peut \u00e9crire comme } \dot{x} = g_H^t(x, t)$$

o\u00f9 $g_H^t(x, t)$ repr\u00e9sente le **champ des vitesses** au point x et appel\u00e9 le flot hamiltonien, par analogie avec la m\u00e9canique des fluides.

La d\u00e9termination du champ des vitesses, r\u00e9solution des \u00e9quations du flot hamiltonien, consiste \u00e0 d\u00e9terminer la trajectoire dans l'espace de phases. Rappelons que l'espace de phases aussi permet d'approcher les solutions de mani\u00e8re qualitative, comme on l'a vu dans le cadre des portraits de phase. Le th\u00e9or\u00e8me suivant, qui n'est pas d\u00e9montr\u00e9, permet d'affirmer l'unicit\u00e9 de la trajectoire qui correspond \u00e0 la solution.

Th\u00e9or\u00e8me de Cauchy

Pour des conditions initiales donn\u00e9es, la solution du flot hamiltonien $\dot{x}(t)$ existe et elle est unique.

Ce th\u00e9or\u00e8me est valable dans la r\u00e9gion de l'espace des phases \u00e0 l'exclusion des points singuliers (point hyperbolique, ...).

Ce th\u00e9or\u00e8me permet d'affirmer que deux trajectoires ne peuvent jamais se rencontrer, mis \u00e0 part au niveau des points singuliers. En effet, si deux trajectoires se coupent, cela veut dire que les deux solutions sont \u00e9gales en ce point alors qu'elles \u00e9manent de deux conditions initiales diff\u00e9rentes, ce qui contredit le th\u00e9or\u00e8me de Cauchy.

2.7.2 Incompressibilit\u00e9 du flot

Conservation du volume

Tout volume V de l'espace de phases n'englobant pas des points singuliers est conserv\u00e9 par le flot hamiltonien

$$\frac{dV}{dt} = 0.$$

En effet, \u00e9tant donn\u00e9 que les trajectoires distinctes ne se coupent jamais, les points constituant un volume V \u00e9voluent tout en restant distincts, ce qui

implique que V ne peut que se déformer et changer de forme alors que sa valeur reste constante au cours du temps.

L'élément infinitésimal du volume dans l'espace de phases peut s'écrire comme

$$dV = dq_1 \cdot dq_2 \cdots dq_n \cdot dp_1 \cdot dp_2 \cdots dp_n.$$

Notons que si le nombre de degrés de liberté $n = 1$, V est une surface.

On sait que l'évolution au cours du temps des variables (q_k, p_k) est décrite par une transformation canonique, ainsi affirmer que le volume reste conservé implique que le volume exprimé en fonction (q_k, p_k) est le même que celui exprimé en fonction de (Q_k, P_k) et on peut affirmer alors que le volume V est un invariant canonique.

Démonstration

Partant de l'élément infinitésimal du volume

$$\begin{aligned} V &= \int \cdots \int dq_1 \cdot dq_2 \cdots dq_n \cdot dp_1 \cdot dp_2 \cdots dp_n \\ &= \int \cdots \int dQ_1 \cdot dQ_2 \cdots dQ_n \cdot dP_1 \cdot dP_2 \cdots dP_n \\ &= \int \cdots \int J dq_1 \cdot dq_2 \cdots dq_n \cdot dp_1 \cdot dp_2 \cdots dp_n \end{aligned}$$

où J est le jacobien du changement de variables donné par

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial q_1} & \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial q_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_1}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial q_n} & \frac{\partial P_1}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial q_n} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial p_1} & \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial p_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial p_n} & \frac{\partial P_1}{\partial p_n} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}.$$

Dans la suite on utilisera la notation

$$J = \frac{\partial(Q_1, \cdots, Q_n, P_1, \cdots, P_n)}{\partial(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)}.$$

qui coïncide avec un changement de variable de dimension 1. Aussi, le volume est un invariant canonique si $J = 1$.

Nous allons utiliser des propriétés du Jacobien¹ comme suit

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} \\ &= \frac{\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)}}{\frac{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)}} \\ &= \frac{\mathbf{J}_1}{\mathbf{J}_2} \end{aligned}$$

On calcule \mathbf{J}_1 comme suit

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 &= \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)} \\ &= \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n)} = \det(A) \end{aligned}$$

avec

$$A_{ij} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial G_2}{\partial P_j} = \frac{\partial^2 G_2}{\partial q_i \partial P_j}.$$

De même, en procédant de la même manière, on calcule \mathbf{J}_2

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_2 &= \frac{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)} \\ &= \frac{\partial(p_1, \dots, p_n)}{\partial(P_1, \dots, P_n)} = \det(B) \end{aligned}$$

avec

$$B_{ij} = \frac{\partial p_j}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i} \frac{\partial G_2}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 G_2}{\partial q_j \partial P_i} = ({}^t A)_{ij}$$

or $\det(A) = \det({}^t A)$ ce qui implique $\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_2$ et par la même occasion l'invariance canonique du volume est démontrée. Notons que nous avons utilisé la fonction génératrice $G_2(q, P)$.

1. Considérons le changement de variable $x \rightarrow X, y \rightarrow Y$ et $z \rightarrow Z$. et soient u, v et w un autre jeu de variables. Nous pouvons écrire

$$dXdYdZ = \mathbf{J} dx dy dz$$

où

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial Y}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(u, v, w)} \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$$

2.7.3 Invariants intégraux de Poincaré

La grandeur définie dans l'espace de phase par
 $h_1 = \iint \sum_i dq_i dp_i$ est un invariant canonique.

Pour démontrer cela, il suffit de démontrer que cette quantité ne dépend pas du choix des variables dans lequel cette grandeur est exprimée, à condition que les jeux de variables se transforment les uns en les autres par une transformation canonique. Soient (Q_k, P_k) un jeu de variables obtenu par une transformation canonique. Considérons deux variables indépendantes avec lesquels on peut exprimer

$$q_i = q_i(u, v) \quad , \quad p_i = p_i(u, v) \quad , \quad Q_j = Q_j(u, v) \quad \text{et} \quad P_j = P_j(u, v).$$

h_1 est un invariant canonique si et seulement si

$$\begin{aligned} h_1 &= \iint \sum_i dq_i dp_i = \iint \sum_i J_i du dv \\ &= \iint \sum_j dQ_j dP_j = \iint \sum_j J'_j du dv \end{aligned}$$

ce qui est vérifié si $\sum_i J_i = \sum_j J'_j$.

Calculons J_i

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} \\ &= \frac{\frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(q_i, P_i)}}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(q_i, P_i)}} \\ &= \frac{1}{D_i} \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial q_i} & \frac{\partial p_i}{\partial q_i} \\ \frac{\partial q_i}{\partial P_i} & \frac{\partial p_i}{\partial P_i} \end{vmatrix} = \frac{1}{D_i} \frac{\partial p_i}{\partial P_i} = \frac{1}{D_i} \frac{\partial^2 G_2}{\partial P_i \partial q_i} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé une transformation canonique de classe $G_2(q, P)$ et le fait que q_i et p_i sont indépendantes. De la même manière on calcule J'_j

$$\begin{aligned} J'_j &= \frac{\partial(Q_j, P_j)}{\partial(u, v)} \\ &= \frac{\frac{\partial(Q_j, P_j)}{\partial(q_j, P_j)}}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(q_j, P_j)}} \\ &= \frac{1}{D_j} \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_j}{\partial q_j} & \frac{\partial P_j}{\partial q_j} \\ \frac{\partial Q_j}{\partial P_j} & \frac{\partial P_j}{\partial P_j} \end{vmatrix} = \frac{1}{D_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_j} = \frac{1}{D_j} \frac{\partial^2 G_2}{\partial P_j \partial q_j} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé une transformation canonique de classe $G_2(q, P)$ et le fait que Q_j et P_j sont indépendantes. En sommant sur J_i et sur J'_j , on en déduit que le moment intégral de Poincaré est un invariant canonique.

2.7.4 Théorème de Liouville

La densité des états $\rho = dN/dV$ d'un système mécanique aux voisinages d'un point de l'espace de phases se conserve tout au long de l'évolution du système au cours du temps

$$\frac{d\rho}{dt} = 0.$$

On a vu que le volume est un invariant canonique, et donc se conserve au cours du temps, ce qui implique que le nombre d'états dN reste constant au cours du temps.

Le théorème de Liouville prend toute son importance en physique statistique où le nombre de particules N est très grand. L'évolution au cours du temps de ρ peut se mettre sous la forme suivante et ce en utilisant les crochets de Poisson

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \{H, \rho\} \implies \frac{\partial\rho}{\partial t} = \{H, \rho\}.$$

On peut conclure qu'à l'équilibre statistique, le nombre de particules dans un état donné est constant. Comme dV est constant alors ρ ne dépend pas explicitement du temps, $\partial\rho/\partial t = 0$, ce qui permet d'écrire que

$$\{H, \rho\} = 0$$

A l'équilibre statistique, la densité des états est une fonction des constantes du mouvement.

2.7.5 Système intégrables

Théorème de Arnold-Liouville

On parle d'un système intégrable quand on peut décrire qualitativement le comportement du système dans l'espace de phases. Le théorème suivant fixe les conditions suffisantes pour qualifier un système d'intégrable.

Un système mécanique ayant n degrés de libertés est intégrable s'il possède les trois propriétés suivantes :

1. $\exists n$ intégrales premières I_i ;
2. les intégrales premières I_i sont indépendantes;
3. $\{I_i, I_j\} = 0 \forall i, j \leq n$: on dit qu'elles sont en involution.

Cartes et atlas symplectiques

On appelle par carte le jeu de coordonnées de l'espace de phases choisi pour décrire la dynamique d'un système. En général, l'exploration de l'ensemble de l'espace de phases nécessite plusieurs choix de variables adaptés à chacune des régions singulières de l'espace de phases. L'ensemble de ces choix, ou cartes, constitue ce que l'on appelle un atlas.

Un atlas est dit symplectique si chacune des cartes correspond à une transformation canonique.

Chapitre 3

Systemes hamiltoniens

3.1 Introduction

Nous avons vu dans les chapitres précédents que l'objectif du formalisme de Hamilton est de décrire le système par les variables conjuguées, les coordonnées généralisées et leurs moments conjugués. De même, cela a permis d'introduire la notion de l'espace des phases et d'élaborer les équations canoniques de Hamilton, comme description de la dynamique du système au lieu des équations de Lagrange.

L'introduction des transformations canoniques a pour but de trouver le jeu de variables conjuguées où l'on a le plus de variables cycliques, ce qui de loin simplifie les équations régissant la dynamique et fait émerger les intégrales premières du système de manière directe.

En se plaçant toujours dans cette dynamique, la situation la plus optimale serait que toutes les variables conjuguées soient cycliques, ce qui fait que nous nous retrouvons avec $2n$ intégrales premières du système et qui ne sont que des fonctions des $2n$ conditions initiales et où le nouveau hamiltonien $H' = 0$. Etudions en détail cette configuration.

3.2 L'équation de Hamilton-Jacobi

Comme nous venons de le mentionner, les nouvelles variables (Q_k, P_k) sont cycliques, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\dot{Q}_k &= \frac{\partial H'}{\partial P_k} = 0 \\ \dot{P}_k &= -\frac{\partial H'}{\partial Q_k} = 0\end{aligned}$$

entraînant ainsi l'existence de $2n$ invariants. Soit G la transformation canonique associée, que l'on cherche à déterminer. Utilisant les résultats du chapitre précédent, et sachant que $H' = 0$, nous avons

$$H(q_i, p_i, t) - \sum_k p_k \dot{q}_k + \frac{dG}{dt} = 0.$$

Jusqu' alors, aucune condition sur la fonction génératrice mis à part le fait que les nouvelles variables conjuguées soient cycliques. Si l'on prend $G = G_2(q, P, t)$, et dérivons par rapport au temps

$$\frac{dG_2}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial G_2}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial G_2}{\partial P_k} \dot{P}_k \right) + \frac{\partial G_2}{\partial t}$$

comme

$$\dot{P}_k = 0 \quad \text{et} \quad p_k = \frac{\partial G_2}{\partial Q_k}$$

nous avons

$$H(q_k, \frac{\partial G}{\partial q_k}, t) + \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

qui constitue l'équation de Hamilton-Jacobi. Nous avons laissé tombé l'indice de la fonction G_2 , étant donné que ce résultat reste valable quelque soit la classe de G .

On appelle l'équation de Hamilton-Jacobi, l'équation donnant la fonction génératrice de la transformation canonique où toutes les nouvelles variables conjuguées (Q_k, P_k) sont cycliques,

$$H(q_k, \frac{\partial G}{\partial q_k}, t) + \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

$G(q, t; P)$ fonction de n variables généralisées et du temps t est appelée la fonction principale de Hamilton.

3.3 Fonction principale de Hamilton : Quel sens lui donner ?

Reprenons l'expression de la dérivée totale par rapport au temps de la fonction principale de Hamilton, les nouvelles variables conjuguées étant cycliques par construction,

$$\frac{dG}{dt} = \sum_k \frac{\partial G}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial G}{\partial t} = \sum_k p_k \dot{q}_k - H = L$$

et on voit bien que cette dérivée n'est d'autre que le lagrangien du système, lui même par définition la dérivée totale par rapport au temps de l'action \mathcal{S} . On peut ainsi dire que

$$\mathcal{S}(q, t; P) = \int_{t_1}^t L dt.$$

Notons la différence fondamentale entre l'action définie ci-dessus et celle définie lors de l'établissement du principe de moindre action qui a engendré les équations de Lagrange. En effet, l'action définie dans le premier chapitre est une fonctionnelle calculée entre deux instants fixes t_1 et t_2 en utilisant le chemin q la rendant extrémale, et considérant ce chemin comme celui qui sera emprunté par le système lors de son évolution entre ces deux instants. Alors que l'action calculée dans ce chapitre, et que l'on appelle **l'action hamiltonienne**, est calculée en partant d'un instant fixe t_1 , et donc d'un point fixe $q(1)$, alors que la deuxième extrémité du chemin peut prendre n'importe quelle valeur. Ainsi la différence fondamentale est que tous les chemins suivis pour ce cas sont des chemins qui peuvent être empruntés par le système et par conséquent les équations de Lagrange s'appliquent à tous les chemins. Ce qui n'est pas le cas pour l'action dans le premier chapitre où seule la trajectoire physique obéit aux équations de Lagrange.

Ainsi, dans le premier chapitre l'on avait deux contraintes, $\delta q(1) = \delta q(2) = 0$ alors que dans ce cas nous avons $\delta q(1) = 0$ et que les équations de Lagrange sont appliquées à tous les chemins. Rexprimons l'équation de Hamilton-Jacobi à partir du principe de moindre action avec ces nouvelles conditions.

3.3.1 Principe variationnel

Soit l'action hamiltonienne

$$\mathcal{S}(q, t; q_1, t_1) = \int_{t_1}^t L(q, \dot{q}, t) dt$$

comme mentionné auparavant, cette fois-ci tous les $q(t)$ obéissent aux équations de Lagrange. Différentions \mathcal{S}

$$d\mathcal{S} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} dt = L dt$$

Calculons l'accroissement de \mathcal{S} entre deux trajectoires voisines partant du même point $q(1)$:

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{S} &= \int_{t_1}^t \delta L dt \\
 &= \int_{t_1}^t \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right] dt \\
 &= \int_{t_1}^t \sum_k \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right] dt \\
 &= \int_{t_1}^t \sum_k \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right] dt \\
 &= \sum_k \left(\frac{\partial L(q_k(t), \dot{q}_k(t), t)}{\partial \dot{q}_k(t)} \delta q_k(t) - \frac{\partial L(q_k(t), \dot{q}_k(t), t)}{\partial \dot{q}_k(t)} \Big|_{t=t_1} \delta q_k(t_1) \right) \\
 &= \sum_k \frac{\partial L(q_k(t), \dot{q}_k(t), t)}{\partial \dot{q}_k(t)} \delta q_k(t) \\
 &= \sum_k p_k \delta q_k
 \end{aligned}$$

ce qui permet de déduire que

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_k} = p_k$$

en utilisant l'expression de la dérivée totale de \mathcal{S} et ce dernier résultat, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 \sum_k p_k dq_k + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} dt = L dt &\implies \sum_k p_k \dot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = L \\
 &\implies \sum_k p_k \dot{q}_k - L + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = 0 \\
 &\implies H(q_i, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_i}, t) + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = 0
 \end{aligned}$$

qui n'est d'autre que l'équation de Hamilton-Jacobi.

L'action hamiltonienne est l'action calculée sur une trajectoire physique dont le point de départ est fixé alors que le point d'arrivée est libre.

Elle est la fonction génératrice de la transformation canonique pour laquelle toutes les nouvelles variables conjuguées sont cycliques

3.4 Méthode générale de résolution

L'équation de Hamilton-Jacobi (HJ), comme c'est le cas des équations de Lagrange ou bien les équations canoniques de Hamilton, permettent de résoudre l'état dynamique du système.

Le point de départ est la construction du hamiltonien avec les variables conjuguées (q_k, p_k) , $H(q_k, p_k)$. Généralement, le système est conservatif, alors le hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, l'énergie mécanique est une intégrale première du système, $H = E$. ainsi on peut d'ores et déjà séparer la partie temporelle et écrire, en partant de HJ

$$\frac{\partial \mathcal{S}(q, t; P)}{\partial t} = -H = -E \implies \mathcal{S}(q_k, t; P_k) = \mathcal{S}_0(q_k; P_k) - Et$$

où $\mathcal{S}_0(q_k; P_k)$ ne dépend que de q_k et paramétrée par P_k . $\mathcal{S}_0(q_k; P_k)$ est appelée parfois **la fonction caractéristique de Hamilton**. Reprenons les équations

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{S}_0(q_k; P_k)}{\partial q_k}$$

$$Q_k = \frac{\partial \mathcal{S}_0(q_k; P_k)}{\partial P_k}$$

et montrons que sur le plan formel, la connaissance de \mathcal{S} permet de résoudre le problème. En effet, les premières n équations permettent de relier les intégrales premières P_k aux conditions initiales et par conséquent fixer leurs valeurs. Ensuite, les dernières n équations permettent de déduire les relations entre les n Q_k à l'instant $t = 0$ et les conditions initiales, étant donné que Q_k sont des intégrales premières par construction. Ainsi les $p_k(t)$ sont résolus par les n premières équations et les $q_k(t)$ sont déduites par inversion des n dernières équations. Ce qui montre que sur le plan formel, la connaissance de \mathcal{S}_0 est suffisante pour résoudre le problème.

Toutefois, il n'existe pas de recette universelle pour résoudre les équations HJ. On va toutefois se placer dans le cas où les variables peuvent être séparées et \mathcal{S}_0 peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{S}_0(q_i; P_i) = \sum_i \mathcal{S}_{0i}(q_i; P_i) \implies p_k = \frac{\partial \mathcal{S}_{0i}(q_k; P_k)}{\partial q_k}$$

et on substitue p_k par $\frac{\partial \mathcal{S}_{0i}}{\partial q_k}$ dans H et on obtient une équation aux dérivées partielles que l'on cherche à mettre sous la forme

$$\sum_k \left[\frac{\partial \mathcal{S}_{0i}(q_k; P_k)}{\partial q_k} + g(q_k) \right] = \text{Cte} = \sum_k \alpha_k$$

où $g(q_k)$ est une fonction de q_k qui dépend du système. Ainsi l'équation différentielle à résoudre devient

$$\frac{d\mathcal{S}_{0i}}{dq_k} + g(q_k) = \alpha_k$$

Notons que si la variable q_k est cyclique, alors $g(q_k) = 0$ et l'équation précédente devient

$$\frac{d\mathcal{S}_{0i}}{dq_k} = \alpha_k \implies \mathcal{S}_{0i} = \alpha_k q_k + \text{Cte}$$

3.4.1 Exemple 1 : Particule libre

Appliquons la démarche exposée dans le paragraphe précédent pour une particule isolée de masse m et animée d'une vitesse v tel que $p = mv$. Soit q sa coordonnée selon l'axe de son mouvement.

L'expression du hamiltonien est

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m}$$

ainsi on constate que q est cyclique donc p est constante comme prévu, étant donné que la particule est isolée.

Le hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, donc c'est une intégrale première et par conséquent $H = \text{Cte} = E$. La fonction principale de Hamilton peut se mettre sous la forme $\mathcal{S}(q, t; P) = \mathcal{S}_0(q; P) - Et$.

Ensuite on substitue p par $\partial \mathcal{S}_0(q; P) / \partial q$ dans l'expression du hamiltonien et on utilise l'équation de **HJ**; ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \mathcal{S}_0(q; P)}{\partial q} \right)^2 + \frac{\partial \mathcal{S}(q, t; P)}{\partial t} &= 0 \\ \implies \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \mathcal{S}_0(q; P)}{\partial q} \right)^2 - E &= 0 \\ \implies \frac{\partial \mathcal{S}_0(q; P)}{\partial q} &= \pm \sqrt{2mE} \\ \implies \mathcal{S}_0 &= \pm \sqrt{2mE} q \end{aligned}$$

d'où

$$S(q, t; P) = \pm\sqrt{2mE}q - Et$$

La deuxième étape consiste à identifier l'intégrale première P et la substituer dans l'expression de S . Dans notre cas, on a vu que E est constante donc on peut prendre $P = E$ ce qui nous permet de calculer Q , après avoir substitué la dérivée par rapport à P par celle par rapport à E ,

$$Q = \frac{\partial}{\partial E} (\pm\sqrt{2mE}q - Et) \implies Q = \pm \left(\sqrt{\frac{m}{2E}}q - t \right)$$

et l'expression de q s'obtient en inversant la dernière équation

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m}} (t \pm Q) = vt + q_0$$

où $\sqrt{2E/m} = \sqrt{2p^2/(2m^2)} = \sqrt{v^2} = v$ et $x_0 = \pm\sqrt{2E/m}Q$. Et on voit bien que l'on retrouve l'équation horaire d'une particule animée d'un mouvement rectiligne uniforme.

Notons que la solution est plus directe si l'on utilise les équations de la-grange étant donné que le lagrangien est connu.

3.4.2 Exemple 2 : chute libre 1D

Considérons la chute libre d'une masse m et soit q la coordonnée selon l'axe de la chute. Le nombre de degré de liberté est égal à 1. L'énergie cinétique est $T = 1/2m\dot{q}^2$ et l'énergie potentielle à une constante près est $V = mgq$. Le moment conjugué est égal à $p = \partial L/\partial \dot{q} = \partial T/\partial \dot{q} = m\dot{q} \implies T = p^2/2m$. Le hamiltonien est $H = p^2/2m + mgq$. On relève que H ne dépend pas explicitement du temps donc H est une intégrale première. Soit $H = E = \text{Cte}$

On suit la démarche. Comme H est conservée alors on peut séparer le paramètre temps comme suit $S(q, t; P) = S_0(q; P) - Et$.

La deuxième étape consiste à substituer p par $\partial S(q, t; P)/\partial q$, ce qui donne

$$\begin{aligned} H(q, \frac{\partial S}{\partial q}) + \frac{\partial S}{\partial t} &= 0 \\ \implies \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial q} \right)^2 + mgq - E &= 0 \\ \implies \frac{\partial S_0}{\partial q} &= \pm\sqrt{2m} \sqrt{\left(\frac{E}{m} - gq \right)} \end{aligned}$$

$$\implies S_0 = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3g} m \left(\frac{E}{m} - gq \right)^{3/2}$$

La troisième étape consiste à associer P à une intégrale première. Comme $H = E$ est une constante, alors on peut prendre $P = E$ et calculer Q comme suit

$$Q = \frac{\partial S}{\partial E} = \pm \frac{\sqrt{2}}{g} \left(\frac{E}{m} - gq \right)^{1/2} - t$$

ainsi par inversion, on obtient

$$\begin{aligned} q &= -\frac{g}{2}(Q+t)^2 + \frac{E}{gm} \\ &= -\frac{1}{2}gt^2 - gQt - \frac{g}{2}Q^2 + \frac{E}{gm} \end{aligned}$$

sachant que Q est constante, par construction, et soit $q(t=0) = q_0$, alors

$$Q = \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\frac{E}{gm} - q_0 \right)^{1/2} \implies q = -\frac{1}{2}gt^2 - \left(\frac{E}{m} - gq_0 \right)^{1/2} t + q_0$$

Remarquons que l'on peut réécrire cette expression si $v(t=0) = v_0$, sachant que l'énergie mécanique est une intégrale première, nous avons

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgq_0 \implies v_0 = \left(\frac{E}{m} - gq_0 \right)^{1/2}$$

ce qui donne l'expression que l'on peut déduire directement à partir du PFD

$$q = -\frac{1}{2}gt^2 - v_0 t + q_0$$

Remarque : Notons que les équations **HJ** ne sont pas les plus simples et plus faciles à appliquer pour résoudre la dynamique d'un système. Si l'on connaît le lagrangien, les équations de Lagrange et celles de Hamilton sont généralement celles qui donnent les solutions les plus directes.

Toutefois l'intérêt des équations de **HJ** réside dans le fait qu'elles permettent d'introduire de manière naturelle et intuitive la physique moderne.

3.5 Le principe de Maupertuis

Le principe de Maupertuis permet de reexprimer l'action caractéristique de Hamilton dans une forme qui nous servira pour faire une analogie avec

l'optique géométrique, la mécanique ondulatoire et les équations de Schrödinger.

Considérons l'action hamiltonienne

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \mathcal{S}_0 - Et = \int_{t_1}^t \left(\sum_k p_k \dot{q}_k - H \right) dt \\ &= \sum_k \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} p_k dq_k - H(t - t_1)\end{aligned}$$

où $\vec{q}_1 = (q_1(t_1), q_2(t_1), \dots, q_n(t_1))$ et $\vec{q} = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$. Notons que nous avons utilisé le fait que H est une intégrale première. Comme $\mathcal{S}(q, t; P)$ est définie à une constante près, nous pouvons laisser tomber le terme constant Ht_1 et écrire

$$\mathcal{S}_0(q; P) = \sum_k \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} p_k dq_k$$

que l'on appelle couramment "action réduite".

Principe de Maupertuis

La trajectoire d'un système conservatif est déterminée par l'extrémisation de l'action réduite \mathcal{S}_0 .

Nous avons exprimé la loi de Maupertuis dans l'espace des configurations, espace décrit par les coordonnées généralisées $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$ et dont la norme est définie par $|\vec{q}|^2 = \sum_{ij} m_{ij} q_i q_j$. Ce qui donne pour un élément de distance dans cet espace $ds^2 = \sum_{ij} m_{ij} dq_i dq_j$ et

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{dt} \sqrt{\sum_{ij} m_{ij} dq_i dq_j} = \sqrt{\sum_{ij} m_{ij} \frac{dq_i}{dt} \frac{dq_j}{dt}} \\ &= \sqrt{2T} = \sqrt{2(E - V)} \end{aligned}$$

Reprenons l'expression de la loi de Maupertuis et éliminons les moments conjugués. Sachant que pour un système conservatif, $V = V(q)$ et que l'énergie cinétique, est une fonction homogène d'ordre 2 de \dot{q}_k , $T = 1/2 \sum_{i,j} m_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$ alors

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{ij} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} [\delta_{ik} \dot{q}_j + \dot{q}_i \delta_{jk}] \\ &= \sum_i m_{ki} \dot{q}_i \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_i \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} p_i dq_i &= \sum_{ij} \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} m_{ij} \dot{q}_j dq_i = \frac{1}{dt} \sum_{ij} \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} m_{ij} dq_j dq_i \\ &= \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} \frac{ds}{dt} ds \\ &= \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} \sqrt{2(E - V)} ds \end{aligned}$$

L'action réduite d'un système conservatif peut être exprimée en fonction des coordonnées généralisées comme

$$S_0(q; P) = \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} \sqrt{2(E - V(q))} ds$$

Prenons une particule libre se déplaçant sur un axe de coordonnée $q = x$, $V(x) = 0$, $P = E$ et $ds^2 = mdx^2 \implies ds = \sqrt{m}dx$; ce qui donne

$$S_0(x; E) = \int_{x_0}^x \sqrt{2Em} dx = \sqrt{2mE}(x - x_0)$$

que l'on peut vérifier

$$p = m\dot{x} = mv = \frac{dS_0(x; E)}{dx} = \sqrt{2mE}$$

ce qui est bien confirmé puisque pour une particule libre $E = p^2/2m$.

3.6 Vers la mécanique ondulatoire

Les équations **HJ** apportent une troisième approche, en plus des équations de Lagrange et celles de Hamilton, pour résoudre un problème de la dynamique. Toutefois, dans la plus part des cas, comme ça été mentionné auparavant, les deux autres approches que **HJ** sont plus aisées et directes à utiliser.

Néanmoins, les équations **HJ** permettent d'apporter une compréhension profonde de la mécanique ondulatoire et ont constitué une trame de fond à l'élaboration de la mécanique quantique et à la physique moderne.

3.6.1 Analogie avec la construction de Huygens

Avant d'aborder l'analogie avec la mécanique ondulatoire, et plus particulièrement comprendre la correspondance entre les propriétés mécaniques d'un système et ses propriétés ondulatoires, rappelons les principes de base de la construction de Huygens.

En effet, le comportement mécanique d'une onde lumineuse est décrit par ce que l'on appelle la surface d'onde qui correspond aux lieux de l'espace où la phase de l'onde est constante

$$\varphi(\vec{r}, t) = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \text{constante}$$

où $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$ est le vecteur d'onde sachant que λ est la longueur d'onde et \vec{n} la direction de propagation de l'onde qui est perpendiculaire à la surface d'onde; $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ est la pulsation ou la vitesse angulaire avec T et ν respectivement la période et la fréquence de l'onde.

Pour décrire les effets de la propagation de l'onde, il suffit de considérer la surface d'onde dont le front se déplace avec la vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{|k|\cos\alpha}$ où $\alpha = \widehat{(\vec{k}, \vec{n})}$.

Pour le cas d'une onde plane se propageant dans le vide dans la direction Oz , $\vec{n} = \vec{e}_z$ et $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{e}_z$ ce qui donne $v_\phi = c$. Dans le cas où l'onde se propage dans un milieu d'indice de réfraction n , $v = c/n$. Si l'indice de réfraction n'est pas constant, c'est à dire s'il dépend de la position de l'espace considérée, le front d'onde est déformé.

Considérons une particule de masse m soumise à un potentiel V et dont l'énergie mécanique est E , cette dernière étant conservée et donc le système est conservatif. Considérons pour la simplicité des notations que le système a un seul degré de liberté. Les résultats restent valables pour un système quelconque. L'état mécanique de la particule est décrit par son action $\mathcal{S}(q, t; P)$ qui s'exprime en fonction de l'action réduite, puisque le système est conservatif, par

$$\mathcal{S}(q, t; P) = \mathcal{S}_0(q; P) - Et.$$

Considérons les lieux de l'espace où l'action $\mathcal{S}(q, t; P)$ à l'instant t est constante; $\mathcal{S}(q, t; P) = \text{Cte}$. Ainsi $\mathcal{S}(q, t = 0; P) = \mathcal{S}_0(q, P)$. Cherchons $\mathcal{S}(q', t + dt; P)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(q', t + dt; P) &= \mathcal{S}_0(q'; P) - E(t + dt) \\ &= \mathcal{S}_0(q + dq; P) - Et - Edt \\ &= \mathcal{S}_0(q; P) + d\mathcal{S}_0 - Et - Edt \\ &= \mathcal{S}(q, t; P) + d\mathcal{S}_0 - Edt \end{aligned}$$

comme la surface considérée de l'action est constante et a la même valeur et $d\mathcal{S}_0 = \sqrt{2(E - V)}ds = \sqrt{2(E - V)}\sqrt{m}dq$, alors

$$\sqrt{2m(E - V)}dq - Edt = 0 \implies v_\phi = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V)}}$$

La surface d'action se propage dans l'espace des configurations avec la vitesse $v_\varphi = \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}}$
 L'action joue dans l'espace dual, l'espace des configurations, ce que joue la phase dans l'espace des positions,
 $S(q, t; P) \iff \varphi(\vec{r}, t).$

Notons que la vitesse de propagation de la particule,

$$v = \frac{p}{m} = \sqrt{\frac{2T}{m}} = \sqrt{\frac{2(E-V)}{m}} \neq v_\varphi$$

est donc différente de la vitesse de propagation de la surface d'action. De même, comme V dépend de la position, le front de la surface d'action se déforme, ce qui implique que l'espace des configuration est un espace non homogène. On peut établir alors la relation

$$v_\varphi \times v = \frac{E}{m}.$$

3.6.2 Quelle fréquence peut-on associer à la particule ?

Nous avons constaté une dualité entre la surface de l'action dans l'espace des configurations et la phase dans l'espace des positions

$$\varphi(\vec{r}, t) = (\vec{k} \cdot \vec{r} - 2\pi\nu t) = 2\pi \left(\frac{L(r)}{\lambda_0} - \nu t \right) \iff S(q, t; P) = S_0(q; P) - Et$$

où $L(r) = nr$ étant le chemin optique et n l'indice de réfraction du milieu, λ_0 est la longueur d'onde dans le vide.

En comparant terme à terme, on peut déduire :

— que l'énergie mécanique est proportionnelle à la fréquence

$$E = h\nu$$

et le coefficient de proportionnalité h est la constante de Planck. Partant de cette relation, on peut déduire la relation entre l'impulsion de la particule au vecteur d'onde comme suit

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{v_\varphi} \\ &= \frac{2\pi\nu m v}{E} = \frac{2\pi}{h} p \implies p = \hbar k \end{aligned}$$

— que $\mathcal{S}_0(q; P)$ représente pour l'espace des configurations ce que le chemin optique représente pour l'espace des positions et de ce fait on peut constater que le principe de Maupertuis pour la mécanique est le dual du principe de Fermat pour l'optique géométrique. En effet, nous avons vu que les trajectoires de la particule sont celles qui extrémisent l'action réduite \mathcal{S}_0 , et de la même manière, les chemins optiques des rayons lumineux sont ceux qui extrémisent le chemin optique, en l'occurrence le minimisent dans ce cas. Aussi

L'action réduite représente pour l'espace des configurations ce que le chemin optique représente pour l'espace des positions.

Ce qui nous amène à calculer "l'indice de réfraction" de l'espace des configurations.

3.6.3 Que peut-on dire de "l'indice de réfraction du milieu mécanique" ?

Après le parallèle établi entre le chemin optique et l'action réduite, nous pouvons établir l'expression de l'indice de réfraction du milieu mécanique en utilisant l'équation iconale¹ qui relie le chemin optique à l'indice de réfraction

$$(\nabla L)^2 = n^2.$$

A partir de cette équation et en utilisant la dualité définie auparavant, $L \iff \mathcal{S}_0$, il suffit alors d'établir le gradient de l'action réduite $\nabla \mathcal{S}_0$ et d'identifier le résultat à l'indice. En effet, on sait que $\nabla \mathcal{S}_0 = p$ et

$$\frac{1}{2m} (\nabla \mathcal{S}_0)^2 + V = H = E \implies (\nabla \mathcal{S}_0)^2 = 2m(E - V) \implies n = \sqrt{2m(E - V)}$$

Une fois l'expression de l'indice de réfraction du milieu mécanique établi, nous pouvons voir clairement la dualité entre le principe de Fermat et celui de Maupertuis

$$\delta \int n dl = \delta \int \sqrt{2m(E - V)} dl = \delta \int \sqrt{2(E - V)} \sqrt{m} dl = \delta \int \sqrt{2(E - V)} ds = \delta \mathcal{S}_0.$$

1. Lorsque le milieu est inhomogène et l'indice de réfraction dépend de la position, l'onde plane n'est plus solution de l'équation de propagation des ondes car le front d'onde se déforme. On cherche des solutions de la forme

$$\phi = \phi_0 e^{A(r)} e^{-ik_0(ct - L(r))}$$

où $A(r)$ est une fonction de la position qui fixe l'amplitude de l'onde. L'équation d'onde se ramène à

$$\nabla^2 A + (\nabla A)^2 + k_0^2 [n^2 - (\nabla L)^2] = 0.$$

L'approximation de l'optique géométrique consiste à ce que le troisième terme soit le dominant et donc $(\nabla L)^2 = n^2$, ce qui constitue l'approximation iconale.

On peut récapituler ainsi

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}, t) &\iff S(q, t; P) \\ L(r) &\iff S_0(q; P) \\ E = h\nu \quad \text{et} \quad p &= \hbar k \\ n &\iff \sqrt{2m(E - V)} \\ \text{Principe de Fermat} &\iff \text{Principe de Maupertuis.} \end{aligned}$$

3.6.4 Une description ondulatoire de la particule

En partant de l'équation de propagation des ondes électromagnétiques,

$$\left(\Delta - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = 0$$

déduite des équations de Maxwell, et stipulant l'universalité de cette équation, trouvons l'équation décrivant l'évolution de la particule si elle est décrite par une onde Ψ . En effet, sachant que la dépendance temporelle de ϕ est toujours de la forme $e^{-i\omega t}$, même dans le cas d'un espace inhomogène, l'équation précédente devient

$$\left(\Delta + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \right) \Phi = 0.$$

En utilisant les relations déduites de la dualité entre l'espace des configurations et l'espace des positions,

$$\frac{n^2 \omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{v_\phi^2} = \frac{4\pi^2 \nu^2 m^2 v^2}{E^2} = \frac{p^2}{\hbar^2}$$

nous avons utilisé les relations démontrées dans le paragraphe précédent $v_\phi = E/m$ et $E = h\nu$. Aussi, nous obtenons, en substituant Φ par Ψ

$$\left(\Delta + \frac{p^2}{\hbar^2} \right) \Psi = 0.$$

On peut déjà souligner qu'à partir de cette dernière relation, étant donné que l'équation est valable $\forall \Psi \implies p^2 = -\hbar^2 \Delta = -\hbar^2 \nabla^2 = (i\hbar \nabla)^2$ qui n'est d'autre que le principe de correspondance $\vec{p} \longrightarrow i\hbar \vec{\nabla}$.

Continuons notre quête de l'équation de Ψ . Or nous avons

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + V \implies p^2 = 2m(H - V)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \left[\Delta + \frac{1}{\hbar^2} (2m(H - V)) \right] \Psi &= 0 \\ \implies \left[\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + (H - V) \right] \Psi &= 0 \\ \implies H\Psi &= \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V \right) \Psi \end{aligned}$$

qui n'est d'autre que l'équation de Schrodinger. Si le système est conservatif alors, $H = E$ et l'équation devient

$$H\Psi = \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V \right) \Psi = E\Psi.$$

Table des matières

1	Formalisme de Lagrange	3
1.1	Introduction	3
1.2	Coordonnées généralisées	3
1.2.1	Contraintes et définitions	5
1.3	Equations de Lagrange	6
1.3.1	Principe de moindre action	6
1.3.2	Théorème de d'Alembert	7
1.3.3	Principe variationnel	8
1.3.4	Principe de la dynamique	11
1.3.5	Lagrangien d'une particule libre non relativiste	13
1.3.6	Système de particules interagissant par des forces conser- vatives	14
1.3.7	Système de particules interagissant par des forces dé- rivant d'un potentiel généralisé $V(q, \dot{q})$	15
1.3.8	Cas des forces dissipatives : fonction de Rayleigh	15
1.3.9	Cas de contraintes non holonomes : multiplicateurs de Lagrange	16
1.3.10	Lagrangien d'une particule libre relativiste	18
1.4	Quelques exemples	19
1.4.1	Pendule simple	19
1.4.2	Masse sur une tige rappelée avec un ressort	20
1.4.3	Exemple de calcul de contrainte	22
1.5	Symmétries et lois de conservation	23
1.5.1	Variable cyclique	23
1.5.2	Théorème de Noether	24
1.5.3	Invariance par rapport à la translation dans le temps	25
1.5.4	Invariance par rapport à la translation spatiale	27
1.5.5	Invariance par rapport à une rotation	28
1.6	Quelques exemples simples d'application du calcul variationnel	29

1.6.1	Plus petite distance dans un plan	29
1.6.2	La brachistochrone	30
2	Formalisme de Hamilton	31
2.1	Hamiltonien d'un système	31
2.2	Equations canoniques de Hamilton	32
2.3	Equations de Hamilton à partir du principe variationnel	34
2.4	Etude d'un pendule : Portrait de phase	34
2.4.1	Hamiltonien du système	34
2.4.2	Portrait de phase	35
2.4.3	Etude aux voisinages des points d'équilibre	36
2.4.4	Remarques	37
2.5	Théorie de Hamilton-Jacobi	38
2.5.1	Transformations canoniques et fonctions génératrices	38
2.5.2	Quelques exemples de transformation	41
2.6	Crochets de Poisson	43
2.6.1	Quelques propriétés	44
2.6.2	Crochets de Poisson et transformations canoniques	44
2.6.3	Symétries et crochets de Poisson	45
2.6.4	Invariants d'un système	46
2.7	L'espace de phases	47
2.7.1	Flot Hamiltonien	47
2.7.2	Incompressibilité du flot	48
2.7.3	Invariants intégraux de Poincaré	51
2.7.4	Théorème de Liouville	52
2.7.5	Système intégrables	52
3	Systèmes hamiltoniens	55
3.1	Introduction	55
3.2	L'équation de Hamilton-Jacobi	55
3.3	Fonction principale de Hamilton : Quel sens lui donner?	56
3.3.1	Principe variationnel	57
3.4	Méthode générale de résolution	59
3.4.1	Exemple 1 : Particule libre	60
3.4.2	Exemple 2 : chute libre 1D	61
3.5	Le principe de Maupertuis	62
3.6	Vers la mécanique ondulatoire	65
3.6.1	Analogie avec la construction de Huygens	65

3.6.2	Quelle fréquence peut-on associer à la particule ? . . .	67
3.6.3	Que peut-on dire de "l'indice de réfraction du milieu mécanique" ?	68
3.6.4	Une description ondulatoire de la particule	69

Table des figures

1.1	<i>Deux pendules liés astreints à se déplacer sur le même plan. Les angles θ_1 et θ_2 suffisent pour décrire le mouvement du système.</i>	4
1.2	<i>Trajectoires effective et variée. Les deux coïncident aux instants t_1 et t_2.</i>	9
1.3	<i>Pendule de longueur l et de masse m.</i>	19
1.4	<i>Masse M glissant sur une tige en rotation imposée et soumise à une force de rappel d'un ressort.</i>	21
1.5	<i>Cerceau de masse M roulant sans glisser sur un plan incliné d'un angle α.</i>	22
2.1	<i>Portrait de phase d'un pendule simple : en rouge le régime de libration, en vert celui de la circulation et en bleu la séparatrice entre les deux régimes.</i>	37