Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2015/2016
Le 13 Janvier 2016

Corrigé et barême du Contrôle de Mécanique Analytique et Vibrations
Filière SMP - S5
Temps imparti : 2H00

Questions de cours : 2 points

1. Les liaisons mises en jeu sont holonômes et le déplacement virtuel doit être compatible avec ces dernières ce qui implique qu'il a lieu sur la forme géométrique (Σ) définie par l'équation $f_i(\vec{r}_1+\delta\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N+\delta\vec{r}_N;t)=0$. En effet, nous avons dans ce cas $f_i(\vec{r}_1+\delta\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N+\delta\vec{r}_N;t)=0$ et $f_i(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N;t)=0$. Or, $\boxed{1.0\text{p}}$

$$\begin{aligned} f_i(\vec{r}_1+\delta\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N+\delta\vec{r}_N;t)-f_i(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N;t) &= \delta f_i(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N;t) \\ &= \sum_{i=j}^{N}\frac{\partial f_i}{\partial r_j}\delta r_j=\overrightarrow{\text{grad}}(f)\cdot\delta\vec{r} \end{aligned}$$

Comme $\delta f_i(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N;t)=0$ alors

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f)\cdot\delta\vec{r} \;=\; 0 \Longrightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(f)\perp\delta\vec{r}.$$

Comme $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$ est orthogonal à (Σ) définie par $f_i(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N;t)=0$, alors $\delta\vec{r}$ est tangent (Σ) au centre de la liaison.

$\boxed{0.5\text{p}}$

2. **1ère méthode** En effet

$$\frac{df}{dt} = \sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k\right)+\frac{\partial f}{\partial t}$$

Si l'on tient compte des équations de Hamilton, on obtient

$$\frac{df}{dt} = \sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}-\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)+\frac{\partial f}{\partial t}$$

ce qui donne, en notation de crochets de Poisson, comme il sera précisé plus tard,

$$\frac{df}{dt} = \{f,H\}+\frac{\partial f}{\partial t}$$

et on voit bien que si f est une intégrale première, $df/dt=0$, et qu'elle ne dépend pas explicitement du temps, on peut affirmer que $\{f,H\}=0$. $\boxed{0.5\text{p}}$

2ème méthode Nous avons ainsi

$$p_k = \frac{\partial G}{\partial q_k}=P_k+\epsilon\frac{\partial F}{\partial q_k} \quad \text{et} \quad Q_k=\frac{\partial G}{\partial P_k}=q_k+\epsilon\frac{\partial F}{\partial P_k} \quad \text{et} \quad H'=H$$

ce qui donne pour les accroissements

$$\delta p_k = P_k-p_k=-\epsilon\frac{\partial F}{\partial q_k} \quad \text{et} \quad \delta q_k=Q_k-q_k=\epsilon\frac{\partial F}{\partial P_k}\sim\epsilon\frac{\partial F}{\partial p_k}$$

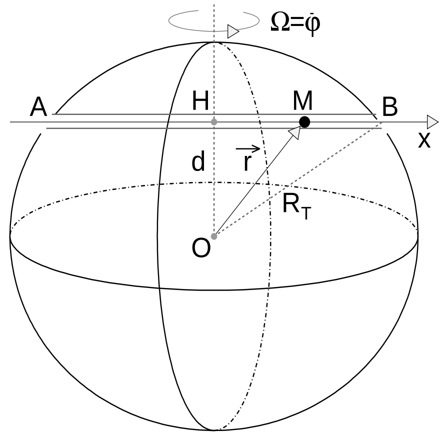
Rappelons que l'on cherche l'effet sur g, ainsi

$$\delta g = \sum_k\left(\frac{\partial g}{\partial q_k}\delta q_k+\frac{\partial g}{\partial p_k}\delta p_k\right)=\epsilon\sum_k\left(\frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{\partial F}{\partial p_k}-\frac{\partial g}{\partial p_k}\frac{\partial F}{\partial q_k}\right)=\epsilon\{g,F\}$$

Une grandeur g, définie sur l'espace des phases, est invariante par rapport à une symétrie, de générateur infinitésimal F, si
$\{g,F\}=0$. Et dans notre cas ici , $F=H$.

Corrigé de l'exercice I : 8 points

On considère un tunnel rectiligne souterrain reliant deux points A et B tels que (AB) ne passe pas par le centre de la Terre O, voir figure ci-contre. Un vehicule M assimilé à un point matériel de masse m glisse sans frottement dans le tunnel. Soit $\mathcal{R}_0(Ox_0y_0z_0)$, muni de la base cartésienne $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$, le répère géocentrique supposé galiléen, et $\mathcal{R}(Hxyz)$ le repère lié au tunnel tel que l'axe Hx est solidement lié au tunnel. Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \equiv \vec{k}_0\right)$ la base cartésienne liée à $\mathcal{R}$. $\mathcal{R}$ est animé d'un mouvement de rotation uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$ dont le vecteur rotation est $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k}_0 = \omega_0\vec{k}_0$. La position de M est repérée par $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = d\,\vec{k} + x\vec{i}$.



;

On considère que la forme de la Terre est sphérique et que sa masse volumique est constante. On note le rayon de la Terre par R_T, sa masse par M_t et la constante gravitationnelle par K_G.[1] g_0 est l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre. On choisit les cordonnées généralisées (x, φ).

1. M se déplace dans le plan Hxy donc le nombre de mouvements possibles est deux et comme nous avons la contrainte de l'uniformité de la rotation et donc le nombre de degré de liberté est égal à $3 - 2 = 1$ **0.5p**. 0.5p

2. Le vecteur position est $\overrightarrow{OM} = d\vec{k} + x\vec{i}$ ce qui donne pour la vitesse 1.0p
$$\begin{aligned}\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) &= \dot{x}\vec{i} + x\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{i} \\ &= \dot{x}\vec{i} + x\omega_0\vec{j}. \quad \textbf{0.5p}\end{aligned}$$
Ce qui donne pour l'énergie cinétique $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + x^2\omega_0^2\right)$ **0.5p**.

3. Calculons $\vec{F}$:

   a- M est soumis à l'attraction gravitationnelle de la masse de la sphère $\frac{4}{3}\pi r^3$. Comme la densité de la masse de la Terre est supposée constante alors sa masse volumique est $M_T/(\frac{4\pi R_T^3}{3})$ ce qui donne pour la masse de la sphère de rayon r l'expression $\frac{4\pi r^3}{3} \times M_T/(\frac{4\pi R_T^3}{3}) = M_T r^3/R_T^3$ **0.25p**. Aussi la force à laquelle est soumis le vehicule est 0.75p
$$\vec{F} = -\frac{K_G \times \frac{M_T r^3}{R_T^3} \times m}{r^3}\vec{r} = -\frac{K_G M_T}{R_T^2} \times m\frac{\vec{r}}{R_T} = -mg_0\frac{\vec{r}}{R_T}. \quad \textbf{0.5p}$$

   b- Le travail élémentaire de $\vec{F}$ est donné par 0.75p
$$\begin{aligned}\delta W &= \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} \\ &= -\frac{mg_0}{R_T}\vec{r} \cdot d\vec{r} = -\frac{mg_0}{R_T}\frac{1}{2}d(\vec{r} \cdot \vec{r}) \Longrightarrow V = \frac{mg_0}{2R_T}r^2 + K(=0) = mg_0\frac{x^2 + d^2}{2R_T}. \quad \textbf{0.75p}\end{aligned}$$

4. Le lagrangien de M est ainsi donné par 0.5p
$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + x^2\dot{\varphi}^2\right) - mg_0\frac{x^2 + d^2}{2R_T} \\ &= \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2 - \omega_g^2\left(x^2 + d^2\right)\right] \quad \textbf{0.5p}\end{aligned}$$

1. On rappelle que l'attraction gravitationnelle entre deux particules de masses m_1 et m_2 est donnée par $\|\vec{F}\| = \frac{K_G m M}{r^2}$ où $\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$. Si $m_2 = M_T$, l'attraction gravitationnelle à la surface de la Terre, donc $r = R_T$, est $\|\vec{F}\| = \frac{K_G M_T m_1}{R_T^2} = m_1 g_0$ où $g_0 = \frac{K_G M_T}{R_T^2}$.

avec $\omega_g^2 = g_0/R_T$.

5. Le moment conjugué p_x est donné par $\boxed{0.5\text{p}}$

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \\ \Longrightarrow \mathcal{H} &= \dot{x}p_x - \mathcal{L} = \frac{p_x^2}{2m} - \frac{1}{2}m\left[\omega_0^2 x^2 - \omega_g^2\left(x^2+d^2\right)\right]. \end{aligned}$$ **0.5p**

6. Les équations canoniques sont données par $\boxed{1.5\text{p}}$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = m\left(\omega_0^2 - \omega_g^2\right)x \end{aligned}$$

et en redérivant la première équation par rapport au temps, nous obtenons

$$\ddot{x} + \left(\omega_g^2 - \omega_0^2\right)x = 0.$$ **0.5p**

Le mouvement est périodique à condition que la solution de l'équation précédente le soit. Or cette dernière condition est satisfaite si $\omega_g^2 - \omega_0^2 > 0 \Longrightarrow \omega_g > \omega_0$ **0.5p** et la période du mouvement sera $T = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \omega_g^2}$ **0.5p**.

On supposera que cette condition est remplie pour la suite de l'exercice.

7. On se propose de retrouver cette période par la méthode des variables angle-action. $\boxed{1.0\text{p}}$

a- Comme $\mathcal{H}$ ne dépend pas explicitement du temps, celui-ci est une intégrale première et donc $\alpha = E$ **0.25p** et donc $W(x;\alpha,t) = W(x;t) - Et$ **0.25p**. Cherchons $W(x;t)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W(x;t)}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}m\left[\omega_0^2 x^2 - \omega_g^2\left(x^2+d^2\right)\right] &= E \\ \Longrightarrow W(x;t) &= \pm\int\sqrt{2mE - m^2\left[\left(\omega_g^2-\omega_0^2\right)x^2 + \omega_g^2 d^2\right]}dx. \end{aligned}$$

0.5p

b- Nous avons $\boxed{1.5\text{p}}$

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{2\pi}\oint\frac{\partial W(x;t)}{\partial x}dx \\ &= \frac{\pm}{2\pi}\oint\sqrt{2mE - m^2\left[\left(\omega_g^2-\omega_0^2\right)x^2 + \omega_g^2 d^2\right]}dx \end{aligned}$$ **0.5p**

les valeurs minimale et maximales de $x_\pm$ sont obtenues par

$$2mE - m^2\left[\left(\omega_g^2-\omega_0^2\right)x_\pm^2 + \omega_g^2 d^2\right] = 0$$

ce qui donne

$$\begin{cases} x_- = -\sqrt{\frac{\frac{2E}{m} - \omega_g^2 d^2}{\omega_g^2 - \omega_0^2}} \\ x_+ = +\sqrt{\frac{\frac{2E}{m} + \omega_g^2 d^2}{\omega_g^2 - \omega_0^2}} \end{cases}$$ **0.25p**

En explicitant les bornes d'intégration et en tenant compte du signe de l'impulsion, nous obtenons

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{\pi}\int_{x_-}^{x^+} \sqrt{2mE - m^2\left[\left(\omega_g^2-\omega_0^2\right)x^2+\omega_g^2 d^2\right]}dx \\ &= \frac{m}{\pi}\int_{x_-}^{x^+} \sqrt{\frac{2E}{m}-\omega_g^2 d^2-\left(\omega_g^2-\omega_0^2\right)x^2 dx} \quad \textbf{0.25p} \end{aligned}$$

En posant $a^2 = 2E/m - \omega_g^2 d^2$ et $b^2 = \omega_g^2 - \omega_0^2$, l'intégrale devient

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{m}{\pi}\int_{-a/b}^{+a/b}\sqrt{a^2-b^2x^2}dx = \frac{ma^2}{2b} \\ &= \frac{2E - m\omega_g^2 d^2}{2\sqrt{\omega_g^2-\omega_0^2}} \quad \textbf{0.25p} \end{aligned}$$

En inversant l'équation, nous obtenons

$$E = J_x\sqrt{\omega_g^2-\omega_0^2}+\frac{1}{2}\omega_g^2 d^2.$$

La fréquence du mouvement associée est

$$\frac{\partial E}{\partial J_x} = \sqrt{\omega_g^2-\omega_0^2}$$

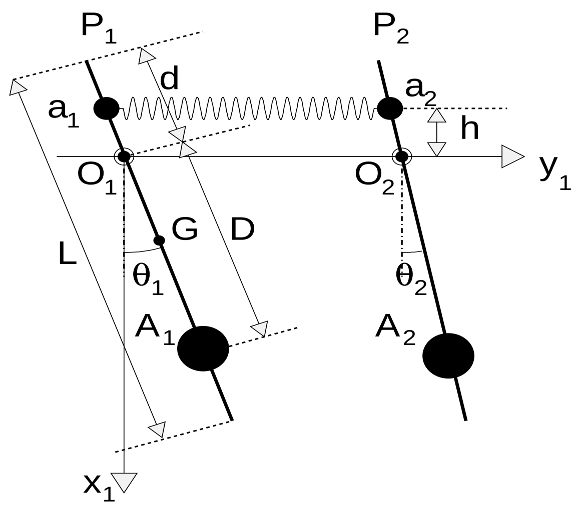
et la période est

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_g^2-\omega_0^2}} \quad \textbf{0.25p}$$

qui n'est d'autre que le résultat déjà trouvé.

Corrigé de l'exercice 2 : 12 points

Le dispositif mécanique que nous étudions, représenté sur la figure ci-contre, est constitué de deux pendules pesants identiques, notés $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, formés d'une tige métallique de longueur totale L, de rayon négligeable, de masse m_t. Deux masses, considérées ponctuelles, sont fixées sur la tige : m au point a_1 à la distance d de O_1 et M au point A_1 à la distance D de O_1. Les points a_1 et a_2 sont reliés par un ressort de constante de raideur k, de longueur au repos $l_0 = \|\overrightarrow{O_1O_2}\|$ et de masse négligeable. G est le centre de masse du pendule pesant. Les mouvements des pendules $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont repérés respectivement par les angles θ_1 et θ_2, comme indiqué sur la figure.



Le référentiel du laboratoire peut être considéré galiléen. On notera par (S) le système formé par les deux pendules $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ couplés par le ressort. Les liaisons aux points O_1 et O_2 sont parfaites et de type pivot d'axes respectifs O_1z_1 et O_2z_2.

1. Le système est formé par deux points matériels en rotation sur un plan donc deux degrés de liberté **0.5p**. $\boxed{0.5\text{p}}$

2. Les moments d'inertie par rapport à O_1 : $\boxed{1.5\text{p}}$

$$\begin{array}{ll} m & md^2 \\ M & MD^2 \\ \text{tige} & I_{tige} \end{array}$$

ce qui donne pour le moment d'inertie total du pendule pesant $I_{O1z} = md^2 + MD^2 + I_{tige}$ **0.5p**.
Comme le pendule pesant est en rotation autour de $O1z$ avec le vecteur rotation $\vec{\Omega} = \dot{\theta}_1 \vec{k}$ alors son énergie cinétique

$$T_1 = \frac{1}{2} I_{O1z} \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2}\left(md^2 + MD^2 + I_{tige}\right)\dot{\theta}_1^2. \quad \textbf{0.5p}$$

Comme les deux pendules sont identiques alors l'énergie cinétique de (S) est

$$T = T1 + T_2 = \frac{1}{2}\left(md^2 + MD^2 + I_{tige}\right)\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right). \quad \textbf{0.5p}$$

3. Soit H_1 et H_2 les projections respectivement de a_1 et de a_2 sur l'axe O_1y_1. L'énergie potentielle emmagasinnée par le ressort est $V_{elas} = \frac{1}{2}k\left(\overrightarrow{a_1a_2} - \overrightarrow{O_1O_2}\right)^2$. Comme $\theta_i \to 0; i = 1, 2$ alors les déplacaments sont colineaires avec Oy_i. Or $\overrightarrow{a_1a_2} = \overrightarrow{a_1H_1} + \overrightarrow{H_1O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2H_2} + \overrightarrow{H_2a_2}$ comme $\overrightarrow{a_1H_1} + \overrightarrow{H_2a_2} = \vec{0}$ alors $\overrightarrow{a_1a_2} - \overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{O_2H_2} - \overrightarrow{O_1H_1}$. Nous avons aussi $O_1H_1 = h\sin\theta_1 \simeq h\theta_1$ et $O_2H_2 = h\sin\theta_2 \simeq h\theta_2$, ce qui donne pour l'énergie potentielle $\boxed{1.0\text{p}}$

$$\begin{aligned} V_{elas} &= \frac{1}{2}k\left(O_2H_2 - O_1H_1\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}kh^2\left(\theta_2^2 - \theta_1\right)^2 \quad \textbf{1.0p} \end{aligned}$$

4. Posons $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{k})$ la base polaire attachée au point G dont la position est définie par $\boxed{2.0\text{p}}$

$$\begin{aligned} M_{tot}\overrightarrow{O_1G} &= M_{tot}|\overrightarrow{O_1G}|\vec{u} \\ \Longrightarrow M_{tot}\delta\overrightarrow{O_1G} &= M_{tot}|\overrightarrow{O_1G}|\delta\theta_1\vec{v} \end{aligned}$$

avec $M_{tot} = m + M + m_t$. L'énergie potentielle du poids de $\mathcal{P}_1$ est

$$\begin{aligned} dV_{p_1} &= -M_{tot}\vec{g}\cdot\delta\overrightarrow{O_1G} \\ &= M_{tot}|\overrightarrow{O_1G}|g\sin\theta_1\delta\theta_1 \\ \Longrightarrow V_{p1} &= M_{tot}|\overrightarrow{O_1G}|g\left(1 - \cos\theta_1\right). \end{aligned}$$

Comme $\theta_1 \to 0$ et en ne gardant que les termes en θ_1^2, alors $V_{p1} = M_{tot}|\overrightarrow{O_1G}|g\frac{\theta_1^2}{2}$ **1.0p**.
Comme les deux pendules sont identiques alors l'énergie potentielle de (S) est

$$V = V_{p1} + V_{p2} + V_{elas} = \frac{1}{2}M_{tot}|\overrightarrow{O_1G}|g\left(\theta_1^2 + \theta_2^2\right) + \frac{1}{2}kh^2(\theta_1 - \theta_2)^2 \quad \textbf{0.5p}$$

et le lagrangien prend l'expression

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T - V \\ &= \frac{1}{2}\left(md^2 + MD^2 + I_{tige}\right)\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) - \\ &\quad -\frac{1}{2}M_{tot}|\overrightarrow{O_1G}|g\left(\theta_1^2 + \theta_2^2\right) - \frac{1}{2}kh^2(\theta_1 - \theta_2)^2 \quad \textbf{0.5p} \end{aligned}$$

1.0p

5. Pour alléger les notations posons $\alpha = (md^2 + MD^2 + I_{tige})$, $\beta = M_{tot}|\overrightarrow{O_1G}|g$ et $\gamma = kh^2$. Les équations de Lagrange sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{\theta}_1} &= 0 \\ \Longrightarrow \alpha\theta_1 + \gamma(\theta_1 - \theta_2) + \beta\ddot{\theta}_1 &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} &= 0 \\ \Longrightarrow \alpha\theta_2 + \gamma(\theta_2 - \theta_1) + \beta\ddot{\theta}_2 &= 0. \end{aligned}$$

En regroupane les deux équations, nous obtenons

$$\begin{aligned} \beta\ddot{\theta}_1 + \alpha\theta_1 + \gamma\left(\theta_1 - \theta_2\right) &= 0 \\ \beta\ddot{\theta}_2 + \alpha\theta_2 - \gamma\left(\theta_1 - \theta_2\right) &= 0 \end{aligned}$$

que l'on peut mettre sous forme matricielle comme suit

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\ddot{\vec{\theta}} + \begin{pmatrix} \alpha+\gamma & -\gamma \\ -\gamma & \alpha+\gamma \end{pmatrix}\vec{\theta} = 0$$

ce qui donne A la matrice unité 2×2 et

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha+\gamma & -\gamma \\ -\gamma & \alpha+\gamma \end{pmatrix}.$$ **1.0p**

Comme nous nous sommes limités aux petites oscillations, nous obtenons un système linéaire et l'on peut utiliser le formalisme

6. On cherche des solutions harmoniques $\vec{\theta} = \Theta e^{i\omega t}$ où Θ est une matrice 2×1.

1.5p

a- En substituant dans l'équation matricielle précédente, nous obtenons

$$\left(-A\omega^2 + B\right)\Theta e^{i\omega t} = 0$$

comme $e^{i\omega t} \neq 0$, nous avons uns solution non tirviale si le déterminant

$$|-A\omega^2 + B| = 0$$ **0.25p**

et dont les solutions en ω sont les pulsations propres :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\beta\omega^2 + \alpha + \gamma & -\gamma \\ -\gamma & -\beta\omega^2 + \alpha + \gamma \end{vmatrix} &= 0 \\ \Longrightarrow \left(-\beta\omega^2 + \alpha + \gamma\right)^2 - \gamma^2 &= 0 \\ \Longrightarrow \omega_\pm^2 &= \frac{\alpha + \gamma \pm \gamma}{\beta}. \end{aligned}$$

ce qui donne pour les pulsations propres en remplaçant α, β et γ par leurs expressions

$$\omega_+^2 = \frac{(md^2 + MD^2 + I_{tige}) + 2kh^2}{M_{tot}|\overrightarrow{O_1G}|g}$$ **0.5p**

$$\omega_-^2 = \frac{(md^2 + MD^2 + I_{tige})}{M_{tot}|\overrightarrow{O_1G}|g}.$$ **0.5p**

Les équations vérifiées par $\Theta_\pm$ sont

$$\left(-A\omega_\pm^2 + B\right)\Theta_\pm = 0.$$ **0.25p**

b- La matrice P n'est d'autre que la matrice qui diagonalise B, ${}^TPBP = \mathbb{I}$ **0.25p** et normalisée par ${}^TPAP = \mathbb{I}$ **0.25p**. $\boxed{0.5\text{p}}$

c- En utilisant les résultats précédents, les valeurs propres de B sont $\alpha + \gamma \pm \gamma$.[2] Cherchons les vecteurs propres : $\boxed{4.0\text{p}}$

$$\begin{aligned} Bv_+ &= (\alpha+2\gamma)v_+ \Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha+\gamma & -\gamma \\ -\gamma & \alpha+\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} = (\alpha+2\gamma)\begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow x_+ &= -y_+ \Longrightarrow v_+ = x_+\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Bv_- &= \alpha v_- \Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha+\gamma & -\gamma \\ -\gamma & \alpha+\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_- \\ y_- \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_- \\ y_- \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow x_- &= y_- \Longrightarrow v_- = x_-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

x_+ et x_- seront fixés par la condition ${}^TPAP = \mathbb{I} \Longrightarrow \beta^TPP = \mathbb{I} \Longrightarrow x_+ = x_- = 1/\sqrt{2\beta}$. La matrice P est donc

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\beta}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{1.0p}$$

Nous avons $\vec{Q} = P^{-1}\vec{\theta}$. Calculons P^{-1} :

$$\begin{aligned} |P| &= \frac{1}{\beta} \neq 0 \\ \Longrightarrow P^{-1} &= \sqrt{\frac{\beta}{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{0.25p} \end{aligned}$$

ce qui donne ainsi

$$\vec{Q} = \sqrt{\frac{\beta}{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\beta}{2}}\begin{pmatrix} \theta_1 - \theta_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \end{pmatrix} \quad \textbf{0.5p}$$

et $\vec{Q}$ vérifie l'équation matricielle

$$\ddot{\vec{Q}} + \Omega^2\vec{Q} = 0 \quad \textbf{0.25p}$$

avec $\Omega^2 = \begin{pmatrix} \omega_+^2 & 0 \\ 0 & \omega_-^2 \end{pmatrix}$.

et les solutions générales sont

$$Q_1 = Q_{1A}e^{i\omega_+ t} + Q_{1B}e^{-i\omega_+ t} \quad \text{et} \quad Q_2 = Q_{2A}e^{i\omega_- t} + Q_{2B}e^{-i\omega_- t}. \quad \textbf{0.5p}$$

Les conditions initiales nous donnent $Q_1(0) = \sqrt{\beta/2}\theta_{01}$, $\dot{Q}_1(0) = 0$, $Q_2(0) = \sqrt{\beta/2}\theta_{01}$ et $\dot{Q}_2(0) = 0$ et permettent de déterminer les constantes d'intégration comme suit $Q_{1A} = Q_{1B} = Q_{2A} = Q_{2B} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{2}}\theta_{01}$ **0.25p** ce qui donne

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sqrt{\frac{\beta}{2}}\theta_{01}\cos\omega_+ t \quad \textbf{0.25p} \\ Q_2 &= \sqrt{\frac{\beta}{2}}\theta_{01}\cos\omega_- t \quad \textbf{0.25p} \end{aligned}$$

2. On les déduit de $\omega_\pm^2$.

$\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ s'obtiennent par $\vec{\theta} = P\vec{Q}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \begin{pmatrix} Q_1 + Q_2 \\ -Q1 + Q_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\theta_{01} \begin{pmatrix} \cos\omega_+ t + \cos\omega_- t \\ -\cos\omega_+ t + \cos\omega_- t \end{pmatrix} \\
&= \theta_{10} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t\right) \\ \sin\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

0.75p