Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2015/2016
Le 08 février 2016

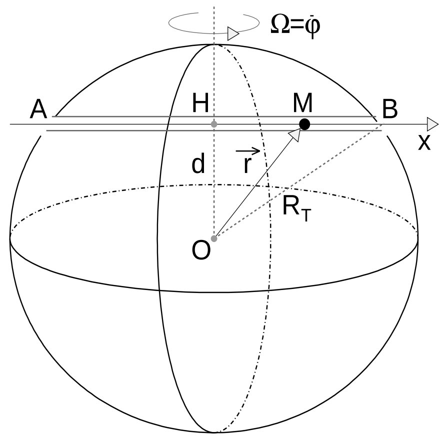
Contrôle de rattrapage de Mécanique Analytique et Vibrations
Filière SMP - S5
Temps imparti : 2H00

Questions de cours : (bonus)

1. Montrer que dans le cas d'une liaison holonôme, la direction de la force de liaison est perpendiculaire au déplacement.
2. Montrer de deux façons différentes que pour qu'une grandeur I soit une intégrale première, il suffit que $\{I, H\} = 0$.

Exercice 1 : Mouvement dans un tunnel

On considère un tunnel rectiligne souterrain reliant deux points A et B tels que (AB) ne passe pas par le centre de la Terre O, voir figure ci-contre. Un vehicule M assimilé à un point matériel de masse m glisse sans frottement dans le tunnel en étant soumis seulement à son poids. Soit $\mathcal{R}_0(Ox_0y_0z_0)$, muni de la base cartésienne $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$, le répère géocentrique supposé galiléen, et $\mathcal{R}(Hxyz)$ le repère lié au tunnel tel que l'axe Hx est solidement lié au tunnel. Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \equiv \vec{k}_0\right)$ la base cartésienne liée à $\mathcal{R}$. $\mathcal{R}$ est animé d'un mouvement de rotation uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$ dont le vecteur rotation est $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k}_0 = \omega_0\vec{k}_0$. Ce qui introduit la contrainte $\varphi = \omega_0 t$, en prenant la valeur à l'origine nulle. La position de M est repérée par $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = d\,\vec{k} + x\vec{i}$.



;

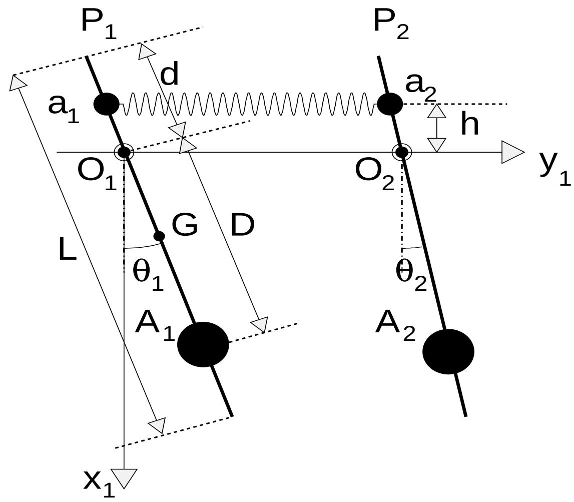
On considère que la forme de la Terre est sphérique et que sa masse volumique est constante. On note le rayon de la Terre par R_T, sa masse par M_T et la constante gravitationnelle par K_G.[1] g_0 est l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre. On pose $\omega_g^2 = \frac{g}{R_T}$.

1. Montrer que le nombre de degré de liberté est égal à 1. On prendra x pour la coordonnée généralisée.
2. Calculer la vitesse de M. En déduire son énergie cinétique T.
3. Le vehicule est soumis à la seule attraction gravitationnelle de la masse de la sphère de rayon r concentrée au point O. Montrer que l'expression de la force gravitationnelle sur M est donnée par $\vec{F} = -mg_0\frac{\vec{r}}{R_T}$ et déduire l'énergie potentielle V de M.
4. En déduire que le lagrangien de M est donné par $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + \omega_0^2x^2 - \omega_g^2\left(x^2 + d^2\right)\right]$.
5. Etablir l'expression du hamiltonien $\mathcal{H}(x, p_x)$, p_x étant le moment conjugué de x.
6. Etablir les équations canoniques du mouvement et dire dans quel cas le mouvement est périodique et déterminer la période du mouvement.
   On supposera que cette condition est remplie pour la suite de l'exercice.
7. On se propose de retrouver cette période par la méthode des variables angle-action.
   a- Résoudre l'équation caractéristique par la méthode de Hamilton-Jacobi et trouver la fonction caractéristique $W(x, ; \alpha, t)$, en précisant l'expression de α.
   b- Etablir l'expression de l'actions J_x[2]. En déduire la période du mouvement. Conclure.

1. On rappelle que l'attraction gravitationnelle d'une particule M_1 de masse m_1 sur une particule M_2 de masse m_2 est donnée par $\vec{F} = -\frac{K_G m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$ où $\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$. Si M_1 est la Terre, $m_1 = M_T$, l'attraction gravitationnelle à la surface de la Terre sur M_2 est $\vec{F} = -\frac{K_G M_T m_2}{R_T^2}\vec{e}_r = -m_2 g_0\vec{e}_r$ où $g_0 = \frac{K_G M_T}{R_T^2}$ et $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire de $\overrightarrow{M_1M_2}$.
2. On donne $\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{a}{b}}^{+\frac{a}{b}} \sqrt{a^2 - b^2x^2}\,dx = \frac{a^2}{2b}$

Exercice 2 : Pendules pesants couplés

Le dispositif mécanique que nous étudions, représenté sur la figure ci-contre, est constitué de deux pendules pesants identiques, notés $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, formés d'une tige métallique de longueur totale L, de rayon négligeable, de masse m_t. Deux masses, considérées ponctuelles, sont fixées sur la tige : m au point a_1 à la distance d de O_1 et M au point A_1 à la distance D de O_1. Les points a_1 et a_2 sont reliés par un ressort de constante de raideur k, de longueur au repos $l_0 = \|\overrightarrow{O_1O_2}\|$ et de masse négligeable. G est le centre de masse du pendule pesant. Les mouvements des pendules $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont repérés respectivement par les angles θ_1 et θ_2, comme indiqué sur la figure.



Le référentiel du laboratoire peut être considéré galiléen. On notera par (S) le système formé par les deux pendules $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ couplés par le ressort. Les liaisons aux points O_1 et O_2 sont parfaites et de type pivot d'axes respectifs O_1z_1 et O_2z_2.

1. Montrer que le nombre de degrés de liberté est égal à 2. On adopte pour la suite de l'exercice les coordonnées généralisées (θ_1, θ_2) que nous supposerons $\theta_1 \to 0$ et $\theta_2 \to 0$.
2. Calculer le moment d'inertie par rapport à O_1 I_{O_1z} de $\mathcal{P}_1$. En déduire son énergie cinétique T_1. En déduire l'expression de l'énergie cinétique de (S).
3. En partant du travail élémentaire de la force élastique du ressort, montrer que l'énergie potentielle de ce dernier est

$$V_{elas} \;=\; \frac{1}{2}kh^2\left(\theta_1 - \theta_2\right)^2.$$

4. Etablir l'expression de l'énergie potentielle V_{p1} du poids du pendule $\mathcal{P}_1$, en prenant comme référence l'énergie potentielle nulle à $\theta_1 = 0$. En déduire l'énergie potentielle totale de (S) et déduire l'expression du lagrangien $\mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ de (S).
5. On pose $\vec{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$. Etablir les équations de Lagrange, montrer que l'on peut les mettre sous la forme

$$A\ddot{\vec{\theta}} + B\vec{\theta} \;=\; \vec{0}$$

où A et B sont deux matrices 2×2 à déterminer. Commenter.

6. On cherche des solutions harmoniques $\vec{\theta} = \Theta e^{i\omega t}$ où Θ est une matrice 2×1.

   a- Determiner les pulsations des modes propres $\omega_\pm$ telles que $\vec{\theta}_\pm = \Theta_\pm e^{i\omega_\pm t}$. Préciser les équations vérifiées par $\Theta_\pm$.

   b- Notons par P la matrice de passage des coordonnées généralisées $\vec{\theta}$ aux coordonnées normales $\vec{Q}$, $\vec{\theta} = P\vec{Q}$. Rappeler comment l'on détermine P et quelle condition cette dernière doit remplir.

   c- Trouver les solutions générales $\vec{Q}$, sachant que les conditions initiales sont $\theta_1(0) = \theta_{01}$, $\dot{\theta}_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = 0$, $\dot{\theta}_2(0) = 0$. En déduire les solutions $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.