Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2015/2016
Le 13 Janvier 2016

Corrigé et barême du Contrôle de Mécanique Analytique et Vibrations
Filière SMP - S5
Temps imparti : 2H00

Corrigé des questions de cours (4pts) (voir cours

1. **2.0p**
2. **a-** **0.5p**

   b- **1.5p**

Corrigé I : Oscillations forcées[8points]

On considère un oscillateur harmmonique à une dimension dont le hamiltonien est donné par

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

(q,p) étant le couple coordonnée généralisée et son moment conjugué et ω la pulsation de l'oscillateur.

1. On procède à la transformation $q = Q/\sqrt{m\omega}$ et $p = P\sqrt{m\omega}$. 1.5p

   a-

$$\begin{aligned}\{Q,P\} &= \{\sqrt{m\omega}, \frac{p}{\sqrt{m\omega}}\} \\ &= \{q,p\} = 1 \quad \textbf{0.5p}\end{aligned}$$

   On en conclut que les nouvelles variables sont canoniques. **0.5p**

   b- En faisant la substitution

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\omega P^2 + \frac{1}{2}\omega X^2 = \frac{1}{2}\omega\left(X^2 + P^2\right). \quad \textbf{0.5p}$$

2. En inversant les relations, nous obtenons 0.5p

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^*) \quad \text{et} \quad P = \frac{-i}{\sqrt{2}}(a - a^*)$$

   ce qui donne pour le hamiltonien

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4}\omega\left[a^2 + a*^2 + 2aa^* - a^2 - a*^2 + 2aa^*\right] = \omega a * a. \quad \textbf{0.5p}$$

3. 1.0p

$$\begin{aligned}\{a, a*\} &= \frac{1}{2}\{Q + iP, Q - iP\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\{Q,Q\} - i\{Q,P\} + i\{P,Q\} + \{P,P\}\right) = -i \\ \{a,a\} = \{a*, a*\} &= 0 \quad \textbf{0.75p}\end{aligned}$$

   C'est la méthode utilisé pour la quantification d'un oscillateur harmonique. **0.25p**

4. On note que f ne dépend pas explicitement de t alors $\partial f/\partial t = 0$, alors $\boxed{1.0\text{p}}$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t} \quad \textbf{0.5p}$$

et en utilisant les équations canoniques et en utilisant la définition des crochets de Poisson, nous obtenons

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial Q}\frac{\mathcal{H}}{\partial P} - \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\mathcal{H}}{\partial Q} = \{f, \mathcal{H}\}. \quad \textbf{0.5p}$$

5. En utilisant le résultat précédent et comme la définition de a en fonction de (Q, P) ne comporte pas de terme explicite du temps, alors

$$\frac{da}{dt} = \{a, \mathcal{H}\} = \omega\{a, a * a\} = \omega\left(\{a, a*\}a + a * \{a, a\}\right) = -i\omega a \Longrightarrow \frac{da}{a} = -i\omega t \quad \textbf{0.75p}$$

qui est une équation différentielle de premier ordre sans second membre que l'on peut résoudre par séparation de variable. La solution génrale est $a = a_0 e^{-i\omega t}$ où a_0 est une constante. **0.25p**

Comme $\mathcal{H} = \omega a * a = \omega|a_0|^2$. **0.5p**

6. **a-** Exprimons le potentiel d'excitation en fonction de a et de $a*$, et nous obtenons

$$V_{exc} = b\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(a + a*)\right]\sin\Omega t \quad \textbf{0.25p}$$

ce qui donne pour le hamiltonien pour $t \in [0, T[$, $\mathcal{H} = \omega a * a + b\,(a + a*)\sin\Omega t$ **0.5p**.

b- L'équation d'évolution de a est

$$\dot{a} = \{a, \mathcal{H}\} = -i\omega a + b\sin\Omega t\{a, a*\} = -i\omega a - ib\sin\Omega t. \quad \textbf{0.5p}$$

c- La solution de l'équation différentielle précédente est la somme de la solution sans second membre a_{sm}, $\dot{a}_{sm} + i\omega a_{sm} = 0 \Longrightarrow a_{sm} = Ce^{i\omega t}$ et la solution particulière a_p. Nous utilisons la méthode de la variation de la constante pour déterminer cette dernière, $a_p = C(t)e^{-i\omega t}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\left(-i\omega C(t) + C'(t)\right)a_{sm} + i\omega C(t)a_{sm} &= -ib\sin\Omega t \\
\Longrightarrow C'(t) &= -ib\sin\Omega t e^{+i\omega t} \\
\Longrightarrow C'(t) &= -\frac{b}{2}\left(e^{i(\Omega+\omega)t} - e^{-i(\Omega-\omega)t}\right) \\
\Longrightarrow C(t) &= -\frac{b}{2i}\left(\frac{e^{i(\Omega+\omega)t} - 1}{\Omega + \omega} + \frac{e^{-i(\Omega-\omega)t} - 1}{\Omega - \omega}\right) \quad \textbf{0.25p}
\end{aligned}$$

d'où la solution générale

$$a(t) = \frac{-b}{2i}\left(\frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\omega t}}{\Omega + \omega} + \frac{e^{-i\Omega t} - e^{-i\omega t}}{\Omega - \omega}\right) + Ke^{-i\omega t} \quad \textbf{0.25p}$$

comme $E(t < 0) = 0$ et E est continue $\Longrightarrow E(t = 0) = 0 \Longrightarrow K = 0$, d'où la solution générale est

$$a(t) = \frac{-b}{2i}\left(\frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\omega t}}{\Omega + \omega} + \frac{e^{-i\Omega t} - e^{-i\omega t}}{\Omega - \omega}\right). \quad \textbf{0.25p}$$

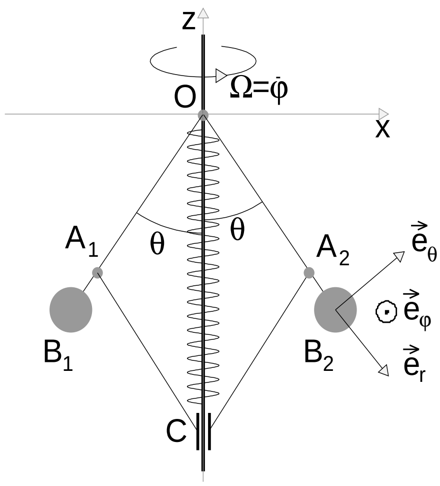
Pour $t > T$, le système est de nouveau libre et donc l'énergie mécanique est conservée et comme elle est continue au point $t = T$, or

$$\begin{aligned} E'(t=T) &= \omega a*(t=T)a(t=T) \\ &= \omega^2 b^2 |\frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\omega t}}{\Omega + \omega} + \frac{e^{-i\Omega t} - e^{-i\omega t}}{\Omega - \omega}|^2. \quad \textbf{0.5p} \end{aligned}$$

et qui est donc la même valeur pour $t > T$.

Exercice II : Régulateur de Watt

Le régulateur de Watt, dit aussi le régulateur centrifuge à boules, que l'on notera par la suite par le système (S), peut être représenté par le modèle simplifié de la figure ci-contre. Le dispositif mécanique est constitué de deux boules B_1 et B_2, considérées comme des points matériels, de masse M et reliées à un axe vertical par deux tiges de longueur $L = \|\overrightarrow{OB_1}\| = \|\overrightarrow{OB_2}\|$. Les tiges A_1C et A_2C, de longeur a, sont fixées sur les tiges précédentes à une distance a de O. Les liaisons en O, A_1 et A_2 sont parfaites et de type pivot. La liaison en C est également parfaite. Les points O et C sont reliés par un ressort de constante de raideur k, de longueur au repos nulle et de masse négligeable. Les tiges reliant les différents points sont de masse négligeable.



OA_1A_2C forme un losange qui reste constamment dans le plan Oxz. (S) peut tourner autour de l'axe (OC) avec la vitesse angulaire $\Omega = \dot{\varphi}$. Le point O est fixé à l'axe alors que le point C peut glisser sans frottement le long de Oz.
Soit $\mathcal{R}(O, xyz)$ le repère en mouvement de rotation par rapport à au repère du laboratoire $\mathcal{R}_0(O, x_0y_0z_0)$, supposé galiléen, avec $\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) = \dot{\varphi}\vec{k}$.
Il est conseillé d'utiliser la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, voir figure, pour les calculs demandés. Notez bien que les deux boules sont identiques et animées du même mouvement.

1. **0.5p** $\boxed{0.5\text{p}}$
2. Nous avons $\overrightarrow{OB_1} = L\vec{e}_r$, ce qui donne pour la vitesse de B_1 [1] $\boxed{1.5\text{p}}$

$$\begin{aligned} \vec{V}(B_1/\mathcal{R}_0) &= \frac{d}{dt}\overrightarrow{OB_1}\Big|_{\mathcal{R}_0} \\ &= \frac{d}{dt}\overrightarrow{OB_1}\Big|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{OB_1} \\ &= L\dot{\theta}\vec{e}_\theta + L\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi. \quad \textbf{0.5p} \end{aligned}$$

De la même manière, et par symétrie, on peut établir la vitesse de B_2 par rapport $\mathcal{R}_0$ par

$$\vec{V}(B_1/\mathcal{R}_0) = L\dot{\theta}\vec{e}_\theta + L\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi. \quad \textbf{0.5p}$$

Ce qui donne pour l'énergie cinétique de (S)

$$T = \frac{1}{2}M\left(V^2(B_1/\mathcal{R}_0) + V^2(B_2/\mathcal{R}_0)\right) = ML^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right). \quad \textbf{0.5p}$$

3. Les forces mises en jeu sont les poids des deux boules et la force élastique du ressort. Calculons $\boxed{1.5\text{p}}$

1. Tenir compte de tous les raisonnements corrects

le travail élémentaire du poids $\vec{P}_1$ de B_1 :

$$\begin{aligned}
\delta W(\vec{P}_1) &= \vec{P}_1 \cdot d\overrightarrow{OB_1} \\
&= -Mg\left(-\cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta\right)\cdot\left(Ld\theta\vec{e}_\theta + L\sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi\right) \\
&= -MgL\sin\theta d\theta \Longrightarrow V(P_1) = -MgL\cos\theta + K(=0). \quad \mathbf{0.25p}
\end{aligned}$$

De même pour le poids de la boule B_2 l'énergie potentielle est $V(P_2) = -MgL\cos\theta$ **0.25p**.
Quant à la force élastique,

$$\begin{aligned}
\delta W &= -k\overrightarrow{OC}\cdot d\overrightarrow{OC} \\
&= -\frac{1}{2}kd\|\overrightarrow{OC}\|^2 \Longrightarrow V(\text{ressort}) = \frac{1}{2}k\|\overrightarrow{OC}\|^2 + K(=0) = 2ka^2\cos^2\theta. \quad \mathbf{0.5p}
\end{aligned}$$

Ce qui donne pour l'énergie potentielle de (S) l'expression

$$V = -2MgL\cos\theta + 2ka^2\cos^2\theta. \quad \mathbf{0.25p}$$

Le lagrangien de (S) peut être exprimé ainsi comme suit

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= T - V \\
&= ML^2\left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\dot\varphi^2\right) + 2MgL\cos\theta - 2ka^2\cos^2\theta. \quad \mathbf{0.25p}
\end{aligned}$$

4. Comme φ est une variable cyclique, alors

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = 2mL^2\sin^2\theta\dot\varphi$$

est constante et qui n'est d'autre que le moment cinétique des boules autour de l'axe Oz **0.5p**.

Le lagrangien ne dépnd pas explicitement du temps donc l'énergie mécanique est conservée **0.5p**.

5. Les équations de Lagrange sont données par

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = 0 &\Longrightarrow \ddot\theta = \frac{1}{2}\sin2\theta\dot\varphi^2 - \frac{g}{L}\sin\theta + \frac{k}{M}\frac{a^2}{L^2}\sin2\theta \quad \mathbf{0.25p} \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = 0 &\Longrightarrow \dot\theta\dot\varphi\sin2\theta + \ddot\varphi\sin^2\theta = 0. \quad \mathbf{0.25p}
\end{aligned}$$

Si $\dot\varphi$ est constante alors $\ddot\varphi = 0$ alors en utilisant la deuxième équation, on obtient $\dot\theta\dot\varphi\sin^2\theta = 0$.

Comme $\dot\varphi \neq 0 \Longrightarrow \dot\theta = 0 \Longrightarrow \theta$ **0.5p** est constante.
Si $\dot\varphi = \omega_0$ et $\theta = \theta_0 \Longrightarrow \ddot\theta = 0$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
2\sin\theta_0\cos\theta_0\omega_0^2 - \frac{g}{L}\sin\theta_0 + 2\frac{ka^2}{ML^2}\sin\theta_0\cos\theta_0 &= 0 \\
\Longrightarrow \sin\theta_0\left(2\cos\theta_0\omega_0^2 - \frac{g}{L} + 2\frac{ka^2}{ML^2}\cos\theta_0\right) &= 0
\end{aligned}$$

comme $\sin\theta_0 \neq 0$ alors

$$\begin{aligned}
2\cos\theta_0\left(\omega_0^2 + \frac{ka^2}{ML^2}\right) &= \frac{g}{L} \\
\Longrightarrow \cos\theta_0 &= \frac{1}{2}\frac{MgL}{ML^2\omega_0^2 + ka^2} \quad \mathbf{1.0p}
\end{aligned}$$

6. On se place dans $\mathcal{R}$ qui n'est pas galiléen.

a- Etant donné que $\theta = \theta_0$ alors les vitesses de B_1 et de B_2 dans $\mathcal{R}$ sont nulles et donc les boules sont au repos dans $\mathcal{R}$ **0.5p**. Et comme (S) est au repos dans $\mathcal{R}$ donc son accélération est nulle et de même pour son accélération généralisée **0.5p**.

b- Comme $\mathcal{R}$ n'est pas galiléen, alors il faut tenir compte des forces d'inertie. De même, les vitesses des boules dans $\mathcal{R}$ sont nulles ce qui implique que les forces d'inertie de Coriolis sont nulles **0.25p**. L'accélération d'entrainement, identique pour les deux boules, est

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_e &= \Omega(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \left(\Omega(\mathcal{R}/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{OB_i}\right) \\
&= L\omega_0^2 \vec{k} \wedge \left(\vec{k} \wedge \vec{e}_r\right) \\
&= L\omega_0^2 \vec{k} \wedge (-\sin\theta \vec{e}_\varphi) \\
&= -L\omega_0^2 \sin\theta \left(-\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta\right) \wedge \vec{e}_\varphi \\
&= -L\omega_0^2 \sin\theta \left(\cos\theta \vec{e}_\theta + \sin\theta \vec{e}_r\right) \quad \mathbf{0.5p}
\end{aligned}$$

Ce qui donne pour la force d'inertie, sur chacune des boules,

$$\vec{F}_e = ML\omega_0^2 \sin\theta \left(\cos\theta \vec{e}_\theta + \sin\theta \vec{e}_r\right). \quad \mathbf{0.25p}$$

Alors la composante Q_θ est donnée par

$$\begin{aligned}
Q_\theta &= \vec{P}_1 \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OB_1}}{\partial \theta} + \vec{P}_2 \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OB_2}}{\partial \theta} - k\overrightarrow{OC} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OC}}{\partial \theta} + \vec{F}_e \cdot \left(\frac{\partial \overrightarrow{OB_1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \overrightarrow{OB_2}}{\partial \theta}\right) \\
&= -2MgL\vec{k} \cdot \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} + 2ML^2\omega_0^2 \sin\theta \left(\cos\theta \vec{e}_\theta + \sin\theta \vec{e}_r\right) \cdot \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} + 4ka^2 \cos\theta \sin\theta \\
&= -2MgL\sin\theta + 2ML^2\omega_0^2 \sin\theta\cos\theta + 4ka^2\cos\theta\sin\theta \quad \mathbf{2.0p}
\end{aligned}$$

c- Les liaisons doivent être holonomes **0.25p**. Cette condition étant remplie et comme (S) est au repos dans $\mathcal{R}$, ce qui implique que l'accélération généralisée A_θ selon θ est nulle et donc le principe de d'Alembert stipule dans ce cas

$$\begin{aligned}
Q_\theta &= A_\theta = 0 \quad \mathbf{0.25p} \\
\Longrightarrow -2MgL\sin\theta + 2ML^2\omega_0^2\sin\theta\cos\theta + 4ka^2\cos\theta\sin\theta &= 0 \\
\Longrightarrow \cos\theta &= \frac{MgL}{ML^2\omega_0^2 + 2ka^2} \quad \mathbf{1.0p}
\end{aligned}$$

qui n'est d'autre que le résultat déjà établi.