Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2014/2015
le 20 Janvier 2015

Corrigé et barème du Contrôle de Mécanique Analytique et Vibrations
Filière SMP - S5
Temps imparti : 2H00

Notez bien que toute bonne réponse formulée autre que le corrigé proposé doit être retenue.

Corrigé de l'exercice 1 : Transformations canoniques (5pts)

Soit la transformation de contact suivante

$$\begin{aligned} Q &= p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{2}} \\ P &= p^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

où $q > 0$ et $p > 0$. Soient $X(q,p)$ et $Y(q,p)$ deux grandeurs définies dans l'espace des phases.

$\boxed{\text{2p}}$

1. Tout d'abord, calculons

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} &= \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial}{\partial Q} + \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial}{\partial P} \\ &= \frac{3}{2}p^{1/2}q^{1/2}\frac{\partial}{\partial Q} - \frac{1}{2}p^{1/2}q^{-3/2}\frac{\partial}{\partial P} \quad \textbf{0.25p} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} &= \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial}{\partial Q} + \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial}{\partial P} \\ &= \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{3/2}\frac{\partial}{\partial Q} + \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{-1/2}\frac{\partial}{\partial P} \quad \textbf{0.25p} \end{aligned}$$

Aussi,

$$\begin{aligned} \{X,Y\}_{(q,p)} &= \frac{\partial X}{\partial q}\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial p}\frac{\partial Y}{\partial q} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial Q} + \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial P} + \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial Q} + \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial P} - \\ &\quad - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial Q} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial P} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial Q} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial P} \\ &= \frac{3}{4}q^2\frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial Q} + \frac{3}{4}\frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial P} - \frac{1}{4}\frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial Q} - \frac{1}{4}q^{-2}\frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial P} - \\ &\quad - \frac{3}{4}q^2\frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial Q} + \frac{1}{4}\frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial P} - \frac{3}{4}\frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial Q} + \frac{1}{4}q^{-2}\frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial P} \\ &= \frac{\partial X}{\partial Q}\frac{\partial Y}{\partial P} - \frac{\partial X}{\partial P}\frac{\partial Y}{\partial Q} = \{X,Y\}_{(Q,P)} \quad \textbf{1.5p} \end{aligned}$$

ce qui montre bien que la transformation est canonique puisqu'elle conserve les crochets de Poisson.

Une autre démonstration consiste à montrer que $\{Q, Q\} = 0$, $\{P, P\} = 0$ et $\{Q, P\} = 1$. A considérer juste aussi.

$\boxed{\text{2p}}$

2. Calculons l'expression de la matrice jacobienne M :

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}p^{1/2}q^{1/2} & \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{3/2} \\ -\frac{1}{2}p^{1/2}q^{-3/2} & \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{-1/2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{0.5p} \\ \Longrightarrow {}^tM &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}p^{1/2}q^{1/2} & -\frac{1}{2}p^{1/2}q^{-3/2} \\ \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{3/2} & \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{-1/2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{0.5p} \end{aligned}$$

Pour montrer que la transformation est canonique il suffit de montrer que M est symplectique. En effet,

$$\begin{aligned} {}^tMJM &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}p^{1/2}q^{1/2} & -\frac{1}{2}p^{1/2}q^{-3/2} \\ \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{3/2} & \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}p^{1/2}q^{1/2} & \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{3/2} \\ -\frac{1}{2}p^{1/2}q^{-3/2} & \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{-1/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}p^{1/2}q^{1/2} & -\frac{1}{2}p^{1/2}q^{-3/2} \\ \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{3/2} & \frac{1}{2}p^{-1/2}q^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}p^{1/2}q^{-3/2} & +\frac{1}{2}p^{-1/2}q^{-1/2} \\ -\frac{3}{2}p^{1/2}q^{1/2} & -\frac{1}{2}p^{-1/2}q^{3/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{0.75p} \end{aligned}$$

et donc ${}^tMJM = J \Longrightarrow M$ est symplectique et donc la transformation est canonique. **0.25p**

$\boxed{\text{1p}}$

3. Nous savons que

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = qP^2 \Longrightarrow F_2(q, P) = \frac{1}{2}q^2P^2 + f(P). \quad \mathbf{0.5p}$$

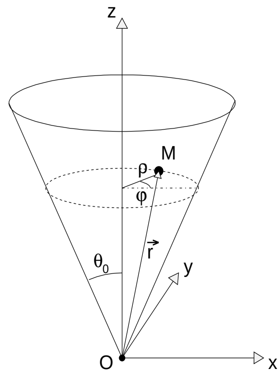
Or

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = Pq^2 + f'(P) \text{ et } Q = Pq^2 \Longrightarrow f'(P) = 0 \Longrightarrow f(P) = \text{Cst}=0. \quad \mathbf{0.5p}$$

ce qui donne $F_2(q, P) = \frac{1}{2}q^2P^2$.

Corrigé de l'exercice 2 : particule sur un cône (8pt)

Considérons une particule M de masse m qui se déplace sans frottement sous l'effet de son poids sur la surface intérieure d'un cône d'angle d'ouverture $2\theta_0$, voir figure ci-contre. Le repère $\mathcal{R}(Oxyz)$ est considéré galiléen. On se propose d'utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour retrouver les composantes de la réaction $\vec{R}$ de la surface du cône sur la particule. $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ étant respectivement les bases cylindrique et sphérique. Le vecteur position $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$.



0.5p

1. Comme $\mathcal{R}$ est galiléen, les forces appliquées à la particule M sont le poids $m\vec{g} = -mg\vec{k}$ et $\vec{R}$ la réaction de la surface interne du cône sur M. **0.25p**
   La position de M est repérée par $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ et z. Comme M est astreinte à se déplacer sur la surface interne du cône, nous avons une contraine et donc le nombre de degrés de liberté est $3 - 1 = 2$. **0.25p**

2.5p

2. $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k} \Longrightarrow \vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}$. D'où l'énergie cinétique est

$$T = \frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right). \quad \textbf{1.0p}$$

   Quant à l'énergie potentielle, elle est donnée par :

$$\begin{aligned} dV &= -m\vec{g}\cdot d\overrightarrow{OM} \\ &= mg\vec{k}\cdot\left(d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{k}\right) \\ &= mgdz \\ \Longrightarrow V &= mgz + K \quad \textbf{0.75p} \end{aligned}$$

   où K est une constante que l'on prendra égale à 0.

   Le lagrangien est ainsi donné par

$$\mathcal{L}(\rho, \varphi, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = T - V = \frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz. \quad \textbf{0.25p}$$

   Comme le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps alors l'énergie mécanique est conservée et donc celle-ci est une intégrale première. **0.25**
   De même, φ est cyclique, ce qui implique grâce au théorème de Noether que $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi} = m\rho\dot{\varphi}^2$ est conservée. **0.25p**

0.5p

3. M doit rester en contact avec la surface interne du cône, ce qui implique que $\rho/z = \text{tg}\theta_0 \Longrightarrow z = \rho\text{cotg}\theta_0$. La contrainte est donc donnée par $f(\rho, \varphi, z) = z - \rho\text{cotg}\theta_0 = 0$. C'est une contrainte qui ne relie que les coordonnées donc hôlonome, et comme elle ne dépend pas du temps elle est scléronome. **0.5p**

2.5p

4. Les équations de Lagrange en présence du multiplicateur de lagrange λ sont données par

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\rho}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho} &= \lambda\frac{\partial f}{\partial\rho}\Longrightarrow m\ddot\rho-m\rho\dot\varphi^2=-\lambda\mathrm{cotg}\theta_0 \quad \mathbf{0.25p}\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} &= \lambda\frac{\partial f}{\partial\varphi}\Longrightarrow m\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot\varphi^2\right)=0 \quad \mathbf{0.25p}\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot z}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} &= \lambda\frac{\partial f}{\partial z}\Longrightarrow m\ddot z+mg=\lambda. \quad \mathbf{0.25p}
\end{aligned}$$

Comme $z-\rho\mathrm{cotg}\theta_0=0\Longrightarrow\ddot z=\ddot\rho\mathrm{cotg}\theta_0$ et $L_z=m\rho^2\dot\varphi$ qui est constant comme démontrée à la question précédente, nous obtenons le système d'équations

$$\begin{aligned}
m\ddot\rho+\lambda\mathrm{cotg}\theta_0 &= \frac{L_z^2}{m\rho^3}\\
m\ddot\rho\mathrm{cotg}\theta_0-\lambda &= -mg
\end{aligned}$$

en substituant $m\ddot\rho=\frac{L_z^2}{m\rho^3}-\lambda\mathrm{cotg}\theta_0$ dans la deuxième équation, nous obtenons

$$\lambda(\mathrm{cotg}^2\theta_0+1)=mg+\frac{L_z^2}{m\rho^3}\mathrm{cotg}\theta_0\Longrightarrow\lambda=\sin\theta_0\left(mg\sin\theta_0+\frac{L_z^2}{m\rho^3}\cos\theta_0\right) \quad \mathbf{0.5p}$$

Les équations différentielles de chacune des coordonnées sont

$$\begin{aligned}
m\ddot\rho-\frac{L_z}{m\rho^3}+\cos\theta_0\left(mg\sin\theta_0+\frac{L_z}{m\rho^3}\cos\theta_0\right) &= 0\\
\Longrightarrow\ddot\rho-\frac{L_z}{m^2\rho^3}\sin^2\theta_0+\frac{1}{2}\sin2\theta_0 &= 0 \quad \mathbf{0.5p}
\end{aligned}$$

et

$$\frac{d}{dt}\left(m\rho^2\dot\varphi^2\right) = \frac{d}{dt}\left(L_z\dot\varphi\right)=L_z\ddot\varphi=0\Longrightarrow\ddot\varphi=0 \quad \mathbf{0.25p}$$

et

$$\begin{aligned}
\ddot z+g-\sin\theta_0\left(g\sin\theta_0+\frac{L_z^2}{m^2\rho^3}\cos\theta_0\right) &= 0\\
\ddot z+g\cos^2\theta_0-\frac{L_z^2}{2m^2\rho^3}\sin2\theta_0 &= 0\\
\ddot z+g\cos^2\theta_0-\frac{L_z^2}{2m^2z^3}\mathrm{cotg}^3\theta_0\sin2\theta_0 &= 0\\
\ddot z-\frac{L_z^2}{m^2}\frac{\cos^4\theta_0}{\sin^2\theta_0}\frac{1}{z^3}+g\cos^2\theta_0 &= 0. \quad \mathbf{0.5p}
\end{aligned}$$

0.75p

5. Les composantes généralisées de la force de liaison sont données par

$$\begin{aligned}
Q_\rho &= \lambda\frac{\partial f}{\partial\rho}=-\lambda\mathrm{cotg}\theta_0=-\cos\theta_0\left(mg\sin\theta_0+\frac{L_z^2}{m\rho^3}\cos\theta_0\right) \quad \mathbf{0.25p}\\
Q_\varphi &= \lambda\frac{\partial f}{\partial\varphi}=0 \quad \mathbf{0.25p}\\
Q_z &= \lambda\frac{\partial f}{\partial z}=\lambda=\sin\theta_0\left(mg\sin\theta_0+\frac{L_z^2}{m\rho^3}\cos\theta_0\right). \quad \mathbf{0.25p}
\end{aligned}$$

0.75p

6. Nous savons que la force de liaison associée à la contrainte est $\vec{R} = R_\rho \vec{e}_\rho + R_\varphi \vec{e}_\varphi + R_z \vec{k}$ avec

$$
\begin{aligned}
Q_\rho &= \vec{R}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \vec{R}\cdot\vec{e}_\rho = R_\rho = -\mathrm{cos}\theta_0\left(mg\mathrm{sin}\theta_0 + \frac{L_z^2}{m\rho^3}\mathrm{cos}\theta_0\right) \quad \mathbf{0.25p}\\
Q_\varphi &= \vec{R}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \vec{R}\cdot\rho\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\varphi} = \rho\vec{R}\cdot\vec{e}_\varphi = \rho R_\varphi = 0 \Longrightarrow R_\varphi = 0 \quad \mathbf{0.25p}\\
Q_z &= \vec{R}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = \vec{R}\cdot\vec{k} = R_z = \mathrm{sin}\theta_0\left(mg\mathrm{sin}\theta_0 + \frac{L_z^2}{m\rho^3}\mathrm{cos}\theta_0\right) \quad \mathbf{0.25p}
\end{aligned}
$$

nous en déduisons que les composantes généralisées ne sont d'autres que les composantes de $\vec{R}$ dans la base cylindrique. Ainsi nous pouvons écrire

$$\vec{R} = -\left(mg\mathrm{sin}\theta_0 + \frac{L_z^2}{m\rho^3}\mathrm{cos}\theta_0\right)\left(\mathrm{cos}\theta_0\vec{e}_\rho - \mathrm{sin}\theta_0\vec{k}\right).$$

7. Comme $\vec{e}_r$ est tangent à la surface interne du cône et comme $\vec{e}_\theta$ est dirigé vers l'extérieur du cône, alors $\vec{n} = -\vec{e}_\theta$.
Comme $\vec{e}_\theta = \mathrm{cos}\theta_0\vec{e}_\rho - \mathrm{sin}\theta_0\vec{k}$, alors

0.5p

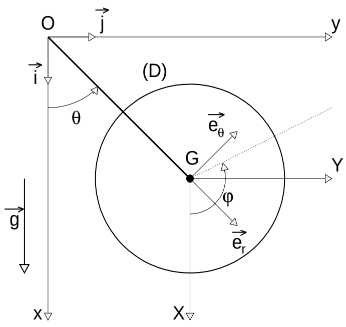
$\vec{n} = -\mathrm{cos}\theta_0\vec{e}_\rho + \mathrm{sin}\theta_0\vec{k}$ **0.25p** Ainsi

$$
\begin{aligned}
\vec{R} &= -\left(mg\mathrm{sin}\theta_0 + \frac{L_z^2}{m\rho^3}\mathrm{cos}\theta_0\right)\left(\mathrm{cos}\theta_0\vec{e}_\rho - \mathrm{sin}\theta_0\vec{k}\right)\\
&= \left(mg\mathrm{sin}\theta_0 + \frac{L_z^2}{m\rho^3}\mathrm{cos}\theta_0\right)\vec{n}. \quad \mathbf{0.25p}
\end{aligned}
$$

ce qui montre bien que $\vec{R}//\vec{n}$. D'ailleurs c'est le résultat attendu étant donné que les forces de frottement sont nulles.

Corrigé de l'exercice 3 (7pt)

Un disque (D) de masse M et de rayon R se déplace dans le plan Oxy d'un repère $\mathcal{R}(O, xyz)$ supposé galiléen. Le centre du disque G est attaché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur $L = \|\overrightarrow{OG}\|$, voir figure ci-contre. La position de G est repérée par l'angle θ telle que $\overrightarrow{OG} = L\vec{e}_r$. La vitesse angulaire de rotation du disque autour de son axe GZ est $\dot{\varphi}$. On admet que Le fil est tendu au cour du mouvement. L'accélération de la pésanteur est $\vec{g} = g\vec{i}$. On note par $I = \frac{1}{2}MR^2$ le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe GZ.



0.5p

1. Le mouvement de (D) est décrit par le mouvement du centre de masse dont les coordonnées sont $x_G = L\mathrm{cos}\theta$ et $y_G = L\mathrm{sin}\theta$ et sa rotation est décrite par l'angle φ. On en déduit que le couple de variables (θ, φ) suffit pour le décrire. D'où le nombre de degrés de liberté est 2. **0.5p**

1.0p

2. L'expression de l'énergie cinétique T du disque (D) est donnée par le théorème de Koenig :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}MV_G^2 + \frac{1}{2}{}^t\Omega I \Omega^2 \\ &= \frac{1}{2}MV_G^2 + \frac{1}{2}I_{GZ}\dot{\varphi}^2 \quad \textbf{0.25p} \end{aligned}$$

où V_G est la vitesse du centre de masse G et $I_{GZ} = \frac{1}{2}MR^2$ est le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe GZ et $\vec{\Omega}(D/\mathcal{R})$ est le vecteur rotation du disque par rapport à $\mathcal{R}$.
Le vecteur position $\overrightarrow{OG} = L\vec{e}_r \Longrightarrow \vec{V}_G = L\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Longrightarrow V_G^2 = L^2\dot{\theta}^2$. Nous avons ainsi

$$T = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}M\left(L^2\dot{\theta}^2 + \frac{R^2}{2}\dot{\varphi}^2\right). \quad \textbf{0.75p}$$

1.0p

3. Calculons le travail de $M\vec{g}$ sachant que $d\overrightarrow{OG} = Ld\theta\vec{e}_\theta$:

$$\delta W(M\vec{g}) = M\vec{g}\cdot Ld\theta\vec{e}_\theta = MLgd\theta\vec{i}\cdot\vec{e}_\theta = -MLg\sin\theta d\theta$$

Comme

$$dV = -\delta W = MLg\sin\theta d\theta \Longrightarrow V = -MLg\cos\theta + K$$

et $V(\theta=0) = 0 \Longrightarrow K = Mgl \Longrightarrow V(\theta) = Mgl\,(1-\cos\theta) = V_0\,(1-\cos\theta)\,.$ **0.75p**

Pour démontrer que $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable, il suffit de démontrer que $V'(\theta=0) = 0$ et $V''(\theta=0) > 0$. Or $V'(\theta) = V_0\sin\theta \Longrightarrow V'(0) = 0$. De même $V''(\theta) = V_0\cos\theta \Longrightarrow V''(\theta=0) = V_0 > 0$ et donc $\theta = 0$ est bien une position d'équilibre stable. **0.25p**

4. On considère les petites oscillations autour de $\theta = 0$.

0.5p

i- Le développement limité de $V(\theta)$ atour de $\theta = 0$ à l'ordre 2 est

$$V(\theta) = V(0) + V'(0)\theta + V''(0)\frac{\theta^2}{2} = V_0\frac{\theta^2}{2}. \quad \textbf{0.5p}$$

1.25p

ii- Le lagrangien est ainsi donné par

$$\mathcal{L}(\theta,\varphi,\dot{\theta},\dot{\varphi}) = T - V = \frac{1}{2}M\left(L^2\dot{\theta}^2 + \frac{R^2}{2}\dot{\varphi}^2\right) - V_0\frac{\theta^2}{2}. \quad \textbf{0.25p}$$

Les équations de Lagrange s'expriment comme suit

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} &= -\left(V_0\theta - ML^2\ddot{\theta}\right)\dot{\theta} = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{V_0}{ML^2}\theta = 0 \quad \textbf{0.25p} \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} &= -\frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = 0 \Longrightarrow \ddot{\varphi} = 0 \Longrightarrow \dot{\varphi} = \text{Cste} \quad \textbf{0.25p} \end{aligned}$$

Sachant que $\frac{V_0}{ML^2} = \frac{MgL}{ML^2} = \frac{g}{L} = \omega_0^2$ nous avons

$$\theta(t) \quad = \quad A\cos(\omega_0 t - \gamma)$$

et en utilisant les conditions initiales nous obtenons

$$\theta_0 = A\cos\gamma \quad \text{et} \quad \dot{\theta}(t=0) = 0 = -A\omega_0\sin\gamma \Longrightarrow \gamma = 0 \quad \text{et} \quad A = \theta_0$$

et la solution est $\theta = \theta_0\cos\omega_0 t$ **0.25p**
Quant à $\varphi(t)$, nous avons $\dot{\varphi}$ =Cste= $\dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0 \Longrightarrow \varphi(t) = \dot{\varphi}_0 t$ sachant que $\varphi(t=0) = 0$. **0.25p**

0.75p

5. Nous reprenons l'expression complète de $V(\theta) = V_0(1 - \cos\theta)$. Le lagrangien est égal à

$$\mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) \quad = \quad T - V = \frac{1}{2}M\left(L^2\dot{\theta}^2 + \frac{R^2}{2}\dot{\varphi}^2\right) - V_0(1 - \cos\theta)$$

ce qui donne pour les moments conjugués

$$p_\theta \quad = \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = ML^2\dot{\theta} \quad \mathbf{0.25p} \quad \text{et} \quad p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi} \quad \mathbf{0.25p}$$

et pour le hamiltonien

$$\mathcal{H}(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) \quad = \quad \frac{p_\theta^2}{2ML^2} + \frac{p_\varphi^2}{MR^2} + V_0(1 - \cos\theta). \quad \mathbf{0.25p}$$

0.75

6. La première intégrale première est l'énergie mécanique car le hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps. **0.25p**
La deuxième intégrale première est p_φ car φ est une variable cyclique et que $\dot{p}_\varphi = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi} = 0 \Longrightarrow p_\varphi$ =Cste. **0.25p**
Calculons l'expression du moment cinétique de (D) par rapport àG dans R_G :

$$\vec{\sigma}_G(D/\mathcal{R}_G) \quad = \quad I\Omega = \frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}\vec{k}.$$

On en conclue que p_φ n'est d'autre que le moment cinétique de (D) par rapport àGZ et que ce dernier est une intégrale première. où I est la matrice d'inertie diagonale de (D) **0.25**

1.25p

7. L'équation de Hamilton-Jacobi est donnée par

$$\mathcal{H}(\theta, \varphi, \frac{\partial S(\theta, \varphi; \alpha_\theta, \alpha_\varphi, t)}{\partial\theta}, \frac{\partial S(\theta, \varphi; \alpha_\theta, \alpha_\varphi, t)}{\partial\varphi}) + \frac{\partial S(\theta, \varphi; \alpha_\theta, \alpha_\varphi, t)}{\partial t} \quad = \quad 0$$

En posant $S(\theta, \varphi; \alpha_\theta, \alpha_\varphi, t) = W_\theta(\theta; \alpha_\theta, \alpha_\varphi) + W_\varphi(\varphi; \alpha_\theta, \alpha_\varphi) - Et$, l'équation de Hamilton-Jacobi devient

$$\mathcal{H}(\theta, \varphi, \frac{\partial W_\theta(\theta; \alpha_\theta, \alpha_\varphi)}{\partial\theta}, \frac{\partial W_\varphi(\varphi; \alpha_\theta, \alpha_\varphi)}{\partial\varphi}) \quad = \quad E$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2ML^2}\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial\theta}\right)^2 + V_0(1 - \cos\theta) + \frac{1}{MR^2}\left(\frac{\partial W_\varphi}{\partial\varphi}\right)^2 = E \quad \mathbf{0.25p}$$

Comme nous avons deux intégrales premières et deux constantes d'intégrations α_θ et α_φ, on prend $\alpha_\varphi = p_\varphi$ et $\alpha_\theta = E$. Les équations précédentes deviennent

$$\begin{aligned} \frac{1}{2ML^2}\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + V_0\left(1-\cos\theta\right) + \frac{p_\varphi^2}{MR^2} &= E \quad \textbf{0.25p} \\ \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} &= p_\varphi \quad \textbf{0.25p} \end{aligned}$$

Les solutions sous formes intégrales sont alors

$$\begin{aligned} W_\theta(\theta; E, p_\varphi) &= \pm\int\sqrt{2ML^2\left(E - V_0\left(1-\cos\theta\right) - \frac{p_\varphi^2}{MR^2}\right)}d\theta \quad \textbf{0.25p} \\ W_\varphi(\varphi; E, p_\varphi) &= \pm\int p_\varphi d\varphi. \quad \textbf{0.25p} \end{aligned}$$

Questions bonus (2pt) :

On se place à nouveau dans le cas des petites oscillations autour de $\theta = 0$.

$\boxed{0.25\text{p}}$

8. Reexprimons W_θ et W_φ avec $p_\varphi = 0$

$$\begin{aligned} W_\theta(\theta; E, p_\varphi) &= \pm\int\sqrt{2ML^2\left(E - V_0\frac{\theta^2}{2}\right)}d\theta \\ &= \pm\sqrt{b}\int\sqrt{1 - a\frac{\theta^2}{2}}d\theta \\ W_\varphi(\varphi; E, p_\varphi) &= \pm\int p_\varphi d\varphi = 0. \quad \textbf{0.25p} \end{aligned}$$

avec $a = V_0/E$ et $b = 2ML^2E$.

$\boxed{0.25\text{p}}$

9. Trouvons les bornes de variations de θ en prenant $\mathcal{H}(\theta_b, \varphi_b, p_\theta = 0, p_\varphi = 0) = V_0\frac{\theta^2}{2} = E$, ce qui implique que

$$\theta_{b_\pm} = \pm\sqrt{\frac{2E}{V_0}}. \quad \textbf{0.25p}$$

$\boxed{1.0\text{p}}$

10. Calculons l'action J_θ

$$\begin{aligned} J_\theta &= \frac{1}{2\pi}\oint\frac{\partial W_\theta}{\partial\theta}d\theta \\ &= \frac{\sqrt{b}}{2\pi}\left[+\int_{\theta_{b_-}}^{\theta_{b_+}}\sqrt{1 - a\frac{\theta^2}{2}}\,d\theta - \int_{\theta_{b_+}}^{\theta_{b_-}}\sqrt{1 - a\frac{\theta^2}{2}}\,d\theta\right] \\ &= \frac{\sqrt{b}}{\pi}\int_{\theta_{b_-}}^{\theta_{b_+}}\sqrt{1 - a\frac{\theta^2}{2}}\,d\theta \\ &= \frac{2\sqrt{b}}{\pi}\int_0^{\theta_{b_+}}\sqrt{1 - a\frac{\theta^2}{2}}\,d\theta \quad \textbf{0.5p} \end{aligned}$$

On pose $\sin x = \sqrt{\frac{a}{2}}\theta \Longrightarrow \cos x dx = \sqrt{\frac{a}{2}}d\theta$, avec $\sin x_+ = \sqrt{\frac{a}{2}}\theta_{b_+} = \sqrt{\frac{V_0}{2E}}\sqrt{\frac{2E}{V_0}} = 1 \Longrightarrow x_+ = \pi/2$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
J_\theta &= \frac{2\sqrt{b}}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 x}\sqrt{\frac{2}{a}}\cos x\, dx \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\frac{b}{a}}\int_0^{\pi/2}\cos^2 x dx \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\frac{b}{a}}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right) dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\frac{b}{a}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right) \\
&= \sqrt{\frac{ML^2}{V_0}}E \quad \mathbf{0.5p}
\end{aligned}$$

Veuillez bien noter cette deuxième approche considérée aussi juste :

On utilise les invariants de Poincarré qui permettent d'écrire que

$$\oint_C pdq = \int\int_S dpdq$$

la double intégrale étant faite sur la surface délimitée par le chemin fermé (C). En effet, la surface délimitée par (C) est l'éllipse dont les demi-axes sont donnés par θ_{b+} et $p_{\theta_{b_+}}$ qui est la valeur maximame que peut prendre p_θ et qui n'est d'autre que celle correspondant au cas où l'énergie mécanique est complètement sous forme d'énergie cinétique et donc $V = 0$, ce qui donne $p_{\theta_{b_+}} = \sqrt{2ML^2E}$. Or la surface d'une éllipse de demi-axes a et b est πab, ce qui donne en utilisant ce résultat

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi}\int_S dp_\theta d\theta = \frac{1}{2\pi}\pi \times \sqrt{\frac{2E}{V_0}} \times \sqrt{2ML^2E} = E\sqrt{\frac{ML^2}{V_0}}.$$

$\boxed{0.5\text{p}}$

11. Inversons la relation précédente

$$E = \sqrt{\frac{V_0}{ML^2}}J_\theta \Longrightarrow \omega_\theta = \sqrt{\frac{V_0}{ML^2}} = \frac{g}{L} = \omega_0. \quad \mathbf{0.5p}$$

On voit bien que l'on obtient le même résultat que précédemment.