Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2016/2017
Lundi 16 janvier 2017

Contrôle de Mécanique Analytique et Vibrations
Filière SMP-S5
Temps imparti 2H00

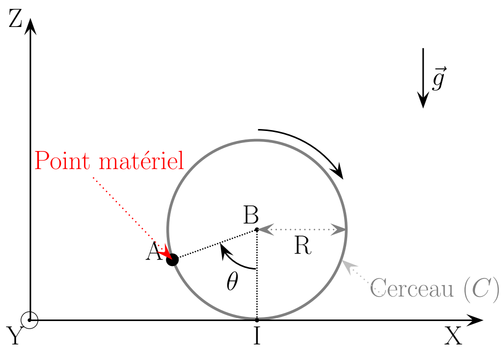
Exercice 1 : Transformations canoniques

1. La nouvelle coordonnée est donnée par $Q = q^2 + f(q)$, où f est une fonction dérivable quelconque. Trouver $P(p, q)$ pour que cette transformation soit canonique.
Indication : utiliser les crochets de Poisson.

2. Une transformation canonique pour un système à un seul degré de liberté est décrite par la fonction génératrice de type $F_4(p, P)$ d'expression $F_4(p, P) = P^2 \cosh(p)$.
Trouver la fonction génératrice de type $F_3(p, Q)$ qui décrit la même transformation.
Indication : Exprimer les dérivées partielles de F_3 en fonction de p et de Q et intégrer. On rappelle que $q = -\frac{\partial F_4}{\partial p}, Q = \frac{\partial F_4}{\partial P}$ et $q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}, P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}$.

Exercice 2 : Cerceau lesté

Soit un cerceau (C) homogène de centre B, de rayon R et de masse M. Un point matériel A de masse m est solidement fixé sur le périmètre de (C). Considérons le système (Σ) formé par (C) et (A). (Σ) roule sans glisser sur l'axe (Ox) d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}(O, XYZ)$ et reste sur le plan (OXZ) ; l'axe (OZ) étant orienté ascendant, voir figure ci-contre. $\mathcal{R}$ est muni de la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note par $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BA}}\right)$. La position du centre B est repérée par $\overrightarrow{OB} = x\vec{i} + R\vec{k}$ avec $x = \|\overrightarrow{OI}\|$.



On pose $J = MR^2$, le moment d'inertie de (C) en B par rapport à l'axe qui passe par B et parallèle à (OY). Le vecteur rotation de (C) par rapport à $\mathcal{R}$ est $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{j}$.

1. Déterminer les paramètres de configuration du système et la condition de roulement sans glissement. En déduire que la liaison correspondante est semi-holonome.

2. On considère que cette liaison (roulement sans glissement) est supplémentaire et l'on se propose d'utiliser la méthode des multiplicateurs de lagrange.

   a. Etablir l'expression de l'énergie cinétique $T[\Sigma]$ du système (Σ) dans $\mathcal{R}$ et son énergie potentielle $V[\Sigma]$. En déduire que le lagrangien du système est $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M + m)\left(\dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2\right) - mR\left(\dot{x}\dot{\theta} - g\right)\cos\theta$.

   b. Etablir les équations de lagrange en utilisant la méthode des multiplicateurs de lagrange. En déduire l'équation différentielle vérifiée par θ(*Consommer* la liaison et éliminer le multiplicateur de lagrange).

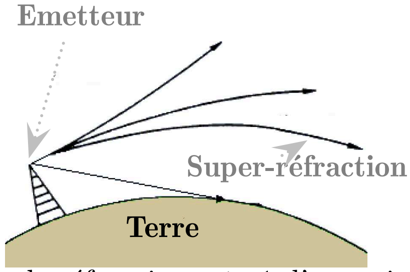
3. On considère dans ce cas la liaison (roulement sans glissement) comme primaire et on utilise comme coordonnée généralisée la variable θ. On prend également $M = m$ pour la suite de cette exercice.

   a. Réexprimer l'expression du lagrangien dans ce cas et déduire l'équation du mouvement en θ. Comparer avec l'équation obtenue en 2.b.

   b. Trouver les positions d'équilibre de (Σ) et étudier leur stabilité.

   c. Réexprimer l'équation du mouvement de (Σ) pour des petites oscillations autour de sa position d'équilibre stable. En déduire l'expression de la pulsation des petites oscillations.

Exercice 3 : Calcul variationnel



On s'intéresse à la réfraction des ondes radio dans l'atmosphère et l'effet de l'indice de réfraction sur leur propagation. En effet, la réfraction courbe la trajectoire des ondes radio et lorsque celle-ci devient circulaire, la portée des émetteurs s'allonge et l'on parle dans ce cas de super-réfraction.

Considérons la propagation d'un rayon lumineux dans un milieu d'indice de réfraction $n \geq 1$ d'un point A à un point B, la trajectoire étant dans le plan (Oxy). Soit τ_{AB} la durée de propagation. On utilise les coordonnées polaires (r, ϕ) et on suppose que $n = n(r)$. L'objectif est d'évaluer le gradient de l'indice de réfraction dn/dr et de le comparer à la valeur expérimentale qui est $(dn/dr)_{moy} = -0.39 \times 10^{-4}\text{km}^{-1}$.

1. Exprimer l'élément de déplacement dl en coordonnées polaires. Etablir l'expression du temps dt pour parcourir une distance dl en fonction de n. En déduire que le temps de propagation est $\tau_{AB} = \int_A^B \mathcal{L}(r, r')d\phi$ avec $r' = dr/d\phi$; $\mathcal{L}(r, r'; \phi)$ joue le rôle du lagrangien et ϕ celui du temps.
2. Etablir l'expression du moment conjugué p_r et déduire l'expression du « hamiltonien » $\mathcal{H}(r, p_r)$.
3. En déduire l'existence d'une intégrale première que l'on notera E. Donner son expression et déduire que
$$r' = \pm\sqrt{\frac{n^2r^2}{c^2E^2} - 1}.$$
4. Dans quelle condition la trajectoire est circulaire ?
5. Etablir l'expression suivante $$r'' = \frac{d^2r}{d\phi^2} \simeq f(r, E, n, \frac{dn}{dr}).$$
Indication : dériver r' par rapport à ϕ et remplacer dans le résultat r' par son expression calculée à la question précédente.
6. En déduire que dans le cas où $\frac{n^2r^2}{c^2E^2} \to 1$, nous avons $r'' \simeq r\left(1 + \frac{r}{n}\frac{dr}{dn}\right)$. En déduire l'expression de dn/dr dans le cas de la super-refraction en considérant que le rayon de la trajectoire circulaire est R_T, rayon de la terre.
A.N. : Calculer dn/dr. On donne $R_T = 6370$km et $n \simeq= 1$. Comparer à la valeur moyenne mesurée -0.39$\times 10^{-4}$km^{-1}.

Exercice 4 : Potentiel exponentiel

On considère une particule de masse m se déplaçant selon un axe et soumise à un potentiel sous la forme $V(q) = V_0 e^{\frac{q}{q_0}}$, V_0 et q_0 sont des constantes positives.

1. Etablir l'expression du hamiltonien $H(q, p)$. En déduire que l'énergie mécanique est une intégrale première.
2. Ecrire l'équation de Hamilton-Jacobi. En utilisant la méthode de séparation des variables, déduire l'équation intégrale de la fonction principale de Hamilton $S(q; \alpha, t)$.[1]
3. Montrer que
$$Q = \mp\sqrt{\frac{m}{2E}}\, q_0 \textbf{atanh}\left(\sqrt{\frac{E - V_0 e^{\frac{q}{q_0}}}{E}}\right) - t$$
4. En déduire l'expression de $q(t)$.

On donne $\int \frac{dx}{x\sqrt{a-x}} = -\frac{2}{\sqrt{a}}$atanh$\left(\sqrt{\frac{a-x}{a}}\right)$; atanh(x)=$\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ et tanh(x)=$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (tangente hyperbolique).

Exercice Bonus : symétries et quantités conservées

Considérer une particule se déplaçant dans le plan (x, y)[2]. (x, y) sont les coordonnées généralisées et (p_x, p_y) leurs moments conjugués. Définir pour chacun des cas suivants un potentiel $V(x, y, t)$ en donnant un exemple et en justifiant par les symétries mises en jeu :

a. L'impulsion p_x est conservée alors que p_y ne l'est pas. L'énergie mécanique est conservée.

b. Le moment cinétique est conservé mais l'énergie mécanique ne l'est pas.

c. L'impulsion selon $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ est conservée. Le moment cinétique est-il conservé ? Justifier.

---

1. Indication : $\alpha = E = P$, E étant l'énergie mécanique.
2. Le plan est muni de la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$.