MÉCANIQUE ANALYTIQUE & VIBRATIONS

Formalisme de Hamilton

Mohamed EL KACIMI

Université Cadi Ayyad - Faculté des Sciences Semlalia
Département de Physique

Année Universitaire 2017/2018

Chapitre II : Formalisme de Hamilton

Chapitre II : Formalisme de Hamilton

Hamiltonien d'un système

Introduction

L'approche utilisée dans le formalisme de Hamilton consiste à décrire un système ayant d degrés de liberté par les coordonnées généralisées q_k et leurs moment conjugués p_k au lieu des vitesses généralisées $\dot{q}_k$.

Aussi, la description du système ne se fait plus dans l'espace des configurations mais plutôt dans un espace abstrait à $2d$ dimensions appelé l'espace des phases.

$\Longrightarrow$ il est nécessaire de définir une nouvelle fonctionnelle qui décrit la dynamique du système et qui obeillit à de nouvelles équations : Les équations canoniques de Hamilton.

Hamiltonien d'un système

Construction de l'hamiltonien

Dans le formalisme du lagrangien, un système ayant n degrés de liberté :
$\rightarrow$ le système est décrit par $L(q_k, \dot{q}_k, t) = T - V$: n équations différentielles du 2^{nd} ordre. L'état du système dépend des conditions initiales $q_k(0)$ et $\dot{q}_k(0)$.

Le formalisme de Hamilton : le système est décrit à l'aide des variables (q_k, p_k) $\rightarrow$ Cherchons une fonction $g(q_k, p_k, t)$ remplissant cette tâche, q_k et p_k sont indépendantes.

La construction de la fonctionnelle de Hamilton peut se faire de plusieurs manières : nous présenterons 2 approches

$\longrightarrow$ Méthode directe ;

$\longrightarrow$ Tranformation de Legendre ;

Hamiltonien d'un système

Approche directe

Il suffit de chercher une fonction $h(q_k, \dot{q}_k, p_k, t)$ comme suit

$$g(q_k, p_k, t) = L(q_k, \dot{q}_k, t) + h(q_k, \dot{q}_k, p_k, t)$$

$\Longrightarrow$ **Déterminer l'expression de $h(q_k, \dot{q}_k, p_k, t)$.**

$$\begin{aligned}
dg &= \sum_k \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial g}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial g}{\partial t} dt \\
&= \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt + \\
&\quad + \sum_k \left(\frac{\partial h}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial h}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k + \frac{\partial h}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial h}{\partial t} dt \\
&= \sum_k \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial h}{\partial q_k} \right) dq_k + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial h}{\partial \dot{q}_k} \right) d\dot{q}_k + \frac{\partial h}{\partial p_k} dp_k \right] + \\
&\quad + \left(\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) dt
\end{aligned}$$

Hamiltonien d'un système

Approche directe

En identifiant terme à terme les deux membres de l'égalité précédente on obtient

$$\begin{gathered}\frac{\partial g}{\partial q_k}=\frac{\partial L}{\partial q_k}+\frac{\partial h}{\partial q_k}\\ \frac{\partial g}{\partial p_k}=\frac{\partial h}{\partial p_k}\\ \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}+\frac{\partial h}{\partial \dot q_k}=0\\ \frac{\partial g}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial t}\end{gathered}$$

On déduit $\frac{\partial h}{\partial \dot q_k}=-p_k$ et $\mathbf{h(q_k,\dot q_k,p_k,t)=-\sum_k \dot q_k\, p_k+f_1(q_k,p_k,t)}$.

en prenant une solution triviale pour $f_1(q_k,p_k,t)=0$**,**

$$\begin{gathered}\frac{\partial g}{\partial p_k}=-\dot q_k\\ \Longrightarrow g=-\sum_k \dot q_k p_k+f_2(q_k,t)\end{gathered}$$

et

$$\begin{gathered}\frac{\partial g}{\partial q_k}=\frac{\partial f_2}{\partial q_k}=\frac{\partial L}{\partial q_k}+\frac{\partial h}{\partial q_k}\\ \Longrightarrow f_2=L \ \textbf{et}\\ g=-\sum_k \dot q_k p_k+L\end{gathered}$$

Pour décrire l'état du système avec une fonction $g(q_k,p_k,t)$, l'hamiltonien s'y prète bien.

Hamiltonien d'un système

Transformation de Legendre

Réecrire les d équations du second ordre de Lagrange $\longrightarrow$ $2d$ équations de premier ordre étant données que celles-ci doivent être exprimées en fonction de p_k et de q_k.

A partir de

$$\begin{cases} \dot{p}_k &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \\ p_k &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \end{cases}$$

il suffit de trouver une fonctionnelle $g(q_k, p_k; t)$ telle que $\dot{q}_k = \frac{\partial g}{\partial p_k}$.

$\Longleftarrow$ Tranformation de Legendre

On cherche à transformer $\dot{q}$ en p tel que $\dot{q} = \frac{\partial g}{\partial p}$: illustrer avec une variable :

$$\boxed{L(q,\dot{q}) \Longleftrightarrow f(x),\ \dot{q} \Longleftrightarrow x,\ p \Longleftrightarrow z}$$

et on cherche

$$\boxed{\begin{array}{c} H(q,p) \Longleftrightarrow F(z) \equiv g(q,p) \text{ telle que} \\ \dot{q} = \partial H/\partial p \Longleftrightarrow x = dF/dz \end{array}}$$

Hamiltonien d'un système

Transformation de Legendre : Cas d'une seule variable

Nous avons

$$\begin{aligned} f'(g(z)) &= z \\ \Longrightarrow f'(g(z))g'(z) &= zg'(z). \end{aligned}$$

En partant de l'équation précédente et intégrant les deux membres, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\left[f(g(z))\right] &= \frac{d}{dz}\left[zg(z)\right] - g(z) \\ \Longrightarrow \frac{d}{dz}\left[zg(z) - f(g(z))\right] &= g(z) = \frac{dF}{dz} \\ \Longrightarrow F(z) &= zg(z) - f\left(g(z)\right) \end{aligned}$$

Hamiltonien d'un système

Transformation de Legendre : Cas d'une seule variable

Définition

La transformée de Legendre $F(z)$ de la fonction $f(x)$ est définie par

$$F(z) = zg(z) - f(g(z)) \text{ avec } g = f'^{-1}.$$

Une condition pour que f'^{-1} existe est que $d^2f/dx^2 \neq 0$.

Exemple

Soit $f(x) = m\frac{x^2}{2}$ alors $f'(x) = mx = z \Longrightarrow x = g(z) = \frac{z}{m}$. Aussi, la transformée de Legendre $F(z)$ est donnée par

$$F(z) = zg(z) - f(g(z)) = \frac{z^2}{m} - \frac{m}{2}\left(\frac{z}{m}\right)^2 = \frac{1}{2m}z^2.$$

Hamiltonien d'un système

Transformation de Legendre : Cas de plusieurs variables

Dans le cas d'une fonction à plusieurs variables, $f(x_1, \cdots, x_m; y_1, \cdots, y_n)$. On pose dans ce cas

$$z_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_m; y_1, \cdots, y_n) = \partial_i f(x_1, \cdots, x_m; y_1, \cdots, y_n)$$

et on les inverse comme suit $x_i = g_i(z_1, \cdots, z_m; y_1, \cdots, y_n)$ à condition que le déterminant $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right| \neq 0$. La transformée de Legendre dans ce cas est donnée par

$$F(z_1, \cdots, z_m; y_1, \cdots, y_n) = \sum_{k=1}^{m} x_k z_k - f.$$

Vérifions que $F(z_1, \cdots, z_m; y_1, \cdots, y_n)$ satisfait bien les propriétés attendues. Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial z_i} &= x_i + \sum_{k=1}^{m} z_k \frac{\partial g_k}{\partial z_i} - \sum_{k=1}^{m} \partial_k f(g_1(z_1, \cdots), g_2(z_1, \cdots), \cdots) \frac{\partial g_k}{\partial z_i} \\ &= x_i.\end{aligned}$$

Alors la tranformée de Legendre du Lagrangien par rapport à $\dot{q}_k$ est alors

$$H(q_k, p_k; t) = \sum_{k=1}^{d} p_k \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k; t)$$

Hamiltonien d'un système

Définition

La fonctionnnelle de Hamilton est définie par

$$H(q_k, p_k, t) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$$

appelée le hamiltonien du système.

Remarque :

le potentiel ne dépend pas des vitesses et l'énergie cinétique ne dépend que de du carré de la vitesse, alors

$$H(q_k, p_k; t) = \sum_{k=1}^{d} p_k \dot{q}_k - L(\dot{q}_k, \dot{p}_k; t) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L(\dot{q}_k, \dot{p}_k; t)$$

Or , en utilisant le théorème d'Euler (Voir le polycopié du cours) on obtient

$$H(q_k, p_k; t) = 2T - L = T + V$$

Chapitre II : Formalisme de Hamilton

Equations canoniques de Hamilton

Définition

Définition

Les équations canoniques de Hamilton sont définies par

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \text{et} \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

- La dynamique du système est régie maintenant par $2n$ équations différentielles de premier ordre
- $\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \Longrightarrow$ L'énergie mécanique est conservée si H ne dépend pas explicitement de t.

Démarche à suivre :

- Calculer T, V et déduire L ;
- Calculer les p_k ;
- Calculer $H = \sum_k \dot{q} p_k - L$;
- Résoudre les $2n$;

Equations canoniques de Hamilton

A partir du principe variationnel

A partir du principe de moindre action, nous avons

$$S = \int L dt = \int (p_k \dot{q}_k - H) \, dt$$

On prend le cas d'un système à 1 degré de liberté, l'accroissement de l'action dû au chemin varié est

$$\begin{aligned}
\delta S &= \delta \int (p_k \dot{q}_k - H) \, dt \\
&= \int \left(\dot{q}_k \delta p_k + p_k \frac{d}{dt} \delta q_k - \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k \right) dt \\
&= \int \left[\left(\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \delta p_k - \left(\dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \delta q_k \right] dt + \left[p_k \delta q_k \right]_1^2
\end{aligned}$$

comme $\delta q_k(1) = \delta q_k(2)$; p_k et q_k sont indépendantes et arbitraires, alors δS est nulle si

$$\begin{cases} \dot{q}_k - \dfrac{\partial H}{\partial p_k} = 0 & \Longrightarrow \quad \dot{q}_k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k + \dfrac{\partial H}{\partial q_k} = 0 & \Longrightarrow \quad \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases}$$

ce qui donne les équations canoniques.

Notations compactes

Les équations canoniques sont symétriques pour p_k et q_k au signe près $\Longrightarrow$ une notation compacte :

$$\left\{ \begin{array}{lllll} x_i & = & q_i & \textbf{pour} & i = 1, \cdots, d \\ x_{i+d} & = & p_i & \textbf{pour} & i = 1, \cdots, d \end{array} \right. \quad \textbf{Vecteur colonne 2d}$$

On peut ainsi écrire les équations canoniques sous la forme

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = J\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \textbf{ où } \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{x}}\right)_i = \frac{\partial H}{\partial x_i} \textbf{ et } J = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{d\times d} & \mathbb{I}_{d\times d} \\ -\mathbb{I}_{d\times d} & \mathbb{O}_{d\times d} \end{pmatrix}$$

où $\mathbb{I}_{d\times d}$ est la matrice unité $d \times d$ et $\mathbb{O}_{d\times d}$ est la matrice zéro $d \times d$.

Remarques

On vérifie bien les propriétés suivantes :

- $J^2 = -\mathbb{I}_{2d\times 2d}$;
- J est antisymétrique, ${}^tJ = -J$;
- ${}^tJ = J^{-1}$.

Portrait de phase : Etude d'un pendule simple

Hamiltonien

Le système à un degré de liberté. La coordonnée généralisée est $q = \theta$.
Nous utilisons les coordonnées polaires.
Nous avons déjà établi le hamiltonien d'un pendule simple :

- $\overrightarrow{OM} = l\vec{u}_\rho \Longrightarrow \vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Longrightarrow T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$;
- $V(\theta) = -mgl\cos\theta + \mathrm{Cte}$ (Cte=0) ;
- $L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta \Longrightarrow p = ml^2\dot{\theta} = I\dot{\theta}(\text{moment cinétique})$:

$$\Downarrow$$

$$\boxed{H = \dot{\theta}p - L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta = \frac{p^2}{2I} - I\omega^2\cos q.}$$

avec $I = ml^2$ le moment d'inertie de M, ω^2 la pulsation propre.
Au lieu d'utiliser les équations canoniques, on va étudier le système à travers son portrait de phase.

Portrait de phase : Etude d'un pendule simple

Portrait de phase

Comme indiqué dans le paragraphe précédent, nous étudions le mouvement du système dans l'espace de phase (p, q) et donc étudier l'évolution de p en fonction de q.

H ne dépend pas explicitement du temps, $\Longrightarrow H = \mathrm{Cte} = E$. On utilisera E comme paramètre.

On exprime p en fonction de q

$$p = \pm\omega I\sqrt{2}\sqrt{\cos q + \frac{E}{\omega^2 I}}.$$

sachant que $-1 < \cos q < 1$ et la racine carée doit être définie, on étudie les différents cas possibles.

Portrait de phase : Etude d'un pendule simple

Portrait de phase

Nous distinguons trois cas de figures en fonction de la valeur de l'énergie de M :

• $0 < E < I\omega^2$

$$p \text{ est défini si } \cos q \leq \frac{E}{I\omega^2} \Longrightarrow q \in]-\arccos(\frac{E}{I\omega^2}), \arccos(\frac{E}{I\omega^2})[$$

q est bornée $\Longrightarrow$ oscillations : mouvement de libration.
$p = 0$: points tournants, (les points où le pendule change de sens d'oscillations.)

• $E > I\omega^2$

p est toujours défini $\forall$ la valeur de q. Toutefois, p reste borné$\Longrightarrow$ un mouvement de rotation ou de circulation.

• $E = I\omega^2$

Cas limite séparant les régimes de libration et de circulation. La courbe associée s'appelle la séparatrice.

Portrait de phase : Etude d'un pendule simple

Etude aux voisinages des points d'équilibre

Points d'équilibre :

$$V(q) = -I\omega^2 \cos q \Longrightarrow \frac{dV(q)}{dq} = I\omega^2 \sin q$$

et

$$\frac{dV(q)}{dq} = 0 \Longrightarrow \sin q = 0 \Longrightarrow q = q_e = 0, \pi$$

calculons la dérivée seconde

$$\frac{d^2V}{dq^2} = I\omega^2 \cos q \Longrightarrow \begin{cases} \frac{d^2V}{dq^2}(0) > 0 \\ \frac{d^2V}{dq^2}(\pi) < 0 \end{cases}$$

Ainsi $q_e = 0$ est un point d'équilibre stable et $q_e = \pi$ un point d'équilibre instable.

Posons $x = q - q_e$ et faisons un développement limité aux voisinages de q_e :

Portrait de phase : Etude d'un pendule simple

Etude aux voisinages des points d'équilibres

- $q_e = 0$

$$V(x) = I\omega^2\frac{x^2}{2} \Longrightarrow H = T + V = \frac{p^2}{2I} + \frac{I\omega^2}{2}x^2 = E$$

C'est l'équation d'une ellipse. Le point $q_e = 0$ est dit un point elliptique.

Si $q \to Q = \sqrt{I\omega}x$, le Lagrangien devient

$$L = \frac{1}{2}I\dot{x}^2 - \frac{1}{2}I\omega^2x^2 = \frac{1}{2\omega}\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}\omega Q^2$$

ce qui nous donne pour le moment conjugué

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = \frac{\dot{Q}}{\omega} \Longrightarrow H = \frac{1}{2}\omega\left(P^2 + Q^2\right) = E \Longrightarrow \textbf{équ. d'un cercle}.$$

Regardons ce que donnent les équations canoniques de Hamilton :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{I} \quad \text{et} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \Longrightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

dont la solution est $x(t) = x_0\cos(\omega t + \varphi_0)$, x_0 et φ_0 sont des réels fixés par les conditions intiales de la position et de la vitesse.

Portrait de phase : Etude d'un pendule simple

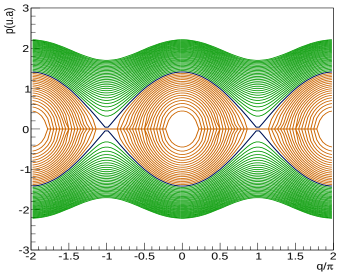
Etude aux voisinages des points d'équilibre

• $q_e = \pi$

$$\frac{p^2}{2I} - \frac{\omega^2 I}{2} x^2 \quad = \quad E = \frac{\omega}{2}\left(P^2 - Q^2\right)$$ **éq. d'une hyperbole**

$q_e = \pm\pi$ **: les points hyperboliques. Les axes de l'hyperbole sont les séparatrices,** $p = \pm I x$.

Les équations de Hamilton donnent la solution $x(t) = x_0 e^{\omega t}$.



• $0 < E < I\omega^2$ **: régime de libration (courbes rouges).** q **est bornée. Aux voisinages de** $q = 2k\pi$**, les trajectoires sont fermées. ;**

• $E = I\omega^2$ **: la séparatrice entre les deux régimes (courbe en bleu) ; Aux voisinages de** $q = (2k+1)\pi$**,les courbes sont des hyperboles.**

• $E > I\omega^2$ **régime de circulation (courbes vertes) ;** p **est bornée.**

Portraits de phase paramétrés par E

Chapitre II : Formalisme de Hamilton

Théorie de Hamilton-Jacobi

Introduction

Le formalisme de Lagrange permet de déterminer la dynamique d'un système à n degrés de liberté par le biais de $2n$ équations différentielles de second ordre.

Le formalisme de Hamilton décrit la dynamique d'un système à d degrés de liberté,par $2n$ équations différentielles de premier ordre. L'état du système à un instant t est décrit dans l'espace de phases par un point (p, q)

Considérons deux états du système dans l'espace de phases. On peut évoluer de l'un à l'autre soit par l'intermédiaire des équations differentielles, soit en trouvant une transformation dans l'espace de phases qui fait passer du premier état au deuxième.

$\Longrightarrow$ La théorie de Hamilton Jacobi.

Théorie de Hamilton-Jacobi

Tranfomations canoniques et fonctions génératrices

Tranformation ponctuelle : C'est une tranformation de la forme

$$q_k \to Q_k = Q_k(q_i, t).$$

Exemple : Passage d'un système de coordonnées à un autre.

Tranformation de contact :

Définition

Une tranformation de contact est une transformation dans l'espace de phases qui peut s'écrire sous la forme
$q_k \to Q_k = Q_k(q_i, p_i, t)$ et $p_k \to P_k = P_k(q_i, p_i, t)$

Elle est canonique si (Q_k, P_k) vérifient

$$\begin{cases} \dot{Q}_k & = & \dfrac{\partial H'}{\partial P_k} \\ \dot{P}_k & = & -\dfrac{\partial H'}{\partial Q_k} \end{cases}$$

où $H' = H'(Q_k, P_k, t)$ le nouveau hamiltonien du système.

Théorie de Hamilton-Jacobi

Tranfomations canoniques et fonctions génératrices

H' est le hamiltonien du système exprimé avec (Q_k, P_k). Le principe de moindre action permet d'écrire

$$\delta S = \delta \int L dt = \delta \int (p_k \dot{q}_k - H)\, dt = \delta \int \left(P_k \dot{Q}_k - H'\right) dt = 0$$

$\Longrightarrow$ les deux derniers intégrants ne diffèrent que par une dérivée totale par rapport au temps.

Définition

Une transformation canonique est une transformation de contact définie dans l'espace de phases et qui satisfait la condition

$$H' = H + \sum_k (P_k \dot{Q}_k - p_k \dot{q}_k) + \frac{dG}{dt}.$$

G est la fonction génératrice de la transformation canonique.

Théorie de Hamilton-Jacobi

Fonctions génératrices : Système à 1 degré de liberté

Nous étudions le cas d'un système à un degré de liberté. Quatre classes de fonctions génératrices se présentent.

$G_1(q,Q,t)$ **:** En utilisant la définition, nous avons

$$\begin{aligned} H' &= H + P\dot{Q} - p\dot{q} + \frac{\partial G_1}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial G_1}{\partial Q}\dot{Q} + \frac{\partial G_1}{\partial t} \\ H' &= H + \frac{\partial G_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial G_1}{\partial q} - p\right)\dot{q} + \left(\frac{\partial G_1}{\partial Q} + P\right)\dot{Q} \\ \Longrightarrow (H' - H - \frac{\partial G_1}{\partial t})dt &= \left(\frac{\partial G_1}{\partial q} - p\right)dq + \left(\frac{\partial G_1}{\partial Q} + P\right)dQ \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\boxed{p = \frac{\partial G_1}{\partial q} \ \textbf{et} \ P = -\frac{\partial G_1}{\partial Q}}$$

$G_1(q,Q,t)$ **et ces deux dernières équations déterminent complètement la dynamique du système avec les nouvelles variables. Si** $G_1(q,Q)$ **ne dépend pas explicitement du temps, alors** $H' = H$**.**

Théorie de Hamilton-Jacobi

Fonctions génératrices : Système à 1 degré de liberté

$G_2(q, P, t)$: **On procède de la même façon :**

$$(H' - H - \frac{\partial G_2}{\partial t})dt = \left(\frac{\partial G_2}{\partial q} - p\right) dq + PdQ + \frac{\partial G_2}{\partial P} dP$$

pour substituer dQ, il suffit d'ajouter une dérivée totale par rapport au temps $-\frac{d}{dt}(PQ)$, qui n'altère pas la dynamique :

$$(H' - H - \frac{\partial G_2}{\partial t})dt = \left(\frac{\partial G_2}{\partial q} - p\right) dq + \left(-Q + \frac{\partial G_2}{\partial P}\right) dP$$

Ce qui donne

$$\boxed{p = \frac{\partial G_2}{\partial q} \text{ et } Q = \frac{\partial G_2}{\partial P}}$$

Deux autres configurations sont possibles $G_3(p, Q, t)$ et $G_4(p, P, t)$ et le traitement est le même que précédement.

Théorie de Hamilton-Jacobi

Exemples de tranformations

Identité : $F(q,P)=\sum_k q_k P_k$

La transformation appartient à la deuxième catégorie G_2, d'où :

$$\begin{cases} p_k &= \frac{\partial F}{\partial q_k} = P_k \\ Q_k &= \frac{\partial F}{\partial P_k} = q_k \end{cases}$$

comme F ne dépend pas explicitement du temps $H' = H$.

On note que les nouvelles variables sont identiques aux anciennes.

Fonction inverseuse : $F(q,Q)=\sum_k q_k Q_k$

La tranformation est de type G_1, alors

$$\begin{cases} p_k &= \frac{\partial F}{\partial q_k} = Q_k \\ P_k &= -\frac{\partial F}{\partial Q_k} = -q_k \end{cases}$$

On note que les deux variables jouent le même rôle.

comme F ne dépend pas explicitement du temps $H' = H$.

Théorie de Hamilton-Jacobi

Application : Oscillateur harmonique 1D

Nous avons déjà établi que $T = 1/2m\dot{q}^2$ **et** $V(q) = kq^2$. **On pose** $\omega^2 = k/m$, **ce qui donne**

$$L \;=\; T - V = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2$$

$p = \partial L/\partial\dot{q} = m\dot{q}$, **ce qui donne pour le hamiltonien**

$$H \;=\; \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{q} \;=\; \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} \;=\; \frac{\partial H}{\partial p} == -m\omega^2 \end{cases}$$

Considérons la fonction $F(q, Q, t) = 1/2mq^2\omega\cot Q$ **:** $\in G_1(q, Q, t)$ **, d'où**

$$p \;=\; \frac{\partial F}{\partial q} = m\omega q\text{cot}Q \quad \text{et} \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2\text{sin}^2 Q}$$

et à partir de ces deux expressions, on déduit

$$q \;=\; \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\text{sin}Q \quad \text{et} \quad p = \sqrt{2m\omega P}\text{cos}Q$$

Théorie de Hamilton-Jacobi

Application : Oscillateur harmonique 1D

Notons que F ne dépend pas du temps alors $H' = H$ et

$$H' = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q = \omega P.$$

Q est cyclique $\Longrightarrow \dot{P} = 0 \Longrightarrow P$ est une intégrale première que l'on peut prendre égale à $P = E/\omega$, ce qui donne

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = \omega$$

ce qui implique

$$Q = \omega t + \phi \Longrightarrow q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \phi).$$

On note que Q a la dimension d'un angle et P celle d'une action.

Chapitre II : Formalisme de Hamilton

Matrices symplectiques et Transformations canoniques

Matrice symplectique

Définition

Considérons une matrice M $2d \times 2d$. M est dite une matrice symplectique si

$$^{t}MJM \quad = \quad J$$

où ^{t}M est la matrice transposée de M et J est la matrice définie par

$$J = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{d\times d} & \mathbb{I}_{d\times d} \\ -\mathbb{I}_{d\times d} & \mathbb{O}_{d\times d} \end{pmatrix}$$

Strctures symplectiques

Matrice jacobienne

Considérons une transformation canonique faisant correspondre les variables Q_k et P_k aux variables q_k et p_k telles que

$$Q_k = Q_k(q_k, p_k; t) \quad \text{et } P_k = P_k(q_k, p_k; t).$$

On peut inverser les expressions précédentes et obtenir

$$q_k = q_k(Q_k, P_k; t) \quad \text{et } p_k = p_k(Q_k, P_k; t).$$

On note $\vec{x} = (q_1, \cdots, q_d; p_1, \cdots, p_d)$ et $\vec{y} = (Q_1, \cdots, Q_d; P_1, \cdots, P_d)$. On définit la matrice M par

$$M_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$$

qui s'appelle la *matrice jacobienne* de la transformation.

Strctures symplectiques

Matrice jacobienne

Les éléments de la matrice inverse M^{-1} sont donnés par

$$M^{-1}_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j}.$$

En effet, comme $\vec{x}$ peut être considéré comme une fonction de $\vec{y}$, $\vec{x} = \vec{x}(\vec{y})$, et vice versa, $\vec{y}$ comme une fonction de $\vec{x}$, $\vec{y} = \vec{y}(\vec{x})$, alors $x_i\left(\vec{y}(\vec{x})\right) = x_i$ et

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_i}{\partial x_j} &= \delta_{ij} \\ &= \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial x_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_j} \\ &= \sum_{k=1}^{d} M^{-1}_{ik} M_{kj}\end{aligned}$$

Transformations canoniques et strctures symplectiques

Transformation canonique

Théorème

Une transformation est canonique si sa matrice jacobienne est symplectique

Pour la démonstration, voir l'appendice C du polycopié du cours.

Exercice

Montrer que la transformation suivante est canonique

$$\begin{aligned} Q &= \textbf{Arctg}\frac{m\omega q}{p} \\ P &= \frac{m\omega}{2}q^2 + \frac{1}{2m\omega^2}p^2 \end{aligned}$$

Chapitre II : Formalisme de Hamilton

Crochets de Poisson

Définition

Considérons deux fonctions définies $f(q_k, p_k, t)$ et $g(q_k, p_k, t)$ dans l'espace de phases. On appelle par les crochets de Poisson entre les deux fonctions l'expression suivante

$$\boxed{\{f,g\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k} \right)}$$

On constate que dans le cas particulier où $f = q_k$ et $g = p_k$, on a

$$\begin{aligned} \{q_i, p_j\} &= \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_i}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_i}{\partial p_k} \right) \\ &= \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij} \end{aligned}$$

et on obtient les crochets de Poisson entre les variables conjugués :

$$\boxed{\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \{q_i, q_j\} = 0 \quad \text{et} \quad \{p_i, p_j\} = 0.}$$

Crochet de Poisson

Emergeance naturelle de l'espace de phases

Les crochets de Poisson apparaissent de manière naturelle dans la formulation de l'espace de phase. En effet, considérons

$$\frac{df}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

En tenant compte des équations de Hamilton

$$\frac{df}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

ce qui donne en notation des corochets de Poisson

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Si f ne dépend pas explicitement du temps, $\partial f / \partial t = 0$, pour qu'elle soit une intégrale première il suffit que $\{f, H\} = 0$.

Crochet de Poisson

Quelques propriétés

Nous présentons quelques propriétés

$$
\begin{aligned}
\{f,g\} &= -\{g,f\} \\
\{f,c\} &= 0 \quad \text{(c est une constante)} \\
\{f_1+f_2,g\} &= \{f_1,g\}+\{f_2,g\} \\
\{f_1 f_2,g\} &= f_1\{f_2,g\}+\{f_1,g\}f_2 \\
\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} &= \{\frac{\partial f}{\partial t},g\}+\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\} \\
\{f,q_i\} &= -\frac{\partial f}{\partial p_i} \\
\{f,p_i\} &= \frac{\partial f}{\partial q_i}
\end{aligned}
$$

On appelle par l'identité de Jacobi, l'expression suivante

$$\{f,\{g,h\}\}+\{h,\{f,g\}\}+\{g,\{h,f\}\}=0$$

On démontre aussi que

$$\frac{d}{dt}\{f,g\} = \{\frac{df}{dt},g\}+\{f,\frac{dg}{dt}\}$$

Crochet de Poisson

Crochets de Poisson et transformations canoniques

On opère sur le système une transformation canonique qui $q_k \to Q_k$ et $p_k \to P_k$. Que deviennent les crochets de Poisson entre les nouvelles variables ?

Théorème

Les crochets de Poisson sont indépendants du jeu de variables canoniques dans lequel ils sont exprimés, ainsi $\{f,g\}_{q,p} = \{f,g\}_{Q,P}$

Remarques :

- Les propriétés citées précédement sont valables pour les nouvelles variables (Q,P).
- Les crochets de Poisson peuvent être utilisés pour vérifier le caractère canonique d'une transformation.

Une transformation est canonique si les crochets de Poisson sont invariants par rapport à cette transformation

$$\{f,g\}_{q,p} = \{f,g\}_{Q,P}$$

Crochet de Poisson

Symétries et crochets de Poisson

Nous avons vu que le théorème de Noether permet de calculer les constantes du mouvement à partir des symétries du lagrangien.

On cherche l'effet d'une symétrie sur une fonction $g(q_k, p_k, t)$ définie dans l'espace de phases.

Considérons une transformation infinitésimale

$$q_k \quad \rightarrow \quad Q_k = q_k + \delta q_k \quad \text{et} \quad p_k \rightarrow P_k = p_k + \delta p_k$$

dont la fonction génératrice G qui se met pour une transformation infinitésimale, autour de l'identité, sous la forme

$$G_(q_k, P_k) \quad = \quad \sum_k q_k P_k + \epsilon F$$

$\epsilon \rightarrow 0$, paramètre de la transformation et F, appelé générateur infinitésimal de la transformation de symétrie.

Crochet de Poisson

Symétries et crochets de Poisson

Nous avons ainsi

$$p_k = \frac{\partial G}{\partial q_k} = P_k + \epsilon \frac{\partial F}{\partial q_k} \quad \text{et} \quad Q_k = \frac{\partial G}{\partial P_k} = q_k + \epsilon \frac{\partial F}{\partial P_k} \quad \text{et} \quad H' = H$$

ce qui donne pour les accroissements

$$\delta p_k = P_k - p_k = -\epsilon \frac{\partial F}{\partial q_k} \quad \text{et} \quad \delta q_k = Q_k - q_k = \epsilon \frac{\partial F}{\partial P_k} \sim \epsilon \frac{\partial F}{\partial p_k}$$

Rappelons que l'on cherche l'effet sur g, ainsi

$$\delta g = \sum_k \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial g}{\partial p_k} \delta p_k \right) = \epsilon \sum_k \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial q_k} \right) = \epsilon \{g, F\}$$

Une grandeur g, définie sur l'espace des phases, est invariante par rapport à une symétrie, de générateur infinitésimal F, si $\{g, F\} = 0$.

Crochet de Poisson

Retour aux invariants

Translation dans le temps : $F = H$

En appliquant les résultats précédents, nous avons

$$\begin{aligned} \delta p_k &= -\epsilon \frac{\partial H}{\partial q_k} = \epsilon \dot{p}_k \\ \delta q_k &= \epsilon \frac{\partial H}{\partial p_k} = \epsilon \dot{q}_k \end{aligned}$$

on voit bien que $\epsilon = dt$ et que le hamiltonien est bien le générateur infinitésimal des translations dans le temps faisant évoluer le système d'un instant t à un instant $t + dt$.

Translation dans l'espace dans la direction de q_i : $F = P_i$

En appliquant les résultats précédents, nous avons

$$\begin{aligned} \delta p_k &= -\epsilon \frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0 \\ \delta q_k &= \epsilon \frac{\partial p_i}{\partial p_k} = \epsilon \delta_{ik} \end{aligned}$$

on voit bien que $\epsilon = \delta q_k$ et que l'impulsion est le générateur infinitésimal des translations selon q_k.