



Chapitre I

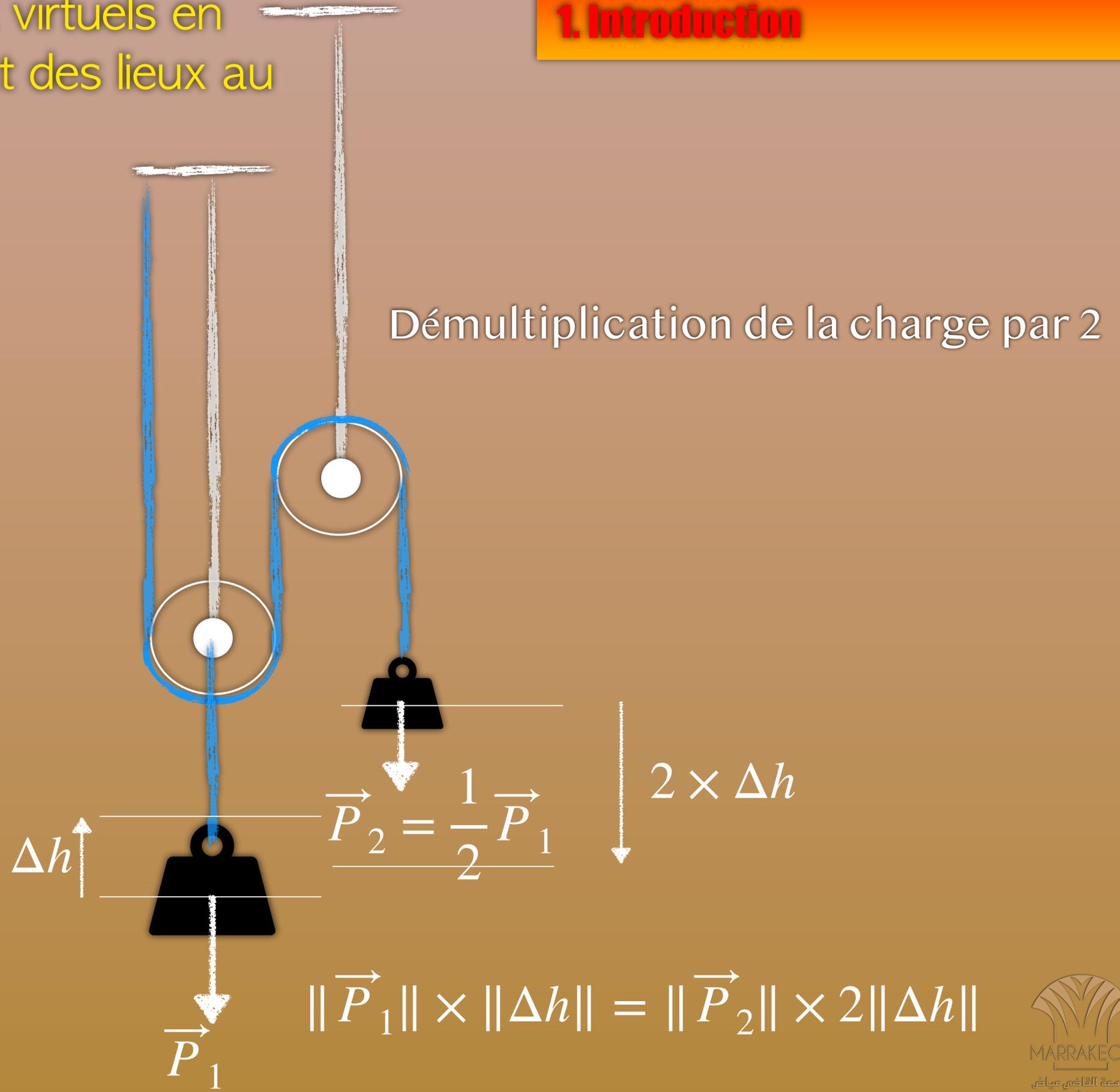
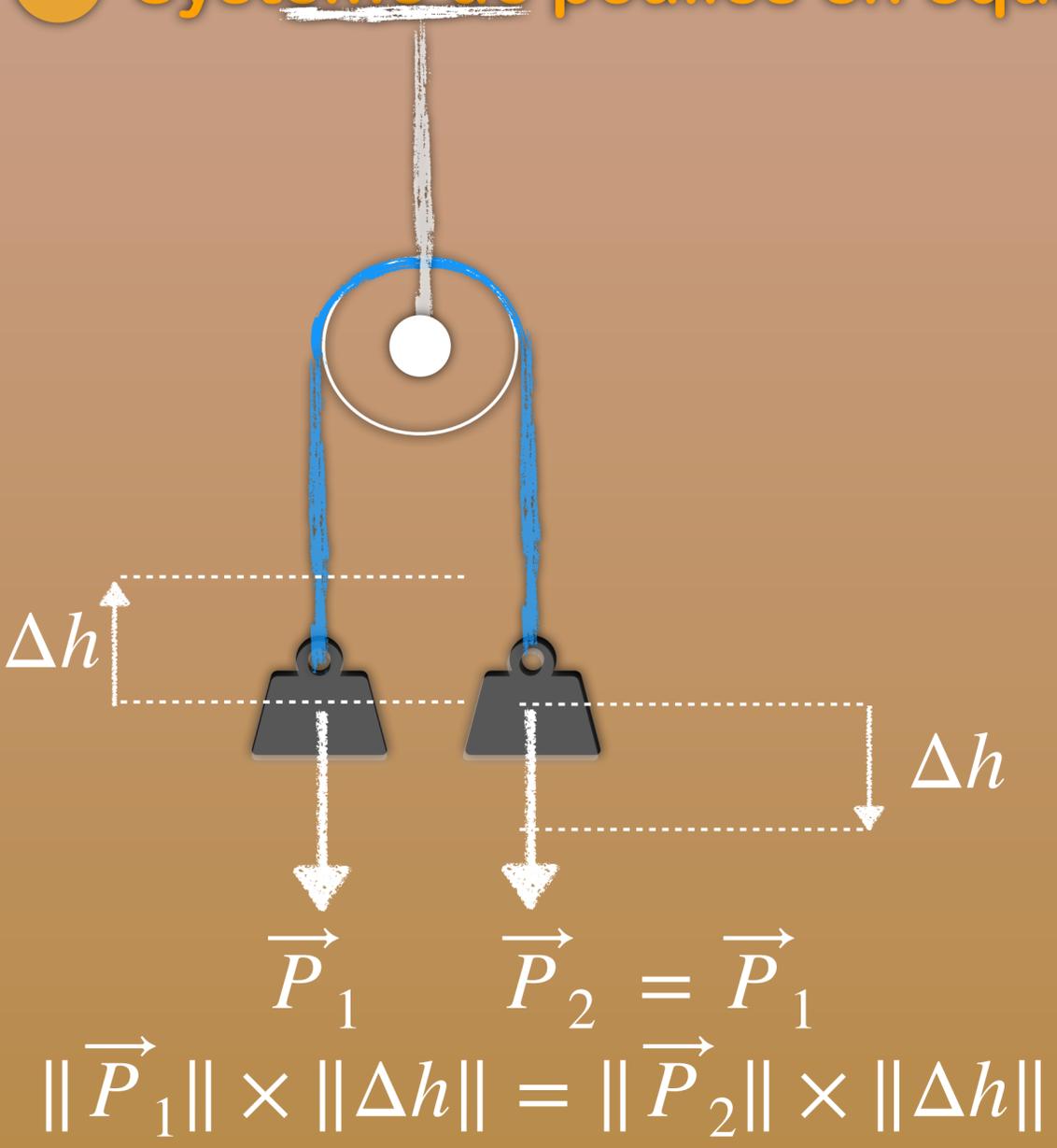
Travaux virtuels et applications



1. Introduction

Avant d'introduire le principe des travaux virtuels en statique, nous allons passer en revue l'état des lieux au XVI siècle...

● Système de poulies en équilibre



Note

Dans un système de poulies en équilibre, le produit de chacun des poids par le déplacement sont

égaux :

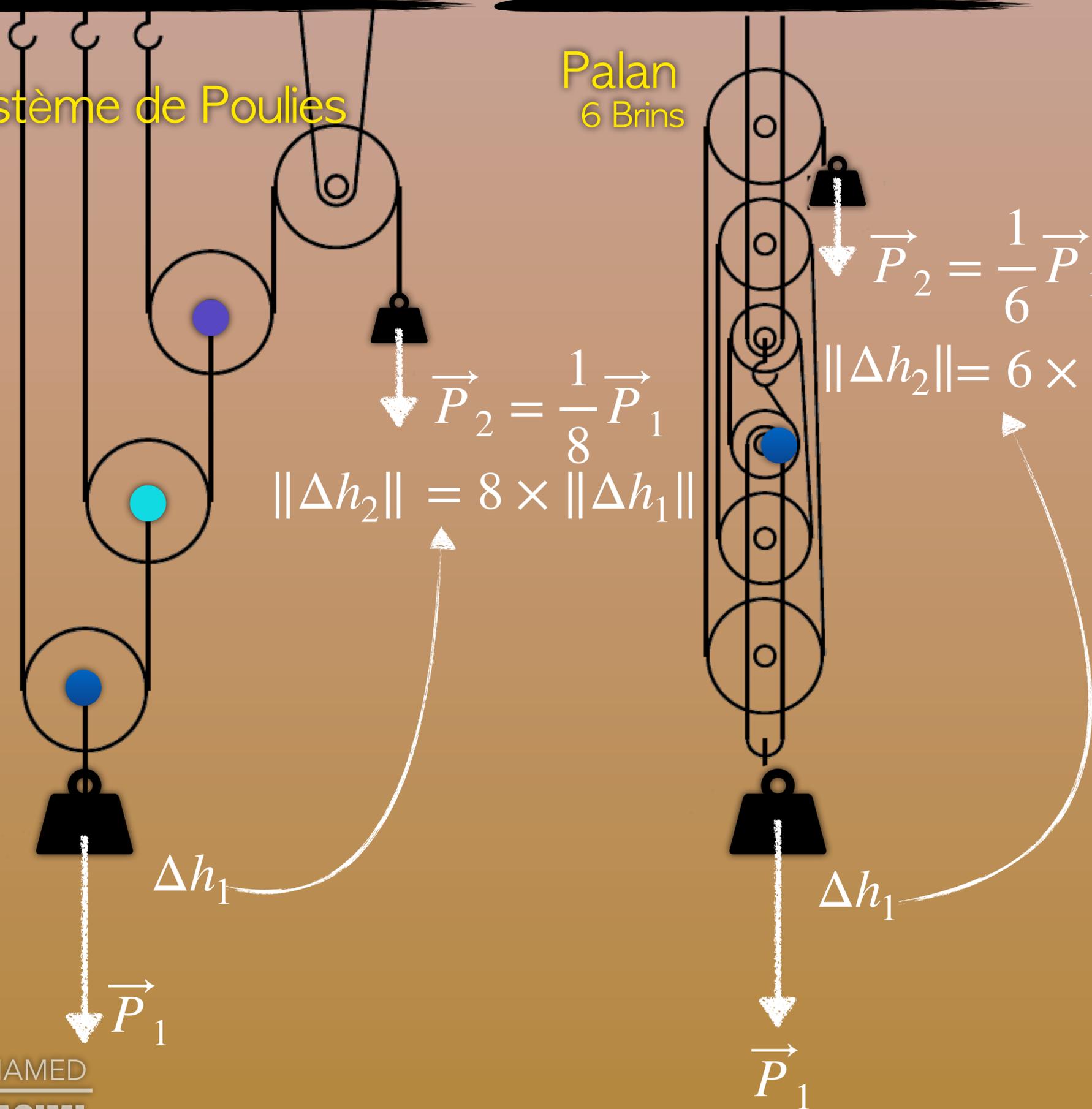
$$P_1 \times \Delta h_1 = P_2 \times n \times \Delta h_1$$

où

$$P_2 = \frac{1}{n} P_1$$

Systeme de Poulies

Palan
6 Brins



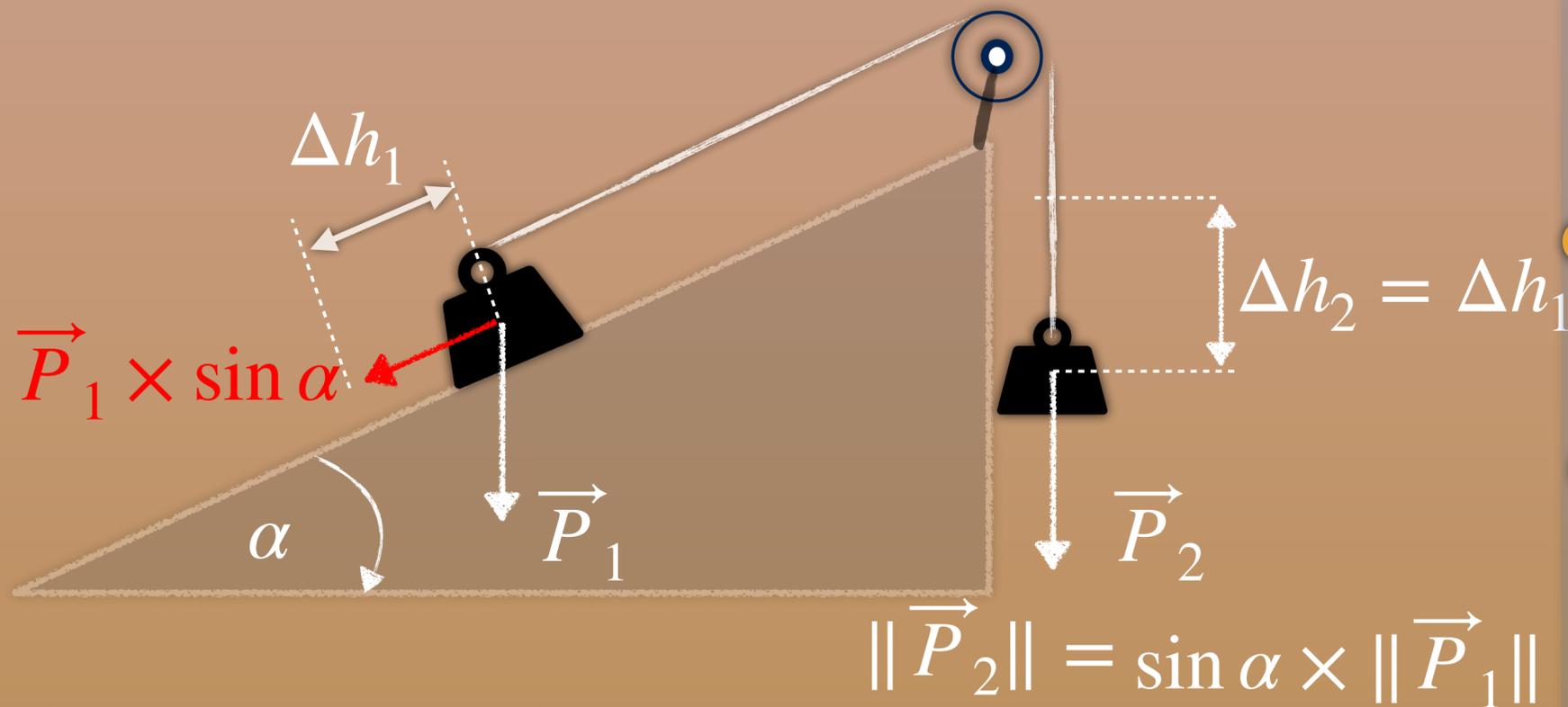
$$\vec{P}_2 = \frac{1}{8} \vec{P}_1$$

$$\|\Delta h_2\| = 8 \times \|\Delta h_1\|$$

$$\vec{P}_2 = \frac{1}{6} \vec{P}_1$$

$$\|\Delta h_2\| = 6 \times \|\Delta h_1\|$$

● Poids sur un plan incliné



$$\|\vec{P}_1\| \times \Delta h_1 \neq \|\vec{P}_2\| \times \Delta h_2$$

$$\|\vec{P}_1\| \times \sin \alpha \times \Delta h_1 = \|\vec{P}_2\| \times \Delta h_2$$

Note

● Si l'on déplace le poids reposant sur le plan incliné d'une distance **d** alors le poids suspendu se déplace de manière

● La force active sur le plan incliné est

$$F_{a_1} = \|\vec{P}_1\| \times \sin \alpha$$

● La force active sur la charge suspendue est

$$F_{a_2} = \|P_2\| = \|P_1\| \times \sin \alpha$$

● On généralise la relation des système de poulies en équilibre par

$$F_{a_2} \times \Delta h_1 = F_{a_1} \times \Delta h_2$$

Reprenons l'exemple précédent,

$$\|\vec{F}_{a_1}\| \times \Delta h = \|\vec{F}_{a_2}\| \times 2\Delta h$$

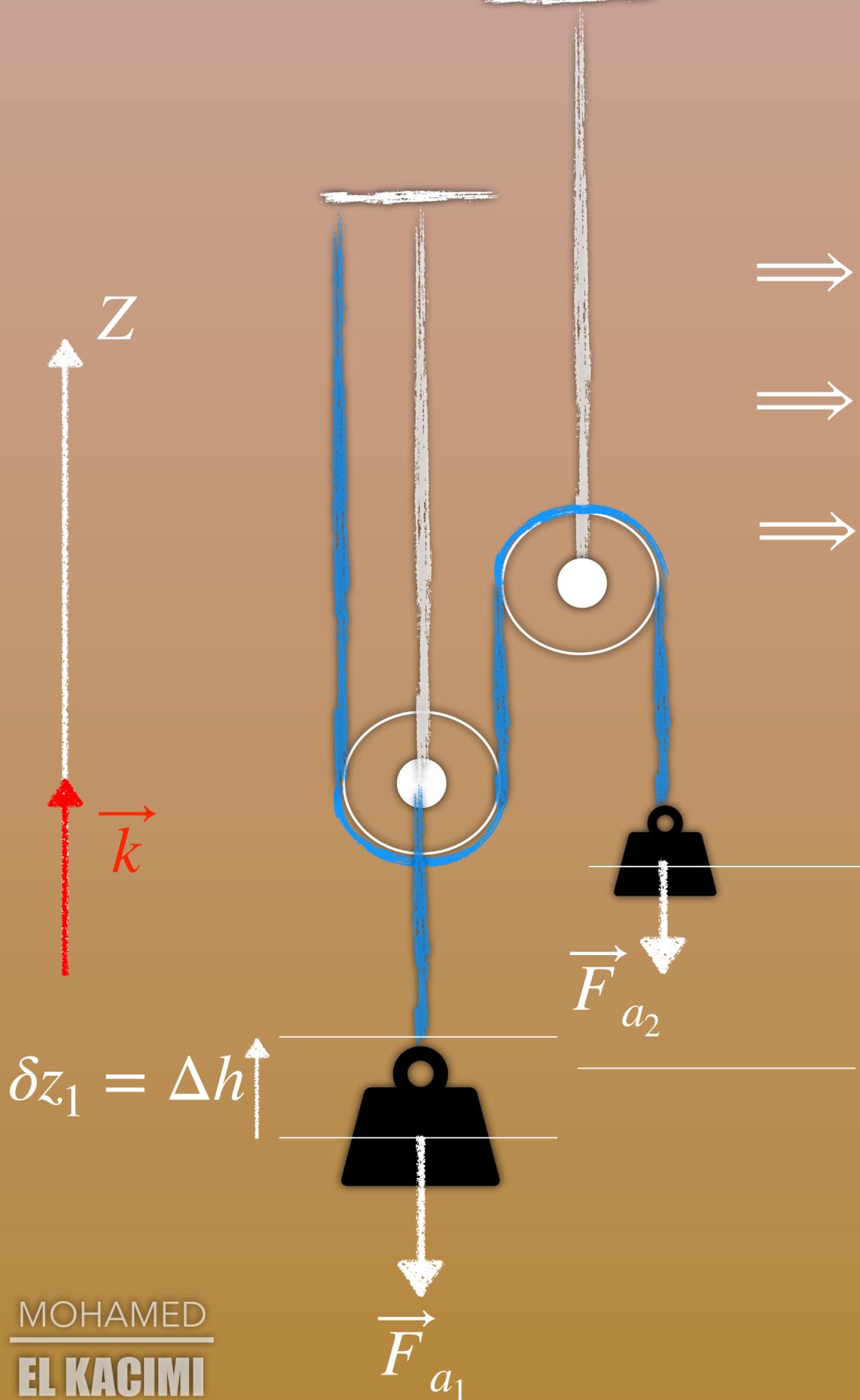
$$\implies \|\vec{F}_{a_1}\| \times \delta z_1 = \|\vec{F}_{a_2}\| \times (-\delta z_2)$$

$$\implies -\vec{F}_{a_1} \cdot \vec{k} \delta z_1 = -\vec{F}_{a_2} \cdot \vec{k} (-\delta z_2)$$

$$\implies \vec{F}_{a_1} \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_{a_2} \cdot \delta \vec{r}_2 = 0$$

\implies

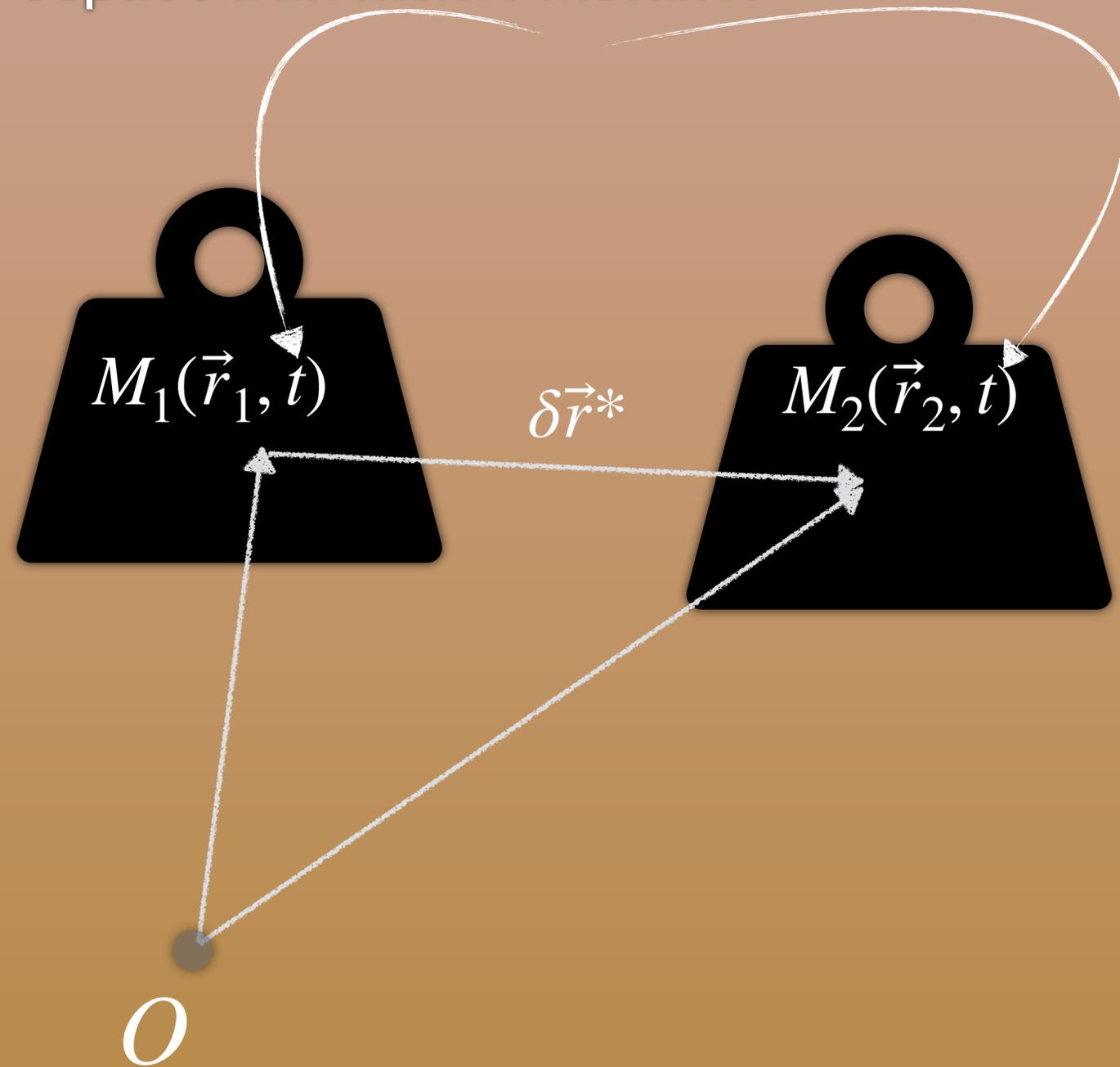
$$\sum_{i=1}^2 \vec{F}_{a_i} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$



$$\delta z_2 = -2\Delta h$$

2. Déplacement virtuel

Considérons deux positions dans l'espace à un même instant :



Définition

On appelle par déplacement virtuel, le déplacement géométrique entre les positions M_1 et M_2 considérés au même instant,

$$\delta\vec{r}^* = \lim_{M_1 \rightarrow M_2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$\delta\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\delta z \quad \text{+ } \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\delta t$$

$$\delta\vec{r}^* = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\delta z$$

3. Principe des Travaux virtuels

Définition

On définit par le travail virtuel le travail développé par une force au cours d'un déplacement virtuel

$$\delta W^* = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}^*$$

$\delta \vec{r}^*$ est le déplacement virtuel du point d'application de la force.

Remarque

- Au cours d'un déplacement virtuel, les forces sont considérées constantes.
- Si les forces auxquelles est soumis le système mécanique sont constantes, le déplacement virtuel se confond avec le déplacement réel.

Jean BERNOULLI a énoncé le principe des travaux virtuels en 1717 valable en général pour toutes les forces, pas seulement à la pesanteur .

Considérons un système mécanique en équilibre soumis à n forces \vec{F}_i dont le point d'application est soumis au déplacement virtuel $\delta \vec{r}_i^*$.

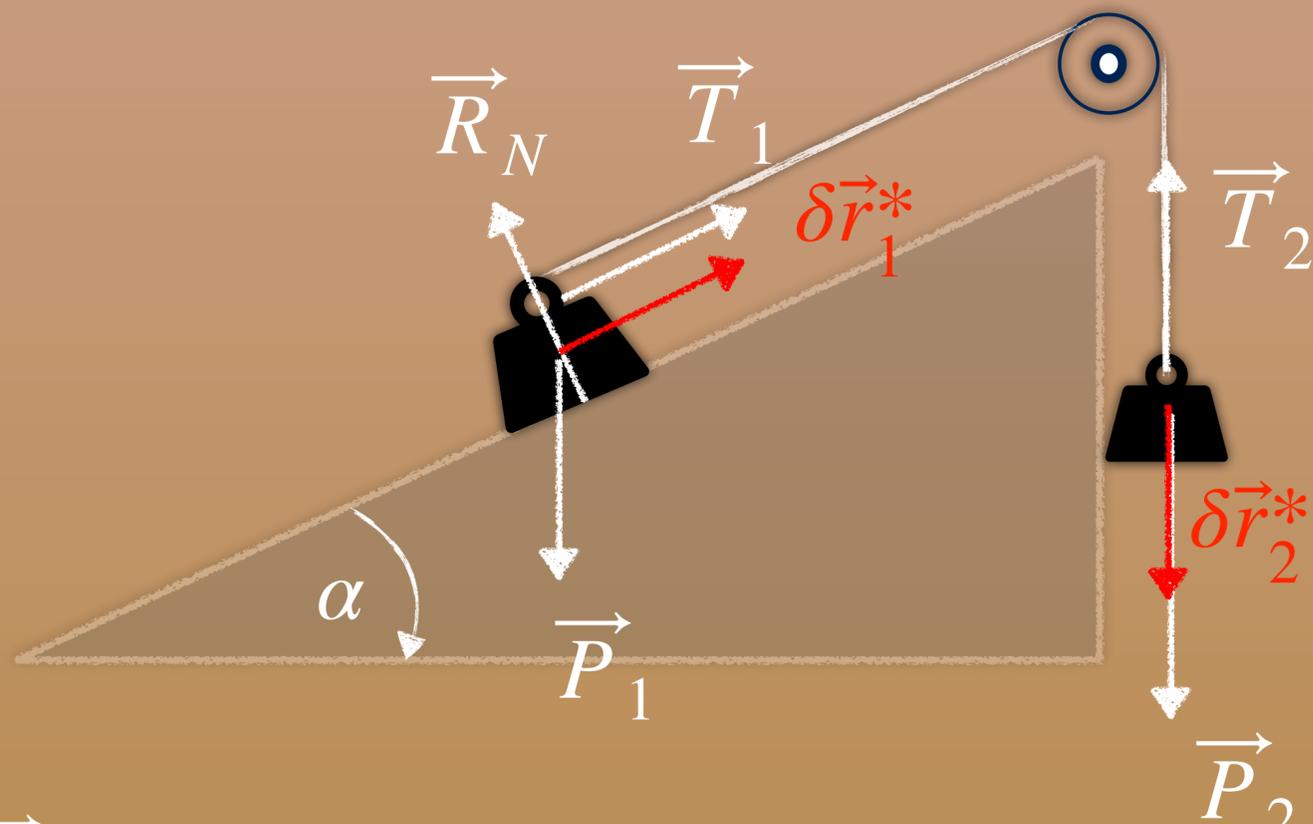
Principe des travaux virtuels en statique

La somme des travaux virtuels de toutes les forces appliquées à un système en équilibre est nul

$$\delta W^* = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i^* = 0$$

Applications : Plan incliné

Considérons un solide en équilibre sur un plan incliné. Les frottements sont négligeables.



$\vec{R}_N \perp \delta r_1^*$
 Pas de frottement
 $\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\| = T$
 Fil inextensible
 $\|\delta \vec{r}_1^*\| = \|\delta \vec{r}_2^*\| = \|\delta \vec{r}^*\|$

3. Principe des Travaux virtuels

Principe des travaux virtuels

$$\vec{P}_1 \cdot \delta \vec{r}_1^* + \vec{R}_N \cdot \delta \vec{r}_1^* + \vec{T}_1 \cdot \delta \vec{r}_1^* + \vec{P}_2 \cdot \delta \vec{r}_2^* + \vec{T}_2 \cdot \delta \vec{r}_2^* = 0$$

$$-\|\vec{P}_1\| \|\delta \vec{r}_1^*\| \times \sin \alpha + 0 + \|\vec{T}_1\| \|\delta \vec{r}_1^*\| - \|\vec{T}_2\| \|\delta \vec{r}_2^*\| + \|\vec{P}_2\| \|\delta \vec{r}_2^*\| = 0$$

$$\implies \left(\|\vec{P}_2\| - \|\vec{P}_1\| \sin \alpha \right) \|\delta \vec{r}^*\| + T \left(\|\delta \vec{r}^*\| - \|\delta \vec{r}^*\| \right) = 0$$

$$\implies \|\vec{P}_2\| = \|\vec{P}_1\| \sin \alpha$$

PFD de Newton

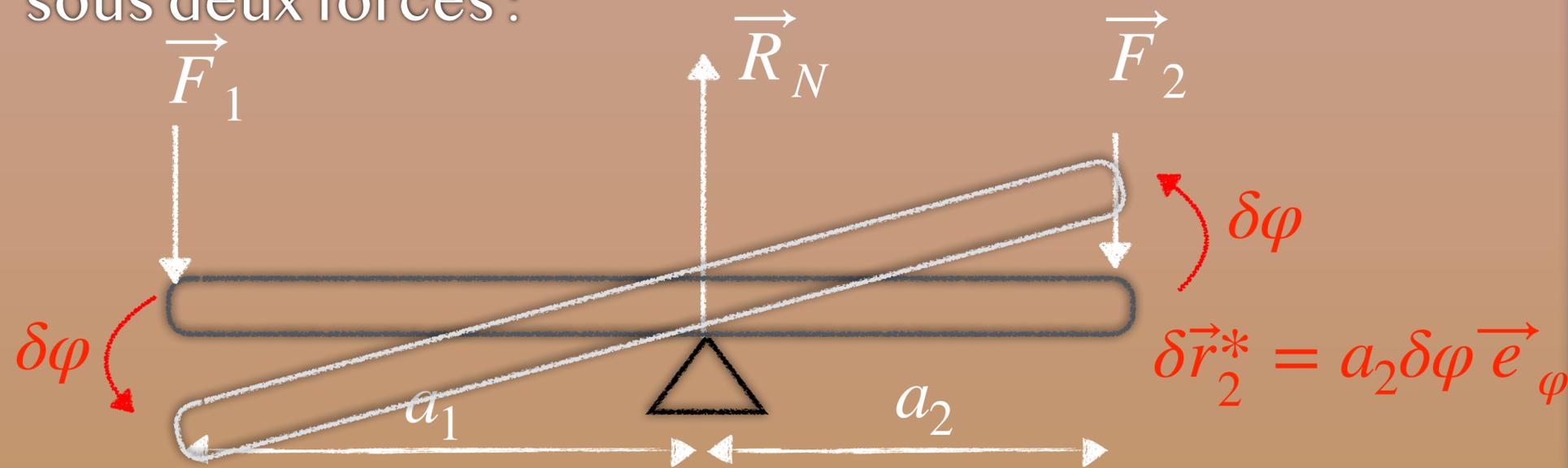
$$\vec{P}_1 + \vec{R}_N + \vec{T}_1 = \vec{0} \implies \|\vec{T}_1\| = T = \|\vec{P}_1\| \sin \alpha$$

$$\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = \vec{0} \implies \|\vec{P}_2\| = \|\vec{T}_2\| = T$$

$$\implies \|\vec{P}_2\| = \|\vec{P}_1\| \sin \alpha$$

Applications : Principe du levier

Considérons un levier en équilibre sous deux forces :



$$\delta \vec{r}_1^* = a_1 \delta \varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\delta W^*(\vec{R}_N) = 0$$

Remarque

Lorsque le travail des forces de contraintes est nul, on dit que le déplacement virtuel est compatible

Principe des travaux virtuels

$$\vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r}_1^* + \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{r}_2^* = 0$$

$$\Rightarrow \|\vec{F}_1\| a_1 \delta \varphi - \|\vec{F}_2\| a_2 \delta \varphi = 0$$

$$\Rightarrow \left(\|\vec{F}_1\| a_1 - \|\vec{F}_2\| a_2 \right) \delta \varphi = 0$$

$\forall \delta \varphi$

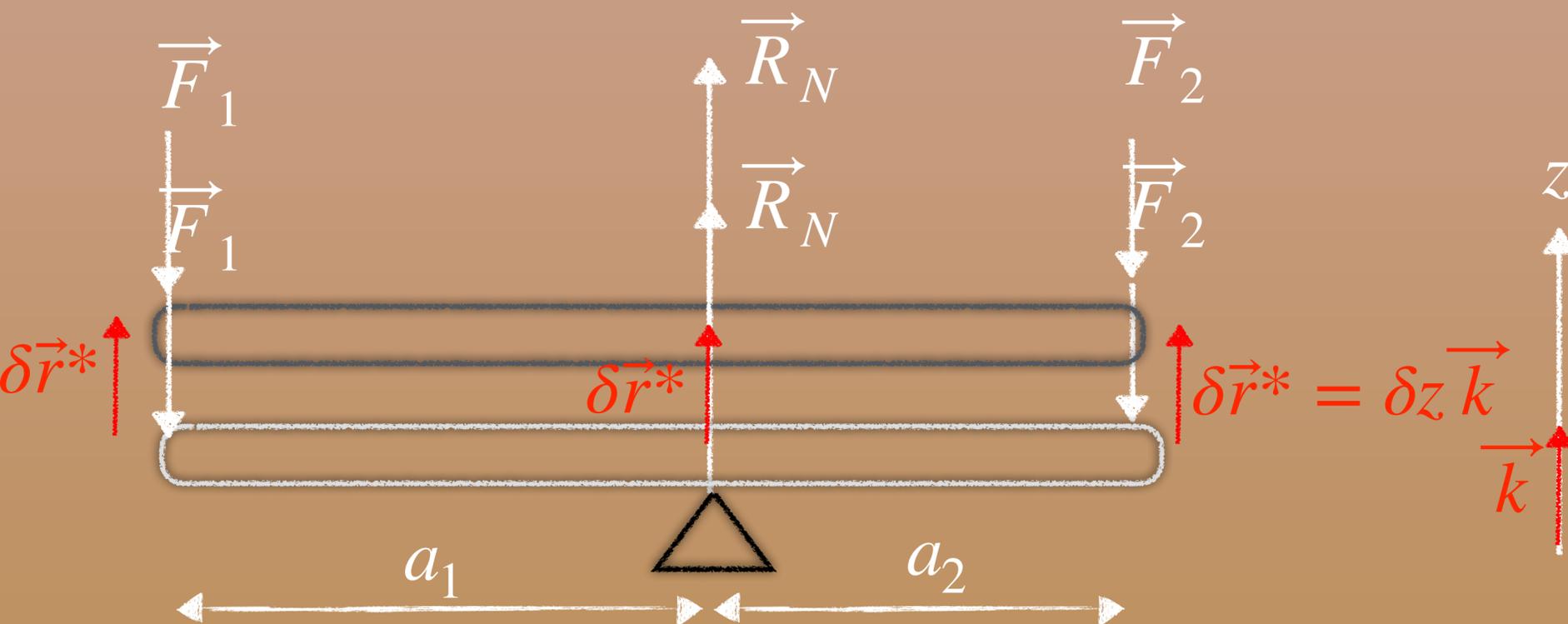
$$\Rightarrow \|\vec{F}_1\| a_1 - \|\vec{F}_2\| a_2 = 0$$

$$\|\vec{F}_1\| a_1 = \|\vec{F}_2\| a_2$$

Principe du levier

Applications : Réaction sur le levier

Considérons un levier en équilibre sous deux forces :



$$\delta W^*(\vec{R}_N) = \vec{R}_N \cdot \delta \vec{r}^*$$

$$\delta W^*(\vec{R}_N) = R_N \delta z$$

Principe des travaux virtuels

$$\vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r}_1^* + \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{r}_2^* + \vec{R}_N \delta \vec{r}^* = 0$$

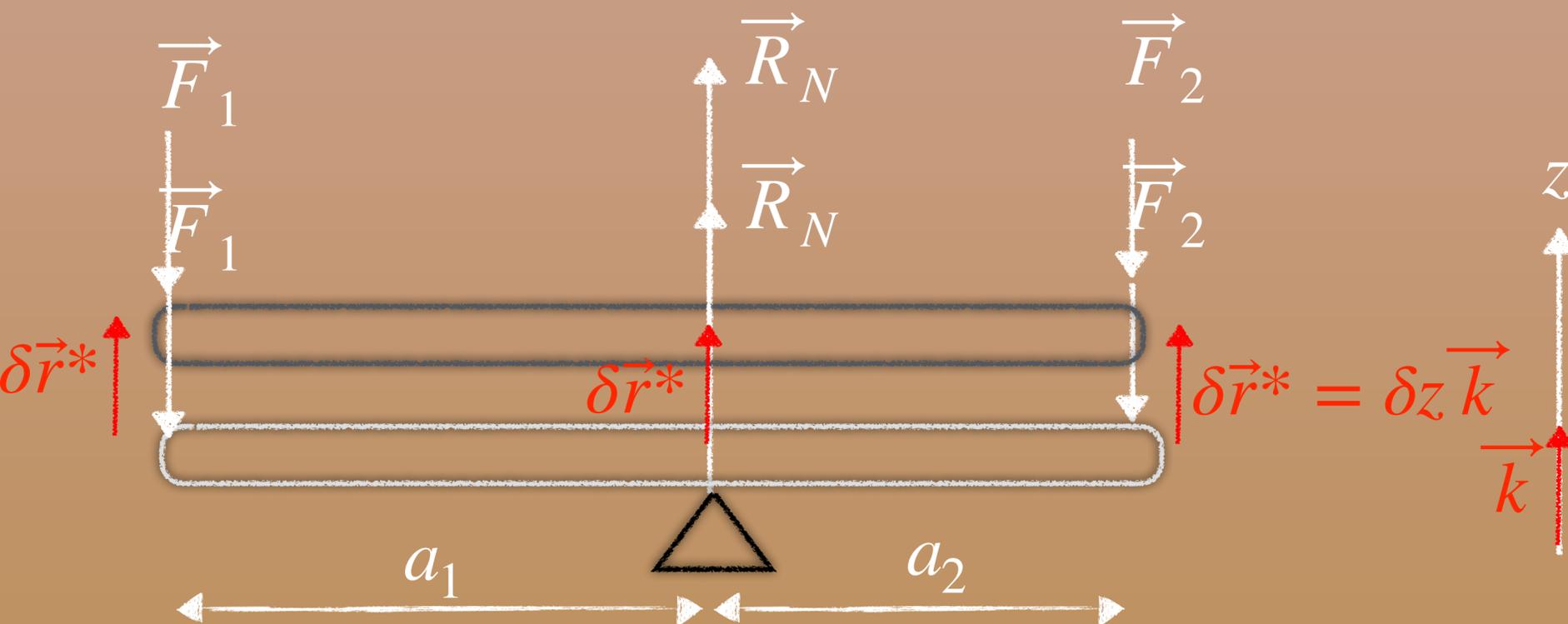
$$\Rightarrow \left(-\|\vec{F}_1\| - \|\vec{F}_2\| + \|\vec{R}_N\| \right) \delta z = 0$$

$$\forall \delta z$$

$$\Rightarrow \|\vec{R}_N\| = \|\vec{F}_1\| + \|\vec{F}_2\|$$

Applications : Réaction sur le levier

Considérons un levier en équilibre sous deux forces :



Principe des travaux virtuels

$$\vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r}_1^* + \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{r}_2^* + \vec{R}_N \delta \vec{r}^* = 0$$

$$\Rightarrow \left(-\|\vec{F}_1\| - \|\vec{F}_2\| + \|\vec{R}_N\| \right) \delta z = 0$$

$$\forall \delta z$$

$$\Rightarrow \|\vec{R}_N\| = \|\vec{F}_1\| + \|\vec{F}_2\|$$

$$\delta W^*(\vec{R}_N) = \vec{R}_N \cdot \delta \vec{r}^*$$

$$\delta W^*(\vec{R}_N) = R_N \delta z$$

4. Types de liaison

Définition

On appelle par liaison toute **contrainte** dont l'effet est de **limiter les mouvements** externes ou internes d'un système.

Les liaisons s'expriment soit par **des forces de contraintes** soit par **des équations de liaison**.

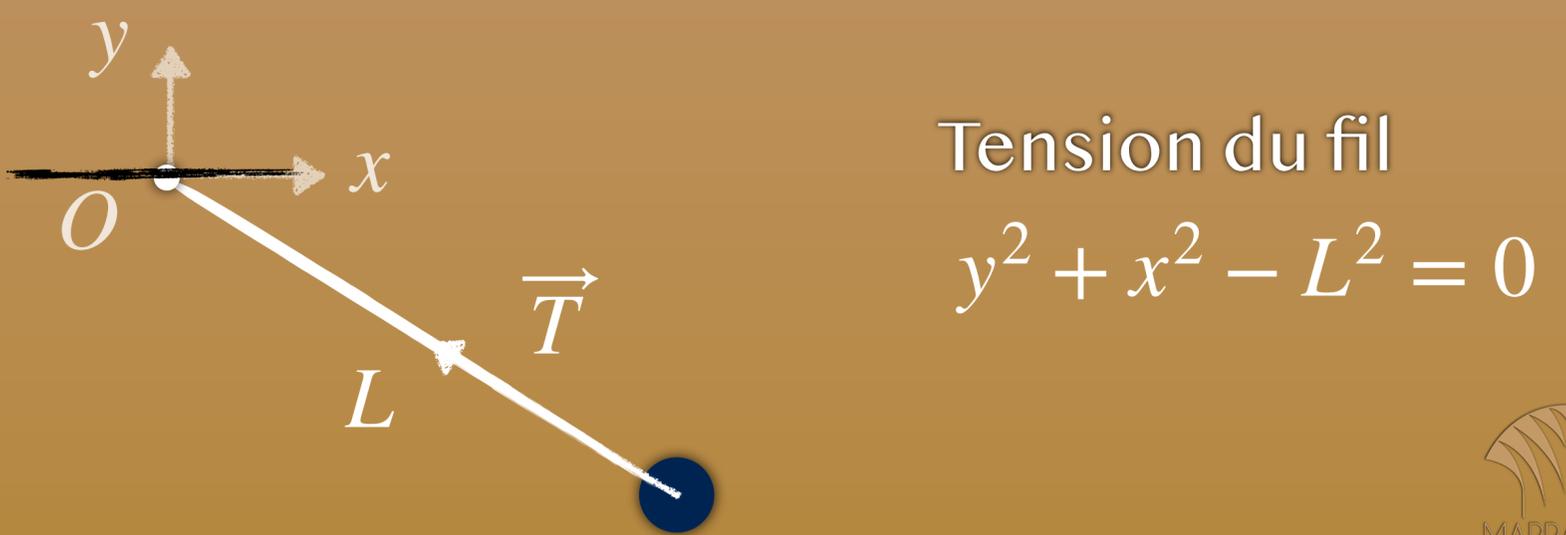
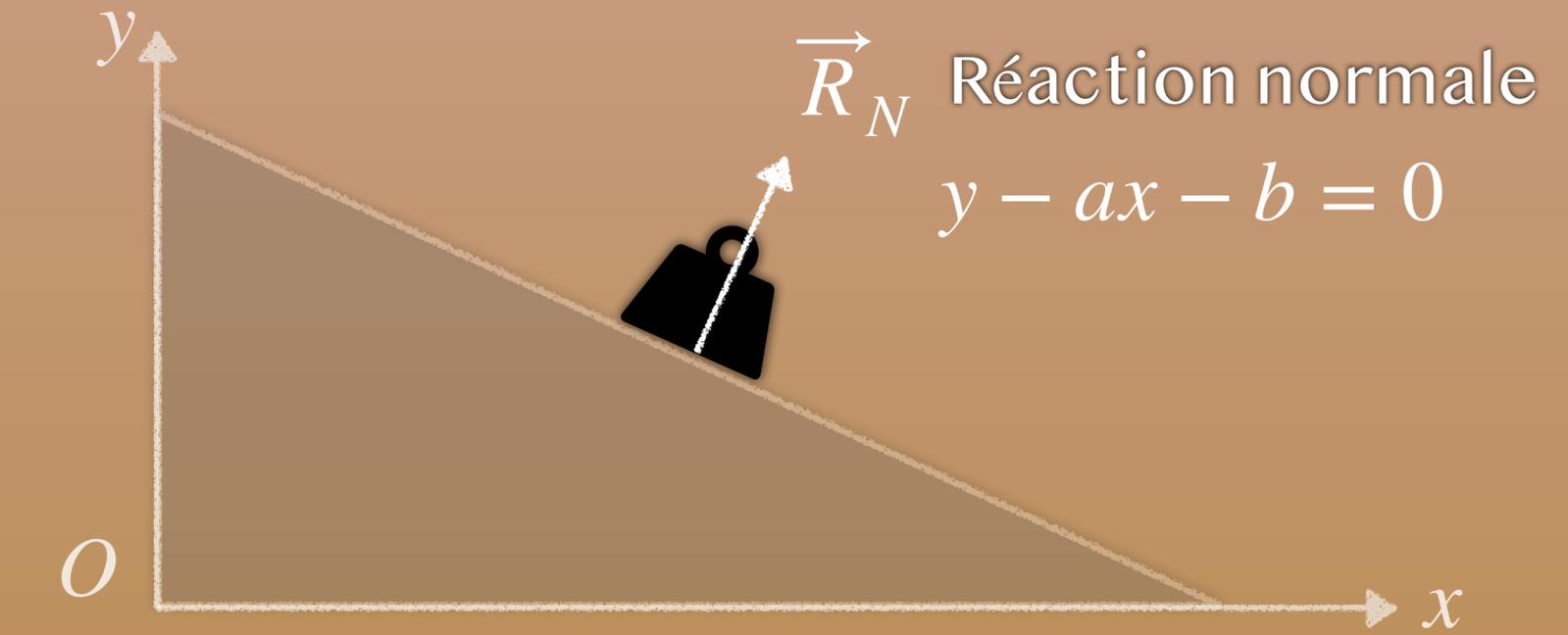
4.1 Types de liaison

Liaison géométrique

Concernant uniquement les positions et éventuellement le temps

$$f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_p; t) = 0$$

Exemples :



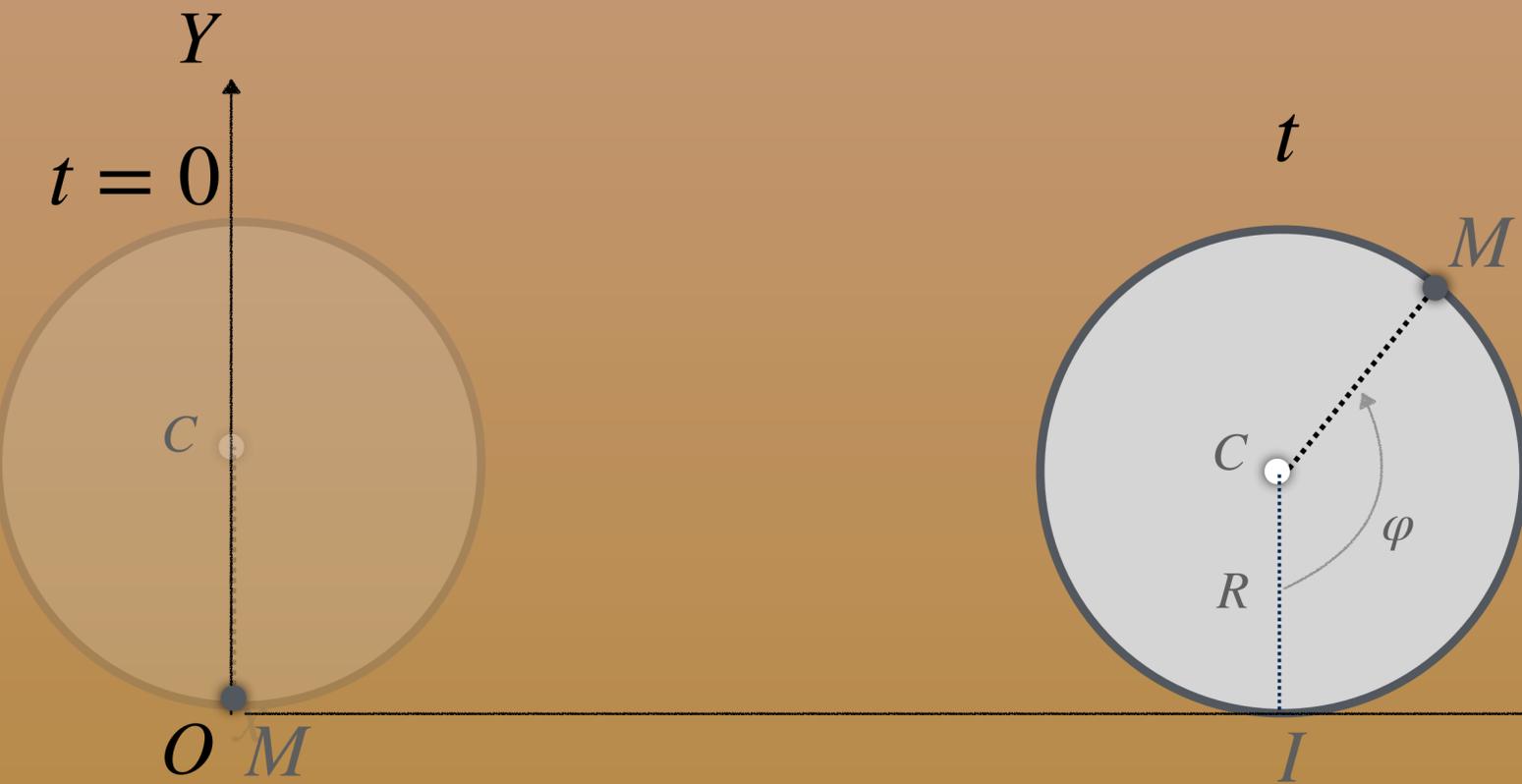
4.1 Types de liaison

Liaison cinématique

Concernant les vitesses et éventuellement les positions et le temps

$$f(\dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_p, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_p; t) = 0$$

Exemple :



Roulement sans glissement

$$\vec{V}(I \in S) = \vec{V}(I \in sol)$$

$$\vec{V}(I \in Sol) = \vec{0}$$

$$\vec{OI} = \vec{OC} + \vec{CI}$$

$$\begin{aligned} \vec{V}(I \in S) &= \dot{x}\vec{i} + (-\dot{\varphi}\vec{k}) \wedge R\vec{j} \\ &= (\dot{x} + R\dot{\varphi})\vec{i} \end{aligned}$$

$$\vec{V}(I \in S) = \vec{V}(I \in sol)$$

$$\dot{x} + R\dot{\varphi} = 0$$

X

4.1 Types de liaison

Liaisons scléronome et rhéonome

Définition

Une liaison est dite **scléronome** si l'équation de la contrainte **ne dépend pas** explicitement du **temps**. Dans **le cas contraire**, la liaison est dite **rhéonome**.

Liaison holonôme

Considérons un système repéré par n coordonnées (x_1, \dots, x_n) .

Définition

Lorsque l'équation de la liaison $f(x_1, \dots, x_n; t) = 0$ permet d'éliminer l'une des coordonnées $x_i = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ **la liaison est dite holonôme**.

Lorsque toutes les liaisons sont holonômes, **le système est dit holonôme**.

4.1 Types de liaison

4. Types de liaison

Liaison géométrique

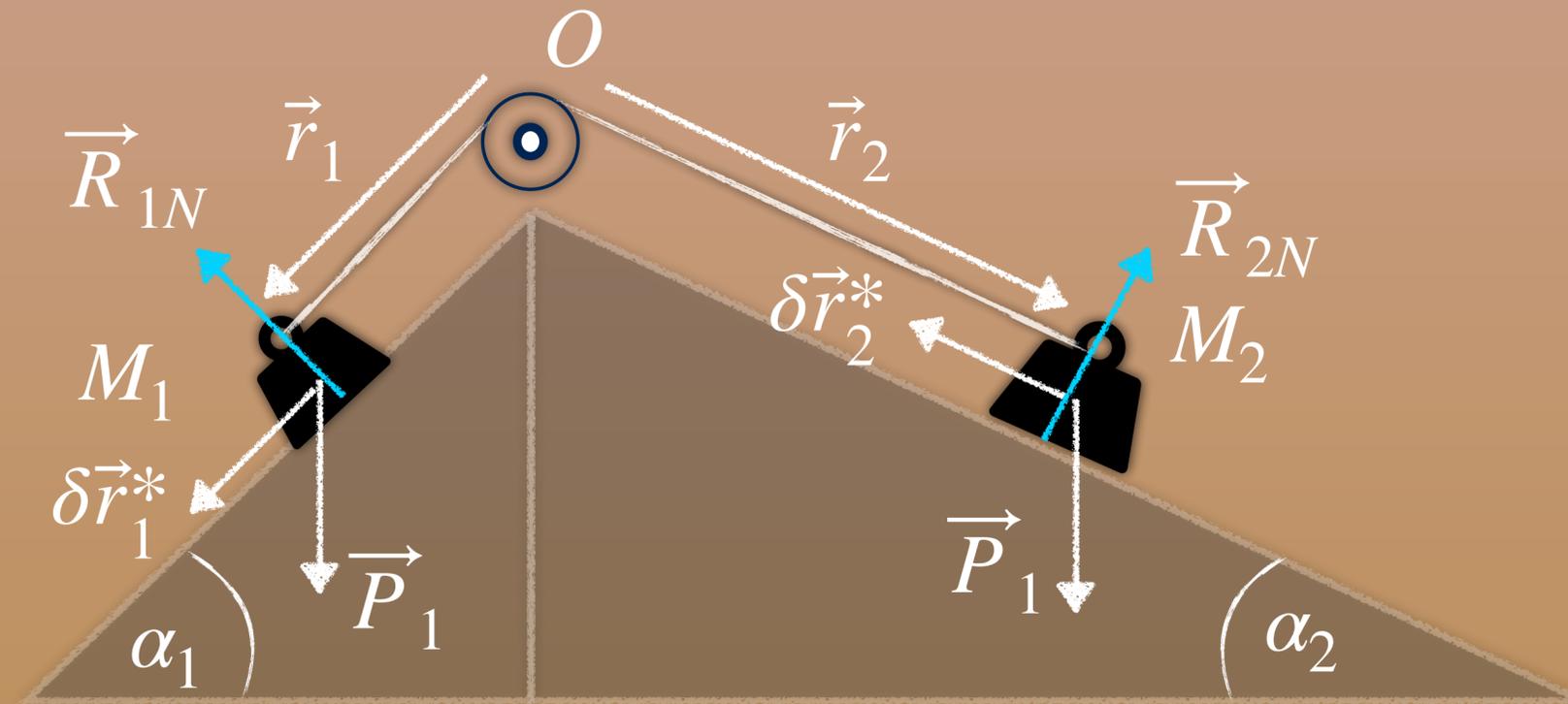
Liaison cinématique

Liaisons scléronome et rhéonome

Liaison holonôme

Exemples

Liaison holonôme scléronome



Double plan incliné

$$M_1 M_2 = L$$

$$\implies r_1 + r_2 = L \text{ avec } r_i = \|\vec{r}_i\|$$

$$\implies \|\delta\vec{r}_2\| = \|\delta\vec{r}_1\|$$

Déplacement virtuel $\delta\vec{r}_1^*$ et $\delta\vec{r}_2^*$

PTV

$$\vec{P}_1 \cdot \delta\vec{r}_1^* + \vec{R}_{1N} \cdot \delta\vec{r}_1^* + \vec{P}_2 \cdot \delta\vec{r}_2^* + \vec{R}_{2N} \cdot \delta\vec{r}_2^* = 0$$

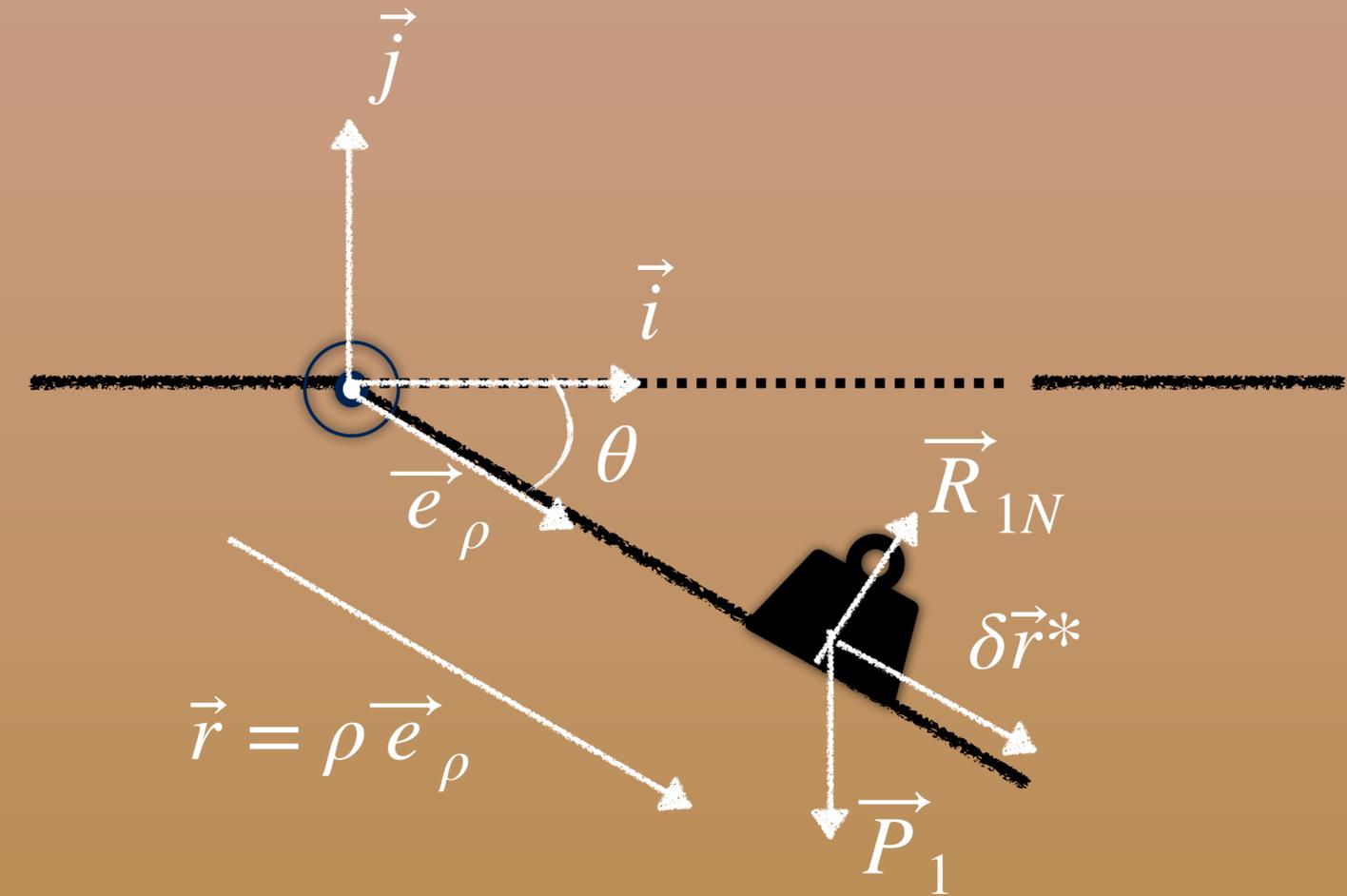
$$\implies P_1 \sin \alpha_1 \|\delta\vec{r}_1^*\| - P_2 \sin \alpha_1 \|\delta\vec{r}_2^*\| = 0$$

$$\implies (P_1 \sin \alpha_1 - P_2 \sin \alpha_1) \|\delta\vec{r}_1^*\| = 0 \implies M_1 \sin \alpha_1 = M_2 \sin \alpha_2$$

4.1 Types de liaison

Exemples

Liaison holonôme rhéonome



Trappe actionnée par un moteur $\theta = f(t)$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \rho \vec{e}_\rho \\ &= \rho (\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}) \\ &= \rho (\cos f(t) \vec{i} - \sin f(t) \vec{j}) \end{aligned}$$

On a éliminé θ

- 4. Types de liaison
- Liaison géométrique
- Liaison cinématique
- Liaisons scléronome et rhéonome
- Liaison holonôme

4.1 Types de liaison

Liaison non holonôme

Définition

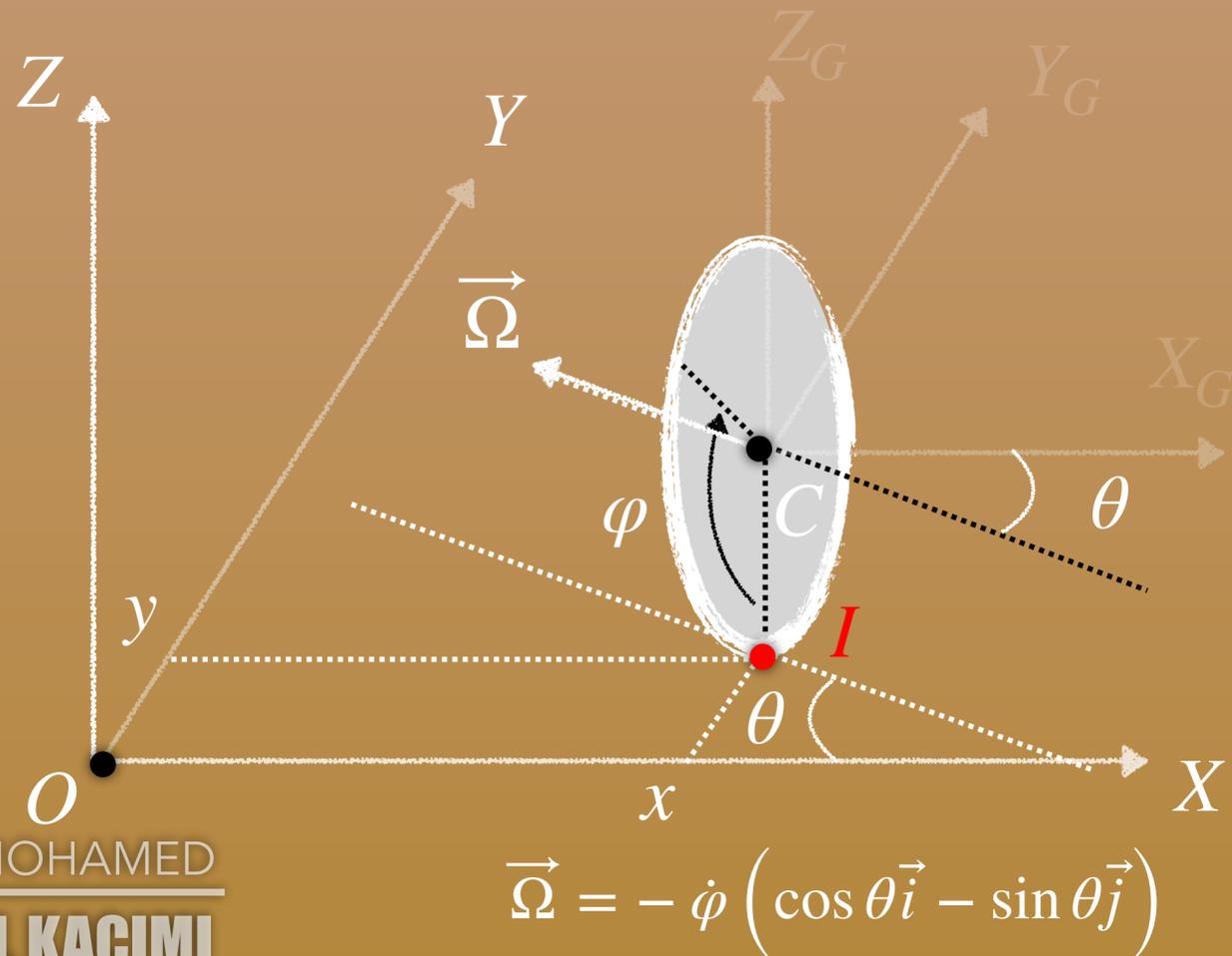
La liaison est dite non holonôme si l'équation de la contrainte ne permet pas d'éliminer une coordonnée en fonction des autres.

4. Types de liaison

- Liaison géométrique
- Liaison cinématique
- Liaisons scléronome et rhéonome
- Liaison holonôme

Exemple

Un disque vertical D qui **roule sans glissement** sur un plan



Le mouvement du disque est orienté par θ l'angle que fait l'axe du disque avec (OX) et l'angle φ qui repère la rotation du disque autour de son axe.

$$\begin{aligned} \vec{V}(I \in D) &= \vec{V}(C) + \vec{IC} \wedge \vec{\Omega} \\ &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + R\vec{k} \wedge (-\dot{\varphi})(\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}) \\ &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} - R\dot{\varphi} (\cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{i}) \\ &= (\dot{x}\vec{i} - R\dot{\varphi} \sin \theta) \vec{i} + (\dot{y}\vec{j} - R\dot{\varphi} \cos \theta) \vec{j} \end{aligned}$$

Roulement sans glissement

$$\implies \vec{V}(I \in D) - \vec{V}(I \in sol) = \vec{0}$$

$$\implies \vec{V}(I \in D) = \vec{0}$$

$$\implies \begin{cases} \dot{x} - R\dot{\varphi} \sin \theta = 0 \\ \dot{y} - R\dot{\varphi} \cos \theta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} dx - R d\varphi \sin \theta = 0 \\ dy - R d\varphi \cos \theta = 0 \end{cases}$$

Non intégrable!

On ne peut exprimer une coordonnée en fonction d'une autre

Liaison non holonôme

4.2 Exemples de liaisons mécanique Solide/Solide

4. Types de liaison

4.1 Types de liaison

Revenons sur quelques notions

Liaison : Modélise le comportement cinématique d'un système mécanique

Degré de liberté Un degré de liberté est l'un des mouvements indépendants autorisé par une liaison

⇒ Torseur cinématique : ● Chaque paramètre non nul correspond à un degré de liberté
● Chaque paramètre nul correspond à un degré de liaison (blocage)

$$\mathcal{V}(S/\mathcal{R}) = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}) \\ \vec{V}_{S/\mathcal{R}}(A) \end{Bmatrix}$$

Trois degrés de liberté de rotation

Trois degrés de liberté de rotation

Pour une liaison ⇒ **Nombre de degrés de liberté + Nombre de degrés de liaison = 6**

Il y a 12 liaisons usuelles.

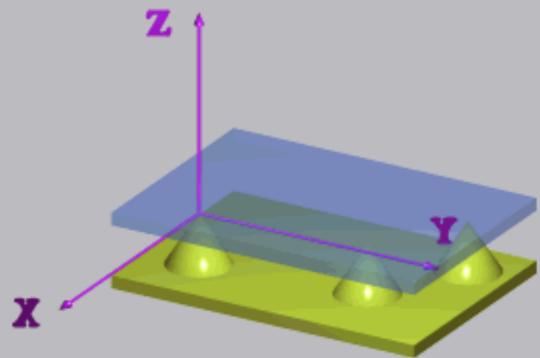
- Pas de jeu
- Solides indéformable
- Surface de contact non nulle

Liaisons simples

On considère des liaisons engendrées par le contact entre deux surfaces parmi les formes géométriques usuelles : **plan, cylindre et sphère**

⇒ Six combinaisons

1. Plan/Plan (appui plan)

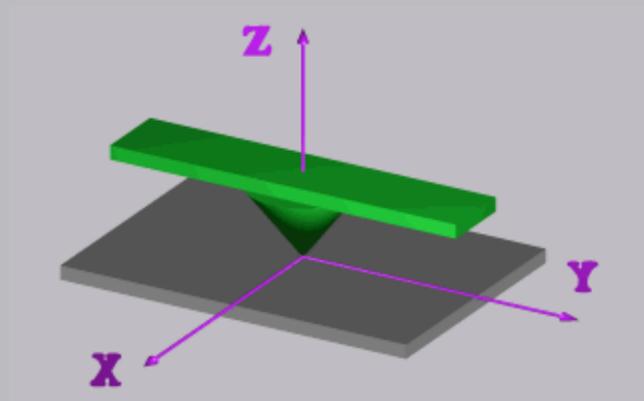


● 3 Degrés de liberté

2 Translation(s) selon (OX) et (OY)

1 Rotation(s) autour (OZ)

2. Sphère/Plan (ponctuelle)



● 5 Degrés de liberté

2 Translation(s) selon (OX) et (OY)

3 Rotation(s)

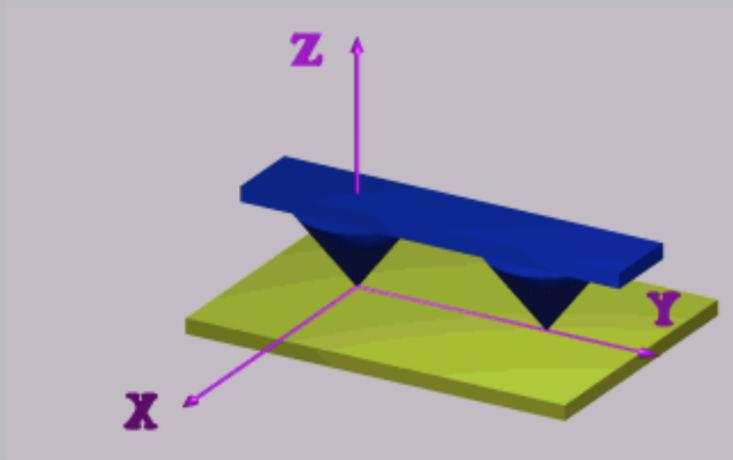
4. Types de liaison

4.1 Types de liaison

4.2 Exemples de liaisons mécanique Solide/Solide

Liaisons simples

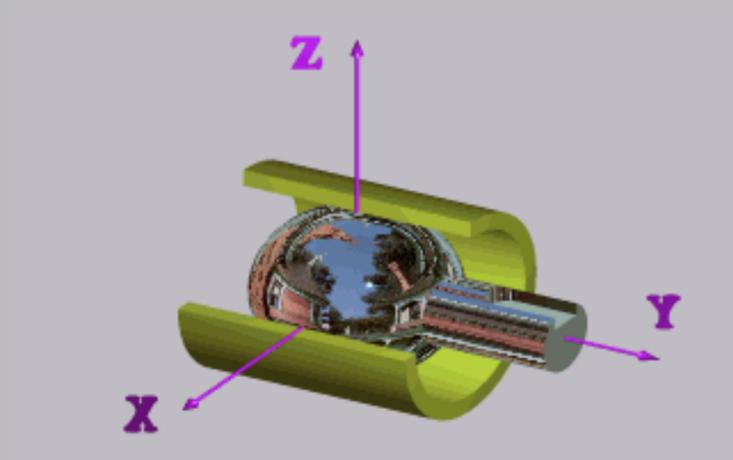
3. Cylindre/Plan (linéaire rectiligne)



● 4 Degrés de liberté

- 2 Translation(s) selon (OX) et (OY)
- 2 Rotation(s) autour (OY) et (OZ)

4. Sphère/Cylindre (linéaire annulaire)



● 4 Degrés de liberté

- 1 Translation(s) selon (OY)
- 3 Rotation(s)

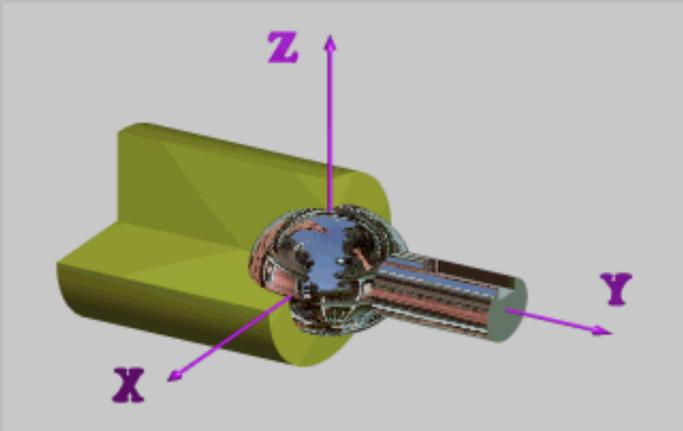
4. Types de liaison

4.1 Types de liaison

4.2 Exemples de liaisons mécanique Solide/Solide

Liaisons simples

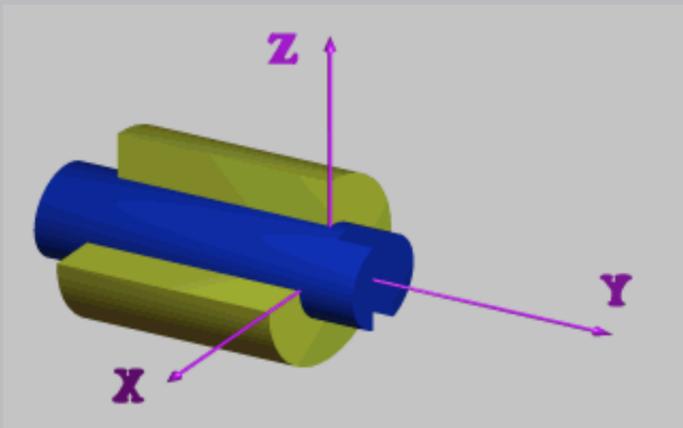
4. Sphère/Sphère (Rotule)



● 3 Degrés de liberté

3 Rotation(s)

4. Cylindre/Cylindre (Pivot glissant)



● 2 Degrés de liberté

1 Translation(s) selon (OY)

1 Rotation(s) autour (OY)

4. Types de liaison

4.1 Types de liaison

4.2 Exemples de liaisons mécanique Solide/Solide

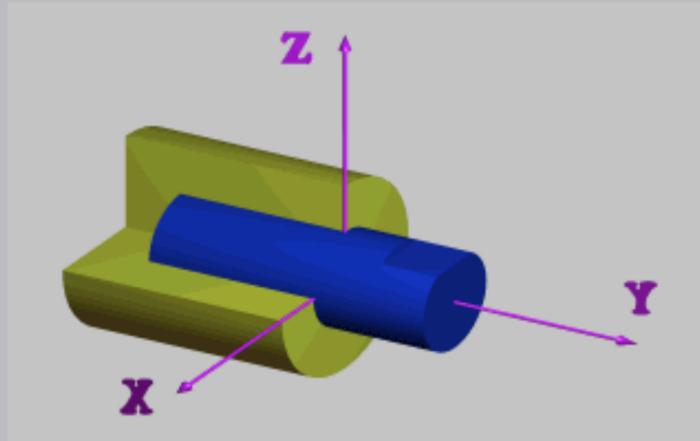
Liaisons composées

4. Types de liaison

4.1 Types de liaison

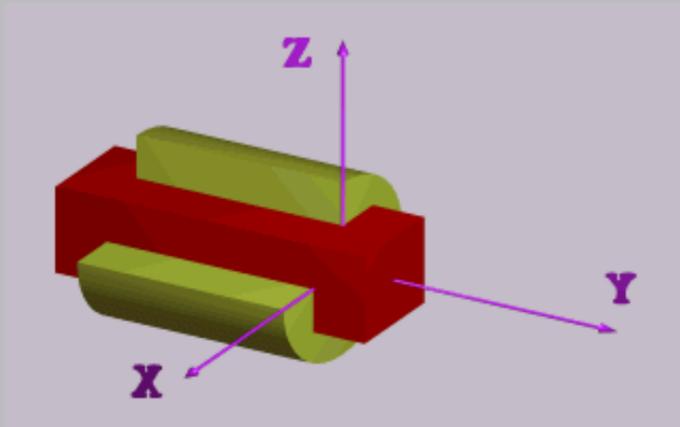
4.2 Exemples de liaisons mécanique Solide/Solide

7. Liaison Pivot : Pivot glissant dont on arrête la translation



- 1 Degré de liberté 1 Rotation autour (OY)

8. Liaison Glissière : Pivot glissant dont on arrête la rotation



- 1 Degré de liberté 1 translation autour (OY)

5. Coordonnées généralisées



Revenons sur la notion de degrés de liberté.

Considérons un système mécanique dont la position est décrite par n coordonnées (x_1, \dots, x_n) . Le système est soumis à m liaisons que l'on supposera dans un premier temps holonôme.

$\implies m$ coordonnées peuvent s'exprimer en fonction des autres

$\implies n - m$ coordonnées seulement sont nécessaires pour décrire le mouvement du système

Définition

On appelle par le nombre de degrés de liberté du système mécanique, k , le nombre de paramètres indépendants nécessaires pour la description du mouvement de ce système :

$$k = n - m$$

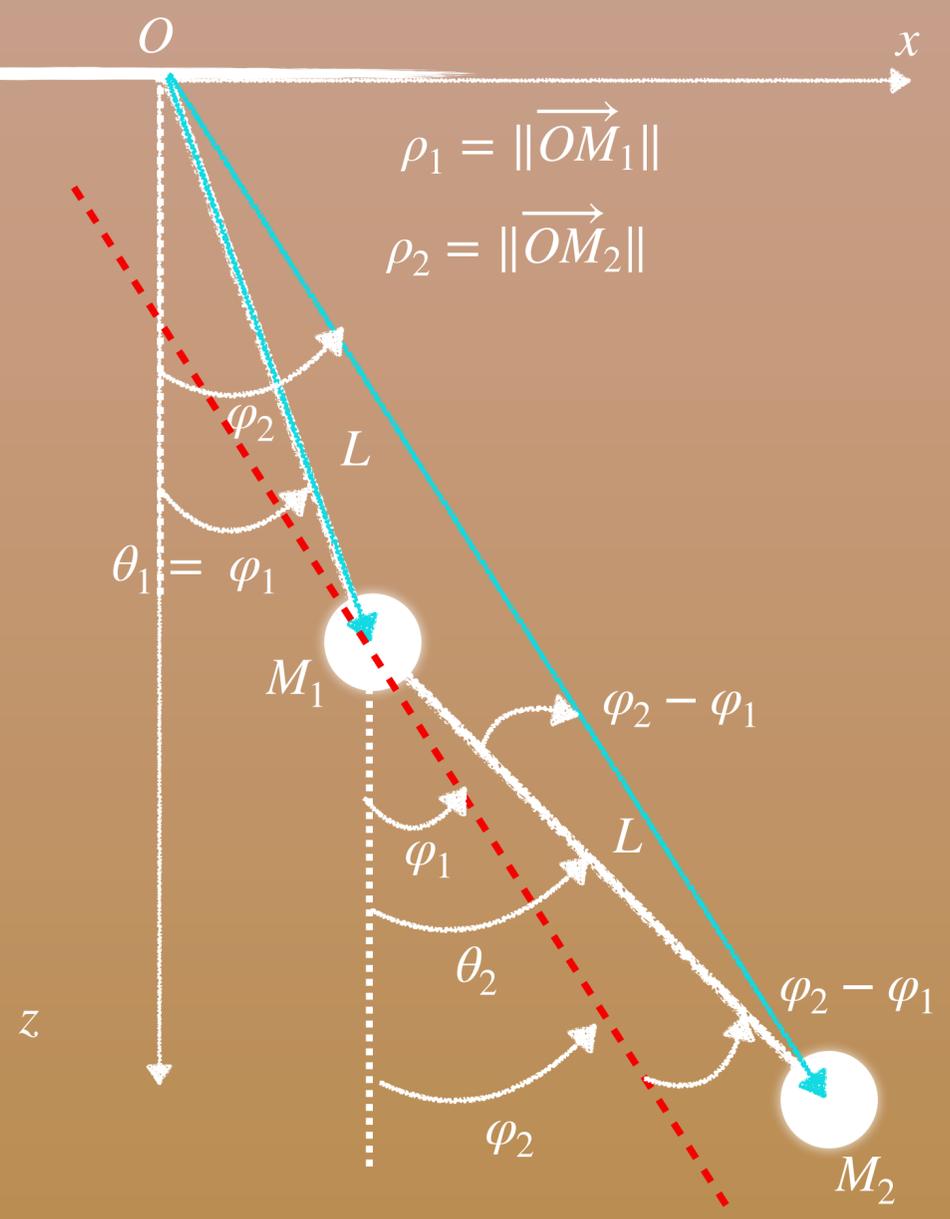
5.2 Coordonnées généralisées et vitesses généralisées

Définition

On appelle par **coordonnées généralisées**, notées (q_1, \dots, q_k) les coordonnées indépendantes suffisantes pour décrire le mouvement du système mécanique, où k le nombre de degrés de liberté $\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = 0$ $i, j = 1, \dots, k$ et $i \neq j$. $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k)$ sont appelées **vitesse généralisées**.

Exemple : Double pendule

Considérons un double pendule dont le mouvement se fait sur le plan (OXY)



M_1 et M_2 deux points matériels.
 Le système $(\Sigma) = (M_1 + M_2)$
 Coordonnées $(\rho_1, \varphi_1, y_1, \rho_2, \varphi_2, y_2)$
 Liaisons :

- Mouvement sur (OXY) $\implies y_1 = y_2 = 0$
 C'est une liaison géométrique 2 Contraintes
- fil 1 inextensible de longueur $L \implies \rho_1 = L$
 C'est une liaison géométrique holonôme scléronome
 1 Contrainte

- fil 2 inextensible de longueur L
 $\vec{OM}_2 = \vec{OM}_1 + \vec{M}_1M_2 \implies \|\vec{OM}_2\|^2 = \|\vec{OM}_1\|^2 + \|\vec{M}_1M_2\|^2 + 2\vec{OM}_1 \cdot \vec{OM}_2$ Voir diapo demo
 $\implies \rho_2 = \sqrt{2}L\sqrt{1 + \cos 2(\varphi_2 - \varphi_1)}$

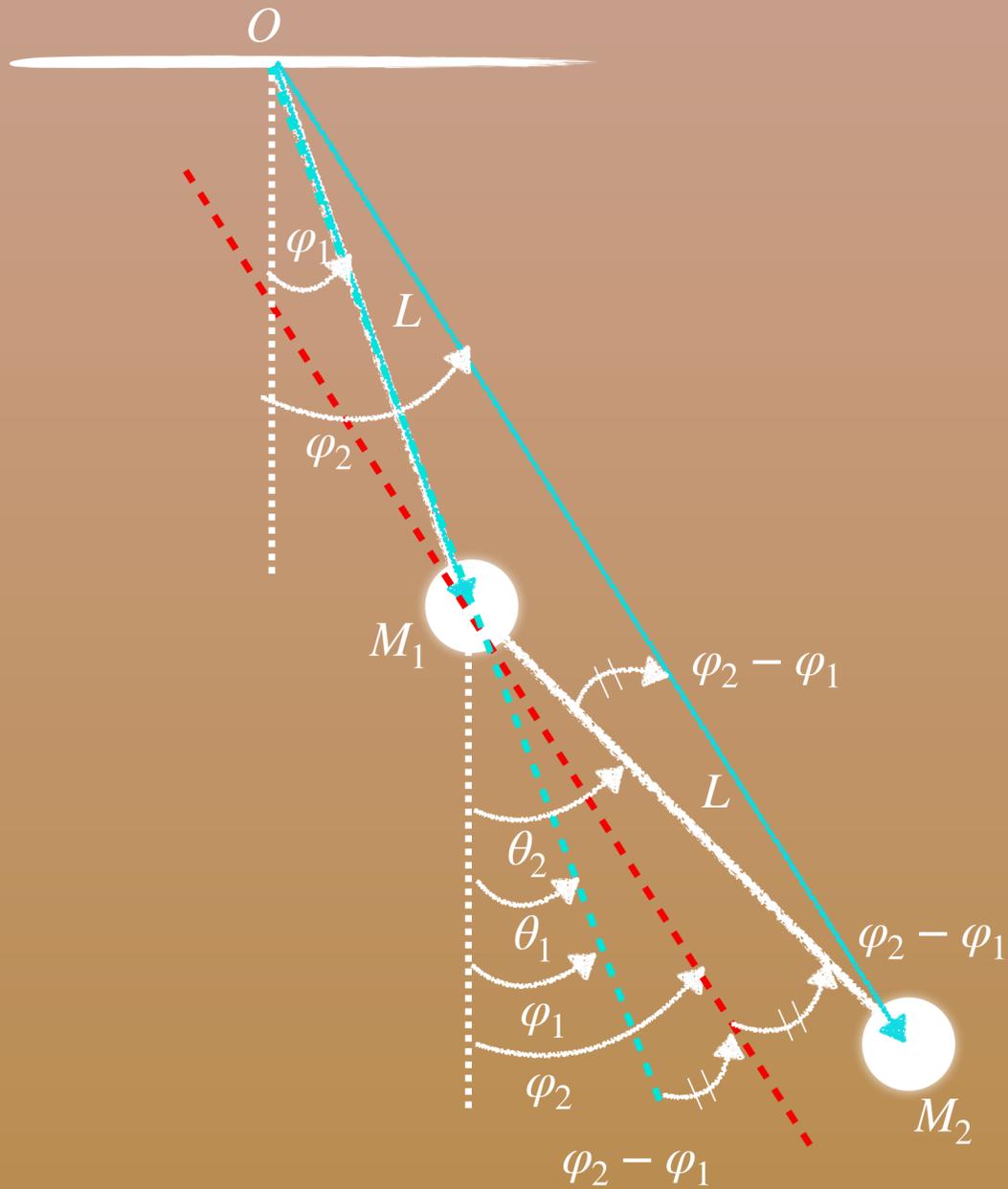
C'est une liaison géométrique holonôme scléronome 1 Contrainte

$$\left. \begin{array}{l} n = 6 \\ m = 4 \end{array} \right\} \implies k = 2 \text{ degrés de liberté}$$

\implies Coordonnées généralisées

$$q_1 = \theta_1 = \varphi_1$$

$$q_2 = \theta_2 = 2\varphi_2 - \varphi_1$$



(M_1OM_2) Triangle isocèle puisque $\|\overrightarrow{OM_1}\| = L = \|\overrightarrow{M_1M_2}\|$

$$\implies \widehat{(M_1M_2O)} = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\theta_1 = \varphi_1$$

$$\theta_2 = \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\theta_2 = 2(\varphi_2 - \varphi_1) + \varphi_1$$

$$\implies \theta_2 - \theta_1 = 2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\implies \widehat{(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{M_1M_2})} = 2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

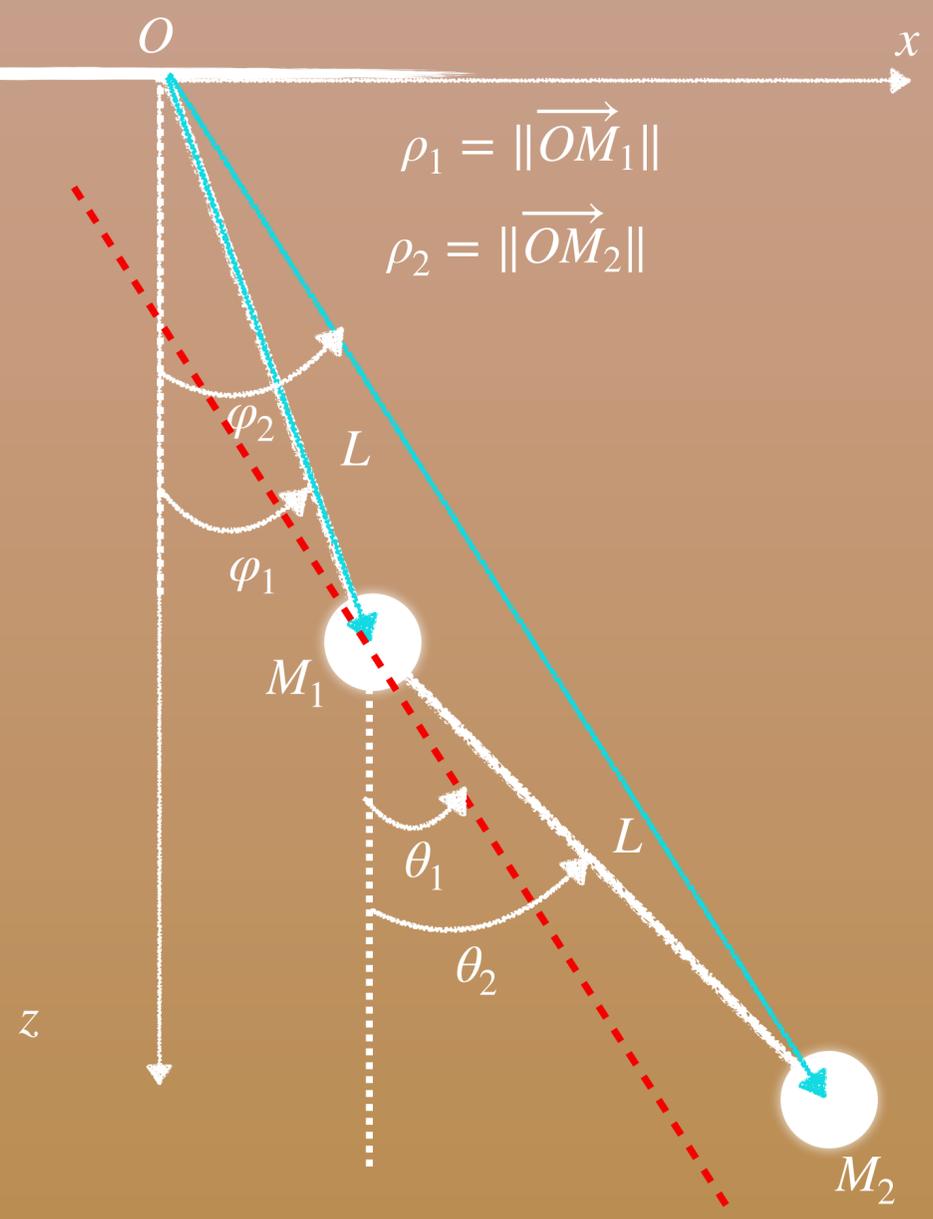
$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} \implies \|\overrightarrow{OM_2}\|^2 = \|\overrightarrow{OM_1}\|^2 + \|\overrightarrow{M_1M_2}\|^2 + 2\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$$

$$\implies \rho_2^2 = \rho_1^2 + L^2 + 2\rho_1L \cos 2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\implies \rho_2^2 = 2L^2 (1 + \cos 2(\varphi_2 - \varphi_1))$$

Aller diapositive suivante

Considérons un double pendule dont le mouvement se fait sur le plan (OXY)



M_1 et M_2 deux points matériels.
 Le système $(\Sigma) = (M_1 + M_2)$
 Coordonnées $(\rho_1, \varphi_1, y_1, \rho_2, \varphi_2, y_2)$
 Liaisons :

- Mouvement sur $(OXY) \implies y_1 = y_2 = 0$
 C'est une liaison géométrique 2 Contraintes
- fil 1 inextensible de longueur $L \implies \rho_1 = L$
 C'est une liaison géométrique holonôme scléronome
 1 Contrainte
- fil 2 inextensible de longueur L

$$\vec{OM}_2 = \vec{OM}_1 + \vec{M}_1\vec{M}_2 \implies \|\vec{OM}_2\|^2 = \|\vec{OM}_1\|^2 + \|\vec{M}_1\vec{M}_2\|^2 + 2\vec{OM}_1 \cdot \vec{M}_1\vec{M}_2$$

$$\implies \rho_2 = \sqrt{2}L\sqrt{1 + \cos 2(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

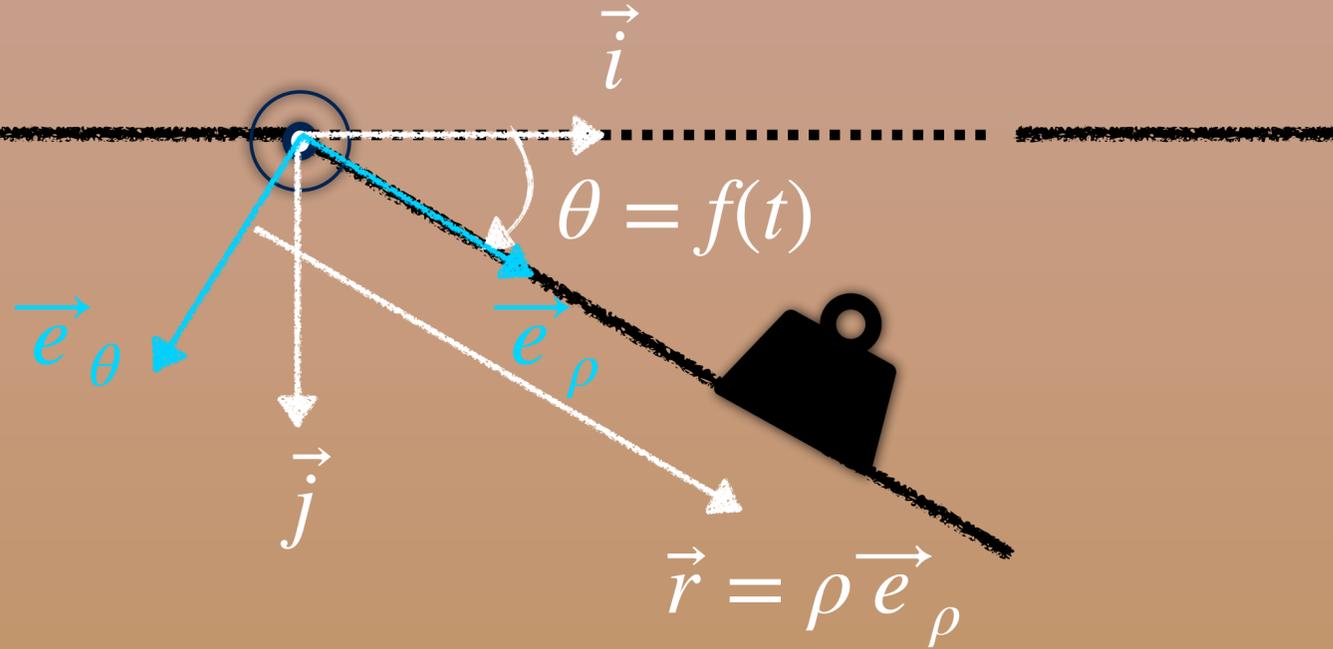
C'est une liaison géométrique holonôme scléronome 1 Contrainte

$$\left. \begin{array}{l} n = 6 \\ m = 4 \end{array} \right\} \implies k = 2 \text{ degrés de liberté}$$

\implies Coordonnées généralisées

$$q_1 = \theta_1 = \varphi_1$$

$$q_2 = \theta_2 = 2\varphi_2 - \varphi_1$$



$$\begin{aligned} \vec{r} &= \rho \vec{e}_\rho \\ &= \rho \left(\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j} \right) \quad \theta = f(t) \\ &= \rho \left(\cos f(t) \vec{i} - \sin f(t) \vec{j} \right) \end{aligned}$$

Liaison holonôme rhéonome 1 contrainte

Trappe actionnée par un moteur $\theta = f(t)$

$$\left. \begin{array}{l} n = 6 \\ m = 4 \end{array} \right\} \implies k = 2 \text{ degrés de liberté}$$

\implies Coordonnées généralisées $q = \rho$

6. Forces généralisées

Soient (q_1, \dots, q_k) les coordonnées généralisées décrivant un système mécanique à k degrés de liberté soumis à p forces. Cela implique que

$\vec{r} = \vec{r}(q_1, \dots, q_k) \implies \delta\vec{r}^* = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_i} \delta q_i$ et les travaux virtuels s'écrivent alors comme

$$\delta W^* = \sum_{i=1}^p \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}^* = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^k \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^p \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_j} \right) \delta q_j$$

On pose $Q_j = \sum_{i=1}^p \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_j} \implies \delta W^* = \sum_{j=1}^k Q_j \delta q_j$

Définition

On appelle par force généralisée la quantité

$$Q_j = \sum_{i=1}^p \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial q_j}$$

et le principe des travaux virtuels se formule comme suit

$$\delta W^* = \sum_{i=1}^k Q_i \delta q_i = 0$$

q_i n'a pas forcément la dimension d'une longueur

Q_i n'a pas forcément la dimension d'une force

$Q_i \delta q_i$ a toujours la dimension d'un travail (énergie)

Si la force dérive d'un potentiel $F_i = -\nabla_i V$

alors $Q_j = - \sum_{i=1}^p \frac{\partial V}{\partial r_i^*} \frac{\partial r_i^*}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^p \frac{\partial V}{\partial q_j}$

7. Principe de d'Alembert



d'Alembert a généralisé le PTV au cas dynamique

Considérons un système formé de N solides chacun étant soumis à une résultante de forces \vec{F}_i et ayant une quantité de mouvement \vec{p}_i . Si l'on applique le PFD au solide $(S_i) : (\Sigma) = \sum_{i=1}^N S_i$

$$\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i$$

Si l'on considère que $\dot{\vec{p}}_i$ comme une force d'inertie, alors l'équation $\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = \vec{0}$ exprime l'équilibre du solide (S_i) .

On peut appliquer par conséquent le PTV $(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i^* = 0$ où $\delta\vec{r}_i^* = 0$ est **un déplacement virtuel compatible**

du solide. Ce résultat est valable pour chacun des solides, alors il est valable pour le système (Σ) :

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i^* = 0.$$

Si l'on considère un déplacement virtuel compatible et que $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ac} + \vec{F}_i^{contr}$ alors on peut énoncer le principe.

Principe de d'Alembert

La somme des travaux virtuels des forces actives et des forces d'inertie d'un système est nulle

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{ac} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i^* = 0.$$

Exemple :

Reprenons l'exemple du système à poulies
En utilisant le principe de d'Alembert, retrouvons
l'expression de l'accélération \ddot{r}_2 de M_2 .

Effectuons un déplacement virtuel compatible δr_1^* alors $\delta r_2^* = \|\delta \vec{r}_2^*\| = 2\delta r_1^*$

Ce qui donne pour le déplacement réel $dr_2 = 2dr_1 \implies \dot{r}_2 = 2\dot{r}_1$

Le principe de d'Alembert, donne

$$\left(\vec{P}_1 - m_1 \ddot{r}_1\right) \cdot \delta \vec{r}_1^* + \left(\vec{P}_2 - m_2 \ddot{r}_2\right) \cdot \delta \vec{r}_2^* = 0$$

$$\vec{P}_1 \cdot \delta \vec{r}_1^* - m_1 \ddot{r}_1 \cdot \delta \vec{r}_1^* + \vec{P}_2 \cdot \delta \vec{r}_2^* - m_2 \ddot{r}_2 \cdot \delta \vec{r}_2^* = 0$$

$$-m_1 g \delta r_1^* - m_1 \ddot{r}_1 \delta r_1^* + m_2 g \delta r_2^* - m_2 \ddot{r}_2 \delta r_2^* = 0$$

$$\left[-m_1(g + \ddot{r}_1) + 2m_2(g - \ddot{r}_2)\right] \delta r_1^* = 0 \quad \forall \delta r_1^*$$

$$-m_1\left(g + \frac{1}{2}\ddot{r}_2\right) + 2m_2(g - \ddot{r}_2) = 0$$

$$\ddot{r}_2 \left(2m_2 + \frac{m_1}{2}\right) = g(2m_2 - m_1)$$

$$\ddot{r}_2 = g \frac{4m_2 - 2m_1}{4m_2 + m_1}$$

