

# MÉCANIQUE ANALYTIQUE & VIBRATIONS

## Formalisme de Hamilton

Mohamed EL KACIMI

Université Cadi Ayyad - Faculté des Sciences Semlalia  
Département de Physique

*Année Universitaire 2017/2018*

# Chapitre I : Formalisme de Lagrange

1. Introduction
2. Coordonnées généralisées
3. Conditions de liaisons
4. Equations de Lagrange
5. Multiplicateurs de Lagrange
6. Symétries et lois de conservation

# Chapitre I : Formalisme Lagrangien

1. Introduction
2. Coordonnées généralisées
3. Conditions de liaisons
4. Equations de Lagrange
5. Multiplicateurs de Lagrange
6. Symétries et lois de conservation

# Introduction

Le formalisme de la mécanique analytique n'apporte pas de nouveauté conceptuelle par rapport au formalisme de la dynamique Newtonienne.

La formulation de la mécanique analytique est :

- mieux adaptée à de nombreux domaines de la physique moderne ;
- à l'origine de la quantification des dynamiques classiques ;
- adaptée à la formulation des modèles des interactions fondamentales en se basant sur les symétries de Jauge ;

# Chapitre I : Formalisme Lagrangien

1. Introduction
- 2. Coordonnées généralisées**
3. Conditions de liaisons
4. Equations de Lagrange
5. Multiplicateurs de Lagrange
6. Symétries et lois de conservation

# Coordonnées généralisées

## Définitions

Considérons un système mécanique constitué par  $N$  points matériels  $\Rightarrow$  positions  $\{\vec{r}_\alpha; \alpha = 1, \dots, N\}$  et vitesses  $\{\vec{v}_\alpha = \dot{\vec{r}}_\alpha; \alpha = 1, \dots, N\}$

L'approche standard de la mécanique Newtonnienne :

$\rightarrow$  relier les quantités de mouvement aux forces

$\Rightarrow$  équations différentielles vectérielles de 2<sup>ème</sup> ordre

$$\sum_{\alpha=1, N} \frac{d[m_\alpha \vec{v}_\alpha]}{dt} = \sum_{\alpha=1, N} \text{Forces extérieures}$$

$\Rightarrow$  expressions des forces + conditions initiales sur  $\vec{r}_\alpha$  et  $\vec{v}_\alpha$

$\Rightarrow$  Résolution du mouvement

$\Rightarrow$  Etat dynamique du système est déterminé par

$\{(\vec{r}_\alpha, \vec{v}_\alpha); \alpha = 1, \dots, N\}$

# Coordonnées généralisées

## Définitions

Toutefois, en présence des forces de liaison (mal connues)

⇒ relation entre les positions et parfois les vitesses : **les 3N coordonnées ne sont pas toutes indépendantes** ;

⇒ forces de liaison dans les équations du mouvement

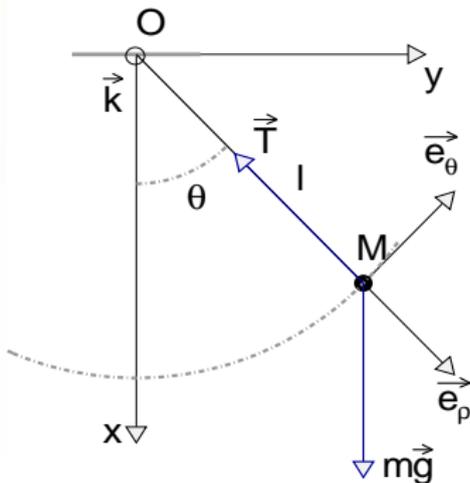
$$\sum_{\alpha=1,N} \frac{d[m_{\alpha}\vec{v}_{\alpha}]}{dt} = \sum_{\alpha=1,N} \text{Forces extérieures} + \sum \text{Forces de liaison}$$

⇒ la résolution des équations du mouvement devient fastidieuse :  
**Elimination des forces de liaison en utilisant un système de coordonnées bien adapté**

# Coordonnées généralisées

## Définitions

### Exemple



- Pendule simple de longueur  $L$  :

►  $N=1 \implies 3$  coordonnées pour décrire la position :  $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = (x, y, z)$ ,

► Mouvement dans le plan  $(Oxy) \implies z = 0$  ;

► force de liaison = Tension du fil  $\vec{T}$ , fil inextensible  $\implies$  contrainte  $x^2 + y^2 = L^2$  :

► Elimination de  $\vec{T}$  en utilisant les coordonnées polaires  $\vec{r} = (r, \theta) \implies$  Projection sur  $\vec{e}_\theta$ .

# Coordonnées généralisées

## Définitions

L'approche standard de la mécanique analytique permet de :

- ⇒ éliminer les forces de liaison ;
- ⇒ utiliser seulement les coordonnées indépendantes.



### Définition

Soit  $k$  le nombre de relations entre les  $3N$  coordonnées d'un système mécanique. On définit le nombre de degrés de liberté  $d$  du système par

$$d = 3N - k.$$

Le nombre de degrés de liberté d'un système mécanique est le nombre de coordonnées indépendantes décrivant le système.

# Coordonnées généralisées

## Définitions



### Définition

On appelle par coordonnées généralisées tout jeu de  $d$  coordonnées indépendantes permettant de décrire le mouvement du système. Elles sont notées  $q_k, k = 1, \dots, d$ .



### Remarques

- Les coordonnées généralisées sont de nature arbitraire et peuvent avoir la dimension d'une longueur, d'un angle,  $\dots$ . Cependant ces coordonnées décrivent de manière univoque l'état mécanique du système.
- Les coordonnées du système  $\vec{r}_\alpha$  et les vitesses  $\vec{v}_\alpha$  s'expriment en fonction des coordonnées généralisées comme suit

$$\vec{r}_\alpha(t) = \vec{f}(q_1, \dots, q_d, t) \quad \text{et} \quad \vec{v}_\alpha = \frac{d}{dt} \vec{f}(q_1, \dots, q_d, t) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial \vec{f}_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{f}_\alpha}{\partial t}.$$

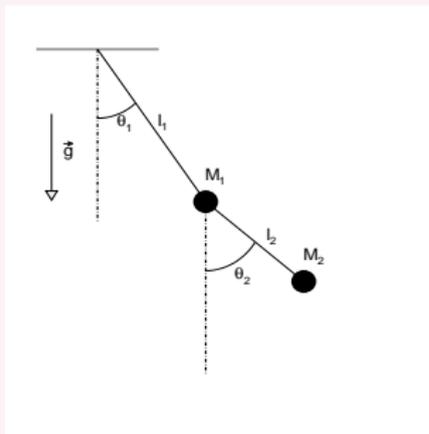
# Coordonnées généralisées

Exemple : pour se fixer les idées ...



## Exercice

Pour se fixer les idées, prenons l'exemple du double pendule dont le mouvement se fait dans le plan  $Oxy$ , figure ci-contre.  
Retrouver le nombre de degrés de liberté.



# Coordonnées généralisées

Exemple : pour se fixer les idées ...



## Solution

- Mouvement dans le plan  $Oxy$  ce qui donne les deux relations  $z_1 = 0$  et  $z_2 = 0$ .
- les fils sont de longueur fixe, ce qui implique que

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{OM}_1\| &= r_1 = l_1 \\ \|\overrightarrow{OM}_2\|^2 &= \|\overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{M_1M_2}\|^2 = r_2^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2\cos(\theta_2 - \theta_1). \end{cases}$$

Aussi, nous obtenons deux relations entre les coordonnées. La première qui fixe  $r_1$  à  $l_1$  et la deuxième exprime  $r_2$  en fonction de  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , ce qui veut dire que la connaissance des deux angles suffit pour déterminer  $r_2$ .

D'où le mouvement du système peut être décrit seulement par deux coordonnées  $(\theta_1, \theta_2)$ .

# Chapitre I : Formalisme Lagrangien

1. Introduction
2. Coordonnées généralisées
- 3. Conditions de liaisons**
4. Equations de Lagrange
5. Multiplicateurs de Lagrange
6. Symétries et lois de conservation

# Conditions de liaisons

## Conditions de liaisons

L'effet d'une liaison  $\Rightarrow$  réduire le nombre de mouvements possibles :



Les contraintes engendrées par les forces de liaison peuvent être exprimées en fonction des positions, ou des vitesses, ou des deux à la fois.

### Liaisons unilatérales et bilatérales

Considérons un point matériel  $M$  se déplaçant sur une surface  $\mathcal{S}$ , considéré comme un solide rigide avec lequel  $M$  est en contact.

Liaison unilatérale a pour loi de contact : **(Non holonôme)**

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = N > 0 \quad \text{et} \quad \vec{F}(\mathcal{S} \rightarrow M) = \vec{N}(\mathcal{S} \rightarrow M) + \vec{T}(\mathcal{S} \rightarrow M)$$

Liaison bilatérale a pour loi de contact :

$$\vec{F}(\mathcal{S} \rightarrow M) = \vec{N}(\mathcal{S} \rightarrow M) + \vec{T}(\mathcal{S} \rightarrow M) \quad \text{Pas de contrainte sur le sens!}$$

# Conditions de liaisons

## Liaisons holonômes



### Définition

On appelle liaisons holonômes, appelées aussi liaisons géométriques, toutes liaisons, de contact ou à distance, engendrant des relations entre les coordonnées du systèmes et éventuellement le temps comme suit

$$f_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad \text{où} \quad i = 1, \dots, k$$

Les relations entre les coordonnées, conditions imposées par les liaisons, sont appelées des contraintes.

⇒  $f_i$  sont différentiables en tout point.

⇒ permet de réduire le nombre de coordonnées initiales d'une unité.

# Conditions de liaisons

## Liaisons holonômes : Exemples



### Exemple

- Pendule simple de longueur  $L$  : la force de liaison est la tension du fil. Si le mouvement du pendule est dans le plan  $(Oxy)$ , alors la contrainte est  $x^2 + y^2 = L^2$  qui est holonôme.
- Pendule double de l'exercice précédent : nous sommes en présence de deux forces de liaison que sont les tensions des fils. Les contraintes générées par ces forces sont  $r_1 - l_1 = 0$  et  $r_2^2 - r_1^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1) = 0$ . Ces contraintes sont holonômes. Notons bien que nous avons utilisés les coordonnées cylindriques.

# Conditions de liaisons

## Liaisons non holonômes



### Définition

Une liaison est dite non holonôme si la contrainte engendrée s'exprime par une relation entre les coordonnées de position et les dérivées premières par rapport au temps de ces coordonnées et éventuellement le temps comme suit

$$f_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t) = 0 \quad \text{où} \quad i = 1, \dots, k.$$

La relation de la liaison n'est pas intégrable par rapport au temps.

La liaison non holonôme est appelée aussi liaison cinématique étant donné qu'elle contraint également les vitesses.

# Conditions de liaisons

## Liaison non holonôme : Exemple



### Exemple

La condition de roulement sans glissement d'une sphère ( $S$ ), de rayon  $R$  et de centre de masse  $G(x_G, y_G, z_G)$ , sur le plan ( $Oxy$ ) s'écrit comme suit

$$\vec{V}(I \in S/\mathcal{R}) = \vec{0}$$

où cette dernière est la vitesse de glissement de ( $S$ ) par rapport au repère  $\mathcal{R}$  au point de contact  $I$ .

La sphère possède six possibilités de mouvement, trois translations et trois rotations. La sphère doit rester en contact avec le plan ce qui implique la relation  $z_G = R$ , réduisant le nombre de degré de liberté à 5 :  $(x_G, y_G, \psi, \theta, \phi)$  ; ces derniers étant les trois angles d'Euler. La condition de roulement sans glissement s'exprime par

$$\begin{aligned}\dot{x}_G - R(\dot{\theta}\sin\psi - \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi) &= 0 \\ \dot{y}_G - R(\dot{\theta}\cos\psi - \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi) &= 0.\end{aligned}$$

Les deux dernières relations mettent en jeu les dérivées premières par rapport au temps et ne sont pas intégrables. D'où la liaison entre la sphère et le plan n'est pas holonôme et ne peut donc pas réduire le nombre de coordonnées.

# Conditions de liaisons

## Liaisons holonômes et le temps



On distingue deux classes de contraintes holonômes. Les contraintes sont dites scléronomes si elles ne dépendent pas explicitement du temps. Dans le cas contraire, elles sont dites rhéonomes.



### Définition

Une liaison est dite principale<sup>a</sup> lorsque la contrainte issue de la liaison est utilisée pour réduire le nombre de coordonnées. Elle est dite secondaire dans le cas contraire.

---

a. primaire ou primitive

La physique moderne est essentiellement sub-atomique et l'on est rarement confronté aux contraintes et quand elles apparaissent dans un problème, elles sont holonômes.

# Conditions de liaisons

## Liaisons dans le cas de solides : Torseur des actions de contact

Rappelons que le torseur des actions de contact, dont les éléments de réduction exprimés au centre de la liaison  $A$  par rapport à un repère  $\mathcal{R}$ , sont donnés par

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{cc} R_x & \mathcal{M}_x \\ R_y & \mathcal{M}_y \\ R_z & \mathcal{M}_z \end{array} \right\}_{\mathcal{R}, A}$$

où  $R_i$  et  $\mathcal{M}_i$  sont respectivement les composantes de la résultante des réactions appliquées au solide et leurs moments par rapport au point  $A$  dans  $\mathcal{R}$ .

# Conditions de liaisons

## Effets des degrés de liaison sur le mouvement d'un solide



⇒ Tout degré de liaison de translation selon un axe  $\Delta$  implique que la composante de  $\vec{R}$  selon  $\Delta$  est non nulle.

*Nous pouvons raisonner également comme suit : tout degré de liberté de translation selon l'axe  $\Delta$  implique que la composante de  $\vec{R}$  selon  $\Delta$  est nulle.*

⇒ Tout degré de liaison de rotation selon un axe  $\Delta$  implique que la composante de  $\vec{M}$  selon  $\Delta$  est non nulle.

*Nous pouvons raisonner également comme suit : tout degré de liberté de rotation selon l'axe  $\Delta$  implique que la composante de  $\vec{M}$  selon  $\Delta$  est nulle.*

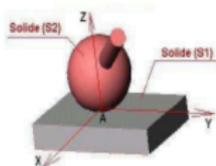
# Conditions de liaisons

## Liaisons élémentaires : Torseur des actions de contact $\mathcal{F}$

### Liaisons élémentaires

Considérons le cas simple où le système est formé par deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) et que le torseur des actions de l'un est  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(1 \rightarrow 2)$ .

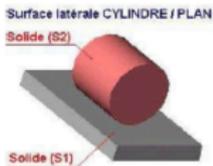
#### Liaison ponctuelle : Sphère sur plan



Cette liaison a un degré de liaison de translation selon l'axe perpendiculaire à la surface de contact,  $Oz$  pour l'exemple.

$$\mathcal{F} = \begin{matrix} A \\ \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_z \neq 0 & 0 \end{array} \right\} \end{matrix}_{\mathcal{R}} \quad \text{Nb. d.d.l} = 5.$$

#### Liaison linéique réctiligne : Cylindre/Plan



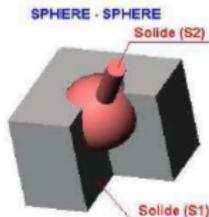
Cette liaison a deux degrés de liaison : un degré de translation selon  $Ox$  et un degré de rotation selon  $Oy$ .

$$\mathcal{F} = \begin{matrix} A \\ \left\{ \begin{array}{cc} R_x & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_y \\ 0 & 0 \end{array} \right\} \end{matrix}_{\mathcal{R}} \quad \text{Nb. d.d.l} = 4.$$

# Conditions de liaisons

## Liaisons élémentaires : Torseur des actions de contact $\mathcal{F}$

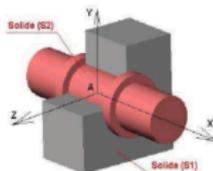
### Liaison rotule : sphère/sphère



Cette liaison a trois degrés de liaison : les trois translations.  
 Seules sont permises les trois mouvements de rotation.

$$\mathcal{F} = \begin{matrix} A \\ \left\{ \begin{array}{cc} R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ R_z & 0 \end{array} \right\} \mathcal{R} \end{matrix} \quad \text{Nb. d.d.l} = 3.$$

### Liaison pivot : Cylindre/Cylindre



Cette liaison a cinq degrés de liaison : trois degrés de translation et deux degrés de rotation.

$$\mathcal{F} = \begin{matrix} A \\ \left\{ \begin{array}{cc} R_x & 0 \\ R_y & \mathcal{M}_y \\ R_z & \mathcal{M}_z \end{array} \right\} \mathcal{R} \end{matrix} \quad \text{Nb. d.d.l} = 1.$$

# Chapitre I : Formalisme Lagrangien

1. Introduction
2. Coordonnées généralisées
3. Conditions de liaisons
- 4. Equations de Lagrange**
5. Multiplicateurs de Lagrange
6. Symétries et lois de conservation

# Equations de Lagrange

Les équations de Lagrange, dites aussi équations d'Euler-Lagrange, décrivent la dynamique du système par le biais d'une fonctionnelle que l'on appelle la fonction de Lagrange et que l'on note

$$L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

et qui est homogène à une énergie.

Deux approches pour établir les équations de Lagrange :

- à partir du principe variationnel : à partir duquel on définira le principe dit de "moindre action" ;
- à partir du principe fondamental de la dynamique : on utilisera dans cette approche les notions de forces généralisées, accélérations généralisées et du travail virtuel.

# Equations de Lagrange

## Principe de moindre action

On postule l'existence de la fonction de Lagrange  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$  et on définit l'action par

$$S = \sum_{i=1}^d \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt.$$

Principe de moindre action :

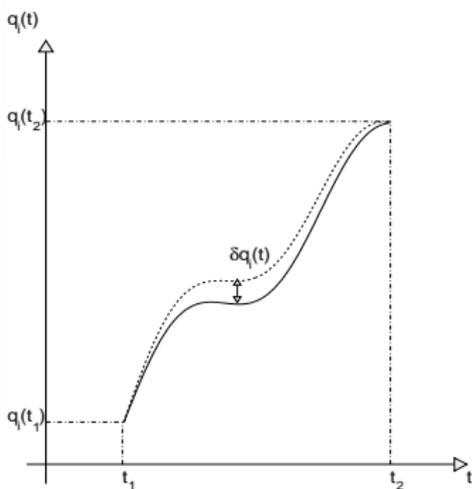


L'action est extrémale pour la trajectoire empruntée effectivement par le système entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ .

# Equations de Lagrange

## Principe de moindre action

Considérons 2 trajectoires infiniment voisines l'une de l'autre :



- $q_i(t)$  **trajectoire effective**
- $q_i(t) + \delta q_i(t)$  **trajectoire variée**  
→  $\delta q_i(t)$  un accroissement infinitésimal,  
→  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$  les deux trajectoires se confondent en ces points.

**Principe de moindre action**

$$\Downarrow$$
$$\delta S = 0$$

# Equations de Lagrange

## Principe de moindre action

Calculons l'accroissement de l'action :

$$\begin{aligned}\delta S &= \sum_i \int_{t_1}^{t_2} [L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) - L(q_i, \dot{q}_i, t)] dt \\ &= \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\delta q_i}{dt} dt \right)\end{aligned}$$

nous avons utilisé  $\delta \dot{q}_i = d\delta q_i/dt$ .

En intégrant par partie le deuxième terme, on obtient

$$\delta S = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}$$

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \implies \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

# Equations de Lagrange

## Principe de moindre action

sachant que les  $\delta q_i$  sont arbitraires et indépendants<sup>1</sup>

$$\delta S = 0$$

↓

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

ce qui constituent les  $n(= nb \text{ d.d.l.})$  équations de Lagrange.

Si les coordonnées généralisées coïncident avec les coordonnées cartésiennes, les équations de Lagrange deviennent

$$\frac{\partial L(r_i, v_i, t)}{\partial \vec{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(r_i, v_i, t)}{\partial \vec{v}} = 0.$$

1. C'est pour cela que l'on a besoin de coordonnées généralisées 

# Equations de Lagrange

## Principe de moindre action

### Remarques

- les équations du mouvement ne changent pas si  $L$  est multipliée par une constante ;
- $L$  doit obéir aux symétries du système physique (invariance relativiste, invariance par translation, ... ;)

• les équations du mouvement restent inchangées si l'on rajoute une dérivée totale par rapport au temps,  $df(q_i, t)/dt$ , au lagrangien : **Symétrie de Jauge**

$$\begin{aligned} L(q_i, \dot{q}_i, t) &\rightarrow L'(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{df(q_i, t)}{dt} \\ \implies \frac{\partial L'}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \end{aligned}$$

- le lagrangien de deux systèmes indépendants est égal à la somme des lagrangiens de chacun des systèmes.

# Principe de d'Alembert

## Déplacement réel et virtuel

Considérons un système constitué de  $N$  points matériels et ayant  $d$  degrés de liberté et soient  $q_i(t); i = 1, \dots, d$ , les équations horaires du mouvement du système.

### Déplacement réel

Un mouvement réel est déterminé par toutes les variations infinitésimales dans le temps des différentes coordonnées généralisées :

$$\overrightarrow{dr}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt.$$

### Déplacement virtuel et vitesse virtuelle

On appelle par déplacement virtuel tous les déplacement géométriques possibles du système à un **instant fixe**  $t$  :

$$\overrightarrow{\delta r}_i^* = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j^*. \quad (\delta t = 0).$$

On appelle par vitesses virtuelles des points matériels composant le système, le relevé des vitesses des points matériels à cet instant.

# Principe de d'Alembert

## Travail virtuel et puissance virtuelle

Effectuons le produit scalaire d'un champ vectoriel  $\vec{A}_\alpha$  avec les équations vectorielles du PFD :

$$\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{\gamma}_\alpha \cdot \vec{A}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N (\vec{F}_{\alpha e} + \vec{F}_{\alpha l}) \cdot \vec{A}_\alpha$$

$\vec{F}_{\alpha e}$  et  $\vec{F}_{\alpha l}$  sont respectivement la résultante des forces extérieures et celle des liaisons appliquées au point matériel  $M_\alpha$ .  $\vec{A}_\alpha$  est l'expression du champ à la position du point matériel  $\alpha$ .

$\Rightarrow \vec{A}_\alpha = \delta \vec{r}_\alpha^*$  : Le produit scalaire décrit alors le Travail virtuel ;

$\Rightarrow \vec{A}_\alpha = \delta \vec{V}_\alpha^*$  : Le produit scalaire décrit alors la Puissance virtuelle.

**Cas statique :**  $\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha e} = \vec{0}$  et  $\sum_{\alpha=1}^N \vec{M}_{O\alpha} = \vec{0}$  où  $\vec{M}_{O\alpha}$  est le moment de la résultante des forces appliquées au point  $M_\alpha$

$$\sum_{\alpha=1}^N (\vec{F}_{\alpha e} + \vec{F}_{\alpha l}) = \sum_{\alpha=1}^N (\vec{F}_{\alpha ext}) \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha ext} \cdot \delta \vec{r}_\alpha^* = 0 \text{ car } \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{\gamma}_\alpha = \vec{0};$$

$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha ext}$  résultante des forces de liaison extérieures.



Nous pouvons dire ainsi que le travail viruel des forces de liaison extérieures est nul dans le cas où le système est statique.

Rappelons que cela est vrai aussi bien dans le cas d'un déplacement réel que celui d'un déplacement virtuel.

# Principe de d'Alembert

## Énoncé et conditions d'application



### Principe de d'Alembert : 1er énoncé

Lors d'un déplacement virtuel, le travail des forces de liaison d'un système statique est nul.

**Le principe peut être énoncé dans le cas général comme suit :**



### Principe de d'Alembert : 2ème énoncé

Le travail des forces extérieures et intérieures d'un système lors d'un déplacement virtuel est égal au travail virtuel de la quantité des accélérations.

# Principe de d'Alembert

## Enoncé et conditions d'application



### Remarques

- Déplacement virtuel :  $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \delta\vec{r}_i^*$  à un instant donné  $t$  ( $\delta t = 0$ ) ;
- Les forces appliquées au système, extérieures et intérieures, restent constantes lors d'un déplacement virtuel ;
- Lorsque les liaisons sont parfaites et holonômes, le travail virtuel des forces de liaison est nul aussi bien en statique qu'en dynamique ;
- Les déplacements virtuels sont compatibles aux liaisons : les liaisons ne sont pas « cassées » lors du mouvement ;
- Lorsque les liaisons sont holonômes, les déplacements virtuels sont tangents à la surface de contact ( $\Sigma$ ) ;
- Si les liaisons sont scléronômes, les déplacements virtuels et réels sont identiques.

# Equations de Lagrange

Principe de la dynamique : Force généralisée

Nous allons exprimer les forces généralisées en partant du travail virtuel avant d'entamer le PFD :

- $\vec{F}_{e,\alpha}$  : Force extérieure sur  $\alpha$  ;
- $\vec{F}_{l,\alpha}$  : Force de liaison sur  $\alpha$  :

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{\alpha} (\vec{F}_{e,\alpha} + \vec{F}_{l,\alpha}) \cdot \delta \vec{r}_{\alpha}^* \\ &= \sum_{\alpha} \vec{F}_{e,\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha}^* \\ &= \sum_{\alpha,i} \vec{F}_{e,\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}^*}{\partial q_i} \delta q_i^* \\ &= \sum_i Q_i \delta q_i^* \end{aligned}$$

$$\implies \vec{F}_{l,\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha}^* = 0$$

- $Q_i$  :  $i^{\text{ème}}$  composante de la force généralisée :

$$Q_i = \sum_{\alpha} \vec{F}_{e,\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}^*}{\partial q_i}$$

# Equations de Lagrange

Principe de la dynamique : Accélération généralisée

Reprenons l'expression du travail virtuel, mais cette fois-ci en utilisant l'expression de la quantité des accélérations ( $m_\alpha = \text{cte}$ ) :

$$\begin{aligned}\delta W &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \ddot{\vec{r}}_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha}^* \\ &= \sum_{\alpha, i} m_{\alpha} \dot{v}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \delta q_i^* \\ &= \sum_i A_i \delta q_i^*\end{aligned}$$

$A_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante de l'accélération généralisée :

$$A_i = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{v}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i}$$

# Equations de Lagrange

## Principe de la dynamique

### L'expression de l'accélération généralisée

$$\begin{aligned}
 A_i &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{v}}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \\
 &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \right) - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \right).
 \end{aligned}$$

or

$$\vec{v}_{\alpha} = \dot{\vec{r}}_{\alpha} = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial t} \implies \frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i}.$$

nous avons aussi

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \right) &= \sum_l \frac{\partial^2 \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_l \partial q_i} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 \vec{r}_{\alpha}}{\partial t \partial q_i} \\
 &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \sum_l \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial q_i}
 \end{aligned}$$

# Equations de Lagrange

## Principe de la dynamique

On obtient alors

$$\begin{aligned}
 A_i &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial q_i} \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \right) \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}
 \end{aligned}$$

Comme  $\delta W = \sum_i Q_i \delta q_i^* = \sum_i A_i \delta q_i^* \implies \sum_i (Q_i - A_i) \delta q_i^* = 0$ , sachant que  $\delta q_i^*$  sont arbitraires et indépendants

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

# Equations de Lagrange

## Référentiel non galiléen

Les relations précédentes sont établies dans un référentiel galiléen.

Dans le cas où le référentiel n'est pas galiléen, comme le PFD s'écrit dans un référentiel non galiléen comme suit

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} + \vec{f}_{\alpha}^{in}$$

$$A_i = Q_i + Q_i^{in}$$

$$Q_i^{in} = \sum_{\alpha} \vec{f}_{\alpha}^{in} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i}$$

- $\vec{f}_{\alpha}^{in}$  : les forces d'inertie
- $Q_i^{in}$  : les forces généralisées d'inertie

**Notons que l'énergie cinétique  $T$  est exprimée dans le référentiel non galiléen.**

# Equations de Lagrange

## Lagrangien d'une particule libre non relativiste

L'expression du lagrangien est établie en respectant les symétries du système : **Invariance par rapport à**

- **translation par rapport au temps**, conservation de l'énergie,  $\implies L$  ne dépend pas explicitement du temps ;
- **translation par rapport à l'espace**, conservation de l'impulsion,  $\implies L$  ne dépend pas de  $\vec{r}$  ;
- **aux rotations**, conservation du moment cinétique,  $\implies L$  ne dépend pas de la direction de  $\vec{v}$  ;

$$\Downarrow$$
$$L = f(v^2) \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{d}{dt} \left( 2 \frac{df}{dv^2} \vec{v} \right) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \text{ d'où}$$

$$L = \frac{1}{2} m v^2$$

# Equations de Lagrange

## Cas de forces conservatives

Considérons un système de  $N$  particules et soit

$$\vec{F}_\alpha^{ext} = -\frac{\partial V(q_l)}{\partial \vec{r}_\alpha} \implies Q_i = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} = -\sum_{\alpha=1}^N \sum_{j=1}^3 \frac{\partial V(q_l)}{\partial r_{\alpha,j}} \frac{\partial r_{\alpha,j}}{\partial q_i}$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial q_i} = \sum_{\alpha,i} \frac{\partial r_{\alpha,i}}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial r_{\alpha,i}} \implies Q_i = -\frac{\partial V_i(q_l)}{\partial q_i}.$$

En substituant l'expression de la force généralisée dans les équations de Lagrange exprimées en fonction de  $T$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V(q_l)}{\partial q_i} \implies \frac{\partial (T - V(q_l))}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V(q_l))}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

La lagrangien d'un système conservatif est  $L = T - V$ , qui est homogène à une énergie.

# Equations de Lagrange

## Cas de forces conservatives

Notons que le potentiel ne dépend ni explicitement du temps ni de  $\dot{q}_l$ .  
Comme  $T = T(\dot{q}_l)$ , nous avons

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} (T - V) = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = Q_i = \frac{d}{dt} p_i$$

ce qui permet de définir le moment conjugué ou l'impulsion généralisée par

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

# Equations de Lagrange

Cas des forces dérivant d'un potentiel généralisé  $V(q, \dot{q})$

Si le potentiel **n'est pas conservatif au sens usuel** mais peut se mettre sous la forme

$$Q_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

le lagrangien  $L = T - V$  satisfait toujours les équations de Lagrange.

# Equations de Lagrange

## Exemple : Force de Lorentz

La force de Lorentz est donnée par  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ . Les coordonnées généralisées sont  $\vec{r}$  ( $\vec{r}$  et  $\vec{v}$  sont indépendantes).

Sachant que

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}\varphi - \partial\vec{A}/\partial t \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A}, \\ \vec{A} &\text{ étant le potentiel vecteur ;}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) &= v_i \vec{\nabla}(A_i) - v_i \nabla_i(\vec{A}) \\ \frac{d\vec{A}}{dt} &= \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + v_i \frac{\partial\vec{A}}{\partial r_i} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + v_i \nabla_i(\vec{A})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\vec{F}}{q} &= -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + v_i \vec{\nabla}(A_i) - v_i \nabla_i(\vec{A}) = -\frac{d\vec{A}}{dt} - \left(\vec{\nabla}[\varphi - v_i A_i]\right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(\varphi - v_i A_i)}{\partial \vec{v}} \right) - \vec{\nabla}(\varphi - v_i A_i) = \frac{d}{dt} \frac{\partial V(\vec{r}, \vec{v})}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial V(\vec{r}, \vec{v})}{\partial \vec{r}}\end{aligned}$$

avec  $V(\vec{r}, \vec{v}) = \varphi(\vec{r}) - \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r})$

# Equations de Lagrange

## Cas de forces dissipatives : fonction de Rayleigh

Si toutes les forces ne dérivent pas d'un potentiel, on peut toujours écrire les équations de Lagrange sous la forme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$$

où les  $Q_k$  sont les forces généralisées qui ne dérivent pas d'un potentiel, même généralisé.

Cas des forces de frottements fluides :  $F_i = -k_i v_i$ , on utilise la fonction dite de dissipation de Rayleigh définie par

$$\Phi(v_x, v_y, v_z) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (k_x v_{\alpha,x}^2 + k_y v_{\alpha,y}^2 + k_z v_{\alpha,z}^2)$$

avec

$$Q_k = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_k}$$

# Chapitre I : Formalisme Lagrangien

1. Introduction
2. Coordonnées généralisées
3. Conditions de liaisons
4. Equations de Lagrange
- 5. Multiplicateurs de Lagrange**
6. Symétries et lois de conservation

# Multiplicateurs de Lagrange

Equation du mouvement et calcul des forces de liaison

Système formé de  $N$  points matériel décrit par les coordonnées  $(\vec{r}_\alpha; \alpha = 1, \dots, N)$  ou bien  $(x_i; i = 1, \dots, 3N)$  soumises à  $k$  contraintes  $f_j(\vec{r}_\alpha; \alpha = 1, \dots, N); j = 1, \dots, k$ .

Si les coordonnées ne sont pas généralisées (dépendantes les unes des autres) ?

Principe de moindre action donne pour un accroissement élémentaire

$$\delta S = \int_{t_2}^{t_1} \sum_{i=1}^{3N} \delta x_i \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) dt.$$

$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \neq 0$  car  $\{x_i\}$  ne sont pas indépendants

Pour établir l'équation du mouvement  $\Leftarrow$  Méthode des multiplicateurs de Lagrange

# Multiplicateurs de Lagrange

## Equation du mouvement et calcul des forces de liaison

Considérons un déplacement virtuel  $\delta x_i$  compatible avec les liaisons, alors l'accroissement de la contrainte  $\delta f_j(\vec{r}_\alpha; \alpha = 1, \dots, N)$  est donné par

$$\delta f_j(\vec{r}_\alpha; \alpha = 1, \dots, N) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_j(\vec{r}_\alpha; \alpha = 1, \dots, N)}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad j = 1, \dots, k.$$

Soient  $\lambda_j$  avec  $j = 1, \dots, k$  des constantes<sup>2</sup> arbitraires, alors

$$\begin{aligned} & \lambda_j \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_j(\vec{r}_\alpha; \alpha = 1, \dots, N)}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad \forall \lambda_j \\ \Rightarrow & \sum_{j=1}^k \lambda_j \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_j(\vec{r}_\alpha; \alpha = 1, \dots, N)}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \\ \Rightarrow & \sum_{i=1}^{3N} \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j(\vec{r}_\alpha; \alpha = 1, \dots, N)}{\partial x_i} \delta x_i dt = 0 \end{aligned}$$

# Multiplicateurs de Lagrange

Equation du mouvement et calcul des forces de liaison

En sommant  $\delta S$  avec la dernière équation, on obtient

$$\sum_{i=1}^{3N} \int_{t_2}^{t_1} \delta x_i \left[ \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j(\vec{r}_\alpha; \alpha = 1, \dots, N)}{\partial x_i} \right] dt = 0$$

On rappelle que les  $\delta x_i$  ne sont pas indépendants.

Choisir les  $d = 3N - k$  premières coordonnées indépendantes, et les  $k$  restantes ( $j = 1$  à  $k$ ) sont fixées par les  $k$  relations

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial f_j(\vec{r}_\alpha; \alpha = 1, \dots, N)}{\partial x_i} \delta x_i = 0.$$

On choisit les  $\lambda_j$  telles que

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j(\vec{r}_\alpha; \alpha = 1, \dots, N)}{\partial x_i} = 0$$

pour  $i = 3N - k + 1, \dots, 3N$

# Multiplicateurs de Lagrange

## Equation du mouvement et calcul des forces de liaison

ainsi nous avons

$$\sum_{i=1}^{3N-k} \int_{t_2}^{t_1} \delta x_i \left[ \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j(\vec{r}_\alpha; \alpha = 1, \dots, N)}{\partial x_i} \right] dt = 0$$

puisque les  $\delta x_i$  sont indépendants cela implique que les termes entre les crochets sont nuls et en combinant avec les équations d'auparavant, cela donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j(\vec{r}_\alpha; \alpha=1, \dots, N)}{\partial x_i} \\ f_j(\vec{r}_\alpha; \alpha = 1, \dots, N) &= 0 \end{aligned}$$

où  $i = 1, \dots, 3N$  et  $j = 1, \dots, k$ .  $\implies 3N + k$  inconnues : les  $3N$  coordonnées  $x_i$  et les  $k$  constantes  $\lambda_j$ .

Les composantes  $Q_i$  des forces généralisées de liaison sont données alors par

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i = \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j(\vec{r}_\alpha; \alpha = 1, \dots, N)}{\partial x_i}$$

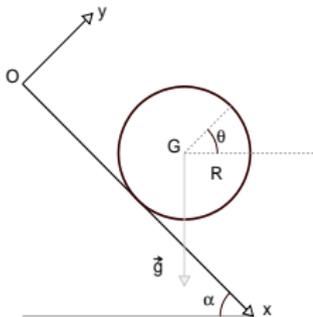
# Multiplicateurs de Lagrange

## Exemple

Considérons un cerceau de rayon  $R$  et de masse  $M$  roulant sans glisser sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  sous l'effet de son poids.  $T = 1/2(M\dot{x}^2 + I\dot{\theta}^2)$ ,  $I$  moment d'inertie avec  $I = MR^2$ .

Les équations en utilisant les multiplicateurs de Lagrange :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = -\lambda R \end{aligned}$$



On obtient ainsi un système à trois équations pour trois inconnues  $(x, \theta, \lambda)$  :

$$\begin{aligned} M\ddot{x} - Mgs\sin\alpha &= \lambda \\ MR/2\ddot{\theta} &= -\lambda \\ \dot{x} &= R\dot{\theta} \end{aligned}$$

⇓

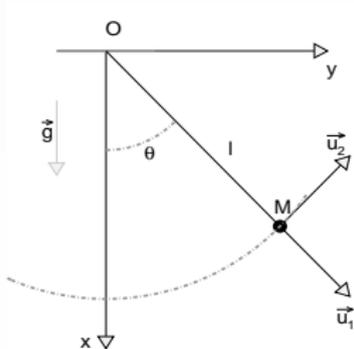
Roulement sans glissement :  $\dot{x} = R\dot{\theta}$   
 $\implies$  contrainte  $f(x, \theta) = x - R\theta - K$   
 $K$  constante.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{gs\sin\alpha}{2} \\ \dot{\theta} &= \frac{\dot{x}}{R} \\ \lambda &= -\frac{Mgs\sin\alpha}{2} \end{aligned}$$

# Equations de Lagrange

Exemple : Pendule simple

Pendule de longueur  $l$  et de masse  $m$  placé dans un champ de pesanteur  $\vec{g}$ .  
 1degré de liberté  $\rightarrow \theta$  est la coordonnée généralisée.



$$\overrightarrow{OM} = l\vec{u}_1 \implies \vec{V} = l\dot{\theta}\vec{u}_2$$

$$T = 1/2mv^2 = 1/2ml^2\dot{\theta}^2.$$

**Méthode 1 :**

déplacement virtuel  $\delta\vec{r} = l\delta\theta\vec{u}_2$  :

$$\delta W = m\vec{g} \cdot \delta\vec{r} = -mgl\sin\theta\delta\theta = Q_{\theta}\delta\theta$$

ce qui donne

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_{\theta}$$

$$= -mgl\sin\theta$$

$$\implies \ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0 \text{ avec } \omega^2 = g/l.$$

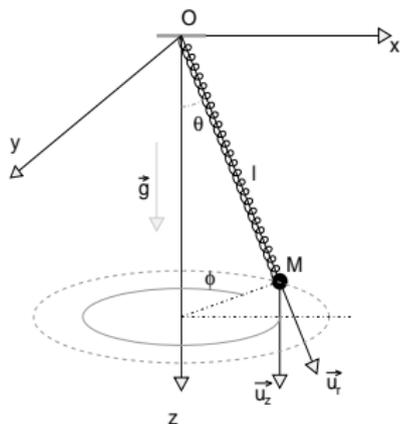
**Méthode 2 :**

$$L = T - V ; V = mgl(1 - \cos\theta).$$

# Equations de Lagrange

Exemple : Masse sur une tige rappelée par un ressort

$M$  se déplace sans frottement sur une tige faisant un angle  $\theta$  constant et tournant avec  $\vec{\Omega} = \dot{\phi}\vec{u}_z$ .  $M$  est attachée à un ressort de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ .



$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{u}_r$$

$$\vec{V} = \dot{r}\vec{u}_r + r\vec{\Omega} \wedge \vec{u}_r.$$

$$T = 1/2m(\dot{r}^2 + r^2\Omega^2\sin^2\theta).$$

2 degrés de liberté :  $(r, \phi)$

$$\begin{cases} \partial T / \partial r = mr\Omega^2\sin^2\theta \\ \partial T / \partial \dot{r} = m\dot{r} \\ \partial T / \partial \phi = 0 \\ \partial T / \partial \dot{\phi} = mr^2\Omega\sin^2\theta \end{cases}$$

# Equations de Lagrange

Exemple : Masse sur une tige rappelée par un ressort

Nous avons  $\partial\vec{r}/\partial r = \vec{u}_r$ ;  $\partial\vec{r}/\partial\phi = r\vec{u}_\phi$ , ce qui donne pour les composantes de la force généralisée

$$\begin{aligned} Q_r &= (m\vec{g} - k(r - l_0)\vec{u}_r) \cdot \partial\vec{r}/\partial r \\ &= mg\cos\theta - k(r - l_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_\phi &= (m\vec{g} - k(r - l_0)\vec{u}_r) \cdot \partial\vec{r}/\partial\phi \\ &= 0 \end{aligned}$$

Equations de Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} &= Q_r \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial T}{\partial \phi} &= Q_\phi \end{aligned}$$

nous obtenons ainsi

$$\ddot{r} - r(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta - \omega^2) - g\cos\theta - \omega^2 l_0 = 0 \text{ et } \ddot{\phi} = 0 \text{ avec } \omega^2 = k/m.$$

# Chapitre I : Formalisme Lagrangien

1. Introduction
2. Coordonnées généralisées
3. Conditions de liaisons
4. Equations de Lagrange
5. Multiplicateurs de Lagrange
- 6. Symétries et lois de conservation**

# Symétries et lois de conservation

## Variables cycliques



### Définition

Une variable  $q_k$  est dite cyclique si le lagrangien ne dépend pas explicitement de cette variable

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0.$$

Or, en utilisant les équations de Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \implies \frac{d}{dt} p_k = 0$$



# Symétries et lois de conservation

## Théorème de Noether



### Théorème de Noether

Considérons la transformation  $q_k \rightarrow \tilde{q}_k(s)$  tel que  $\tilde{q}_k(s=0) = q_k$ .

Si Le lagrangien est invariant :  $L(\tilde{q}_k, \dot{\tilde{q}}_k, t) = L(q_k, \dot{q}_k, t)$  ou bien  $\partial L / \partial s = 0$ , alors

$$I(q_k, \dot{q}_k) = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\tilde{q}_k}{ds} \Big|_{s=0}$$

est une constante du mouvement.

Preuve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial s} &= \sum_k \left( \frac{\partial L}{\partial \tilde{q}_k} \frac{d\tilde{q}_k}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_k} \frac{d\dot{\tilde{q}}_k}{ds} \right) \\ &= \sum_k \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_k} \frac{d\tilde{q}_k}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_k} \frac{d}{dt} \frac{d\tilde{q}_k}{ds} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_k \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_k} \frac{d\tilde{q}_k}{ds} \right) = 0 \end{aligned}$$

ce qui en évaluant l'expression obtenue en  $s = 0$  prouve le théorème.

# Symétries et lois de conservation

## Exemple : Invariance par rapport à la translation dans le temps

On considère la translation dans le temps. Dans ce cas particulier, n'oublions pas que

$$\partial L / \partial t = \frac{dL}{dt} - \sum_k \partial L / \partial q_k \dot{q}_k.$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_k(s) &= q_k(t + s) \\ &\simeq q_k(t) + \frac{\partial q_k}{\partial t} s \implies \frac{d\tilde{q}_k(s)}{ds} = \dot{q}_k. \end{aligned}$$

Selon le théorème de Noether, la quantité conservée est

$$\begin{aligned} I(q_k, \dot{q}_k) &= \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\tilde{q}_k}{ds} \Big|_{s=0} - L \\ &= \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \\ &= \sum_k p_k \dot{q}_k - L \end{aligned}$$

est constante et qui n'est d'autre, comme on le verra dans la suite que le hamiltonien du système.

# Symétries et lois de conservation

## Exemple II : Invariance par rapport à la translation spatiale

Prenons les coordonnées cartésiennes comme coordonnées généralisées. Et supposons que le lagrangien est invariant par rapport à une translation selon les trois axes,  $r_i \rightarrow \tilde{r}_i = r_i + s, i = x, y, z$  alors  $d\tilde{r}_i/ds = 1$  et la quantité

$$I = \sum_{i=x,y,z} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \sum_{i=x,y,z} \sum_{\alpha} p_{\alpha,i}$$

est conservée et qui ne sont d'autres que les composantes de l'impulsion totale selon les trois axes.



l'invariance par rapport à la translation engendre la conservation de la quantité de mouvement.

# Symétries et lois de conservation

## Exemple III : Invariance par rapport à la rotation

Prenons une rotation infinitésimale d'un angle  $\theta \rightarrow 0$  autour de l'axe  $Oz$ .  
 La matrice de rotation peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \theta & 0 \\ -\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\implies \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \theta & 0 \\ -\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x + \theta y \\ y - \theta x \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\vec{r}$  se transforme comme

$$\vec{r} = \vec{r} + \vec{r} \wedge \theta \vec{u}_3 \implies \left( \frac{d\vec{r}}{d\theta} \right)_i = (\vec{r} \wedge \vec{u}_3)_i = \epsilon_{ij3} r_j$$

$\epsilon_{ijk}$  est le tenseur de Levi-Civita.

# Symétries et lois de conservation

## Exemple III : Invariance par rapport aux rotations

Le lagrangien est invariant par rapport à la rotation alors la quantité

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{i=1,2,3} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \frac{d\tilde{r}_i}{d\theta} \\
 &= \sum_{\alpha} \sum_{i=1,2,3} p_{\alpha,i} \epsilon_{ij3} r_j \\
 &= \sum_{\alpha} (p_{\alpha,1} \epsilon_{1j3} r_j + p_{\alpha,2} \epsilon_{2j3} r_j) \\
 &= \sum_{\alpha} (p_{\alpha,1} y - p_{\alpha,2} x) = \sum_{\alpha} J_{\alpha,3}
 \end{aligned}$$

qui n'est d'autre que le moment cinétique totale selon l'axe  $Oz$ .

Si le lagrangien présente une symétrie sphérique, alors le moment cinétique est conservé.

# Applications du calcul variationnel

Nombreux sont les problèmes qui peuvent être résolus par le formalisme de Lagrange, et plus particulièrement, lorsque celui-ci peut se mettre sous la forme d'une fonctionnelle dont il faut chercher l'extremum.

En général, si la fonctionnelle, comme c'était le cas de l'action dans ce chapitre, peut s'écrire sous la forme

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', s) ds$$

où  $y'$  est la dérivée de  $y$  par rapport à  $s$  et  $s$  un paramètre. Notons que  $s$  joue le rôle du temps dans ce que nous avons vu auparavant.

On applique le principe variationnel. Tous les résultats que nous avons établis auparavant restent valables.

# Applications du principe variationnel

## Distance minimale entre deux points sur un plan

**Le problème est de déterminer la distance minimale entre deux points  $A$  et  $B$  sur un plan.**

→ la quantité à minimiser : la distance entre les deux points

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

→ Minimiser la fonctionnelle

$$S = \int_A^B ds = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad \text{et} \quad L(y') = \sqrt{1 + y'^2}$$

$y$  est cyclique ce qui implique

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = p_y = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

est constant ce qui implique  $y' = dy/dx$  est constant et donc  $y = f(x)$  est une droite.

La distance minimale est la longueur du segment droit qui sépare les points  $A$  et  $B$ .

# Applications du principe variationnel

## La brachistochrone

M glisse sans frottement sur un plan vertical sous l'action de son poids. Quelle est l'équation de la courbe joignant deux points  $O$  et  $A$  pour laquelle le temps mis par le point matériel est minimum ?

→ la quantité à minimiser : le temps  $dt = ds/v$ ,  $v$  étant la vitesse du point matériel :

$$\begin{aligned} S &= \int_O^A dt \\ &= \int_O^A \frac{ds}{v} \\ &= \int_0^{x_A} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx \end{aligned}$$

où  $v = \sqrt{2gy}$ , déduite à partir du théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel.

# Applications du principe variationnel

## la brachistochrone

Le “lagrangien”

$$L(y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}$$

ne dépend pas de  $x$ , qui joue le rôle du temps,  $\implies \partial L / \partial x = 0$  et donc le hamiltonien est une intégrale première

$$H = y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L = \frac{-1}{\sqrt{2gy(1 + y')}}$$

ce qui donne finalement  $y(1 + y'^2) = a$ , où  $a$  est une constante.

La solution de cette équation est un cycloïde.

