Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences-Semlalia
Département de Physique

Année Universitaire 2013/2014
Marrakech le 24 Janvier 2013

Corrigé et barème du Rattrapage
Mécanique du point matériel
Filières S1-SMP/SMC

Les notes doivent être saisies avant le 29 janvier 2014, délai de rigueur.

Note : *Prière de considérer toutes les réponses correctes non mentionnées dans ce corrigé.*

Exercice I (10 points)

On considère le mouvement d'un point matériel M de masse m dans un référentiel $\mathcal{R}(O, xyz)$, supposé galiléen. Le point matériel M est soumis à l'action de la seule force $\vec{F}$ qui dérive du potentiel $E_p(x, y, z) = a\sqrt{x^2+y^2}$, a étant une constante postive.

1pt

1. Etant donné que la force dérive du potentiel $E_p(x, y, z)$, alors

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(E_p(x,y,z)\right) = -\vec{\nabla}(E_p) \quad 0.25\text{pt}$$

sachant que le gradient s'exprime dans la base cartésienne comme suit[1] $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, nous avons alors

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{F} = -a\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} - a\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} = -a\frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} \quad 0.5\text{pt}$$

avec $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Comme $\vec{F}$ est colinéaire avec $\overrightarrow{OM}$ alors $\vec{F}$ est une force centrale 0.25pt.

0.5pt

2. On utilise le théorème du moment cinétique

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_0(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\vec{F})$$

$$= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OM} \wedge \left(-a\frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|}\right)$$

$$= 0 \Longrightarrow \vec{\sigma}_0(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{\text{Constante}} \quad 0.5\text{pt}$$

puisque $\vec{F}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires.

1pt

3. Calculons l'expression de la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$:

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi. \quad 1\text{pt}$$

1pt

4. L'expression de $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$ est

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) &= \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) \\ &= m\rho\vec{e}_\rho \wedge \left(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\right) \\ &= m\rho^2\dot{\varphi}\vec{k}. \quad \text{1pt}\end{aligned}$$

1.5pt

5. L'expression de l'énergie cinétique est égale à

$$E_c = \frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right). \quad \text{0.5pt}$$

Sachant que le potentiel est donné par $E_p(\rho) = a\rho$, l'énergie mécanique est égale à

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) + a\rho. \quad \text{0.5pt}$$

Or $\dot{\varphi} = \frac{\sigma_o}{m\rho^2}$, ce qui donne

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{\sigma_o^2}{2m\rho^2} + a\rho. \quad \text{0.5pt}$$

1.5pt

6. La seule force à laquelle est soumis le point matériel M est conservative et l'énergie mécanique ne dépend pas explicitement du temps alors cette dernière est conservée et donc

$$\begin{aligned}\frac{dE_m}{dt} &= \frac{\partial E_m}{\partial \rho}\dot{\rho} + \frac{\partial E_m}{\partial \dot{\rho}}\ddot{\rho} \\ &= \dot{\rho}(a - \frac{\sigma_o^2}{m\rho^3}) + m\dot{\rho}\ddot{\rho} \\ &= 0 \Longrightarrow \left|\begin{array}{l}\dot{\rho} = 0 \Longrightarrow \rho = \text{constant} \quad \text{0.5pt} \\ \text{ou } \ddot{\rho} - \frac{\sigma_o^2}{m^2\rho^3} + \frac{a}{m} = 0 \text{ et c'est l'équation recherchée.} \quad \text{1pt}\end{array}\right.\end{aligned}$$

1pt

7. Si M est animé d'un mouvement circulaire de rayon $\rho = \rho_0$, alors $\dot{\rho} = 0$ et $\ddot{\rho} = 0$ 0.25pt et l'équation du mouvement devient

$$-\frac{\sigma_o^2}{m^2\rho_0^3} + \frac{a}{m} = 0 \quad \text{0.5pt} \Longrightarrow \rho_0 = \left(\frac{\sigma_0}{am}\right)^{1/3}. \quad \text{0.25pt}$$

2.5pt

8. Si M est soumis à des petites oscillations radiales $\rho = \rho_0 + \epsilon \Longrightarrow \ddot{\rho} = \ddot{\epsilon}$ 0.5pt

7-a) En substituant ρ par $\rho_0 + \epsilon$ dans l'équation du mouvement, nous obtenons

$$\begin{aligned}& \ddot{\epsilon} - \frac{\sigma_0^2}{m^2\rho_0^3}\frac{1}{\left(1 + \frac{\epsilon}{\rho_0}\right)^3} + \frac{a}{m} = 0 \\ \Longrightarrow \quad & \ddot{\epsilon} - \frac{\sigma_0^2}{m^2\rho_0^3}\left(1 - 3\frac{\epsilon}{\rho_0}\right) + \frac{a}{m} = 0 \\ \Longrightarrow \quad & \ddot{\epsilon} + 3\frac{a}{m\rho_0}\epsilon = 0 \\ \Longrightarrow \quad & \ddot{\epsilon} + \left(\frac{27a^4}{m^2\sigma_0}\right)^{1/3}\epsilon = 0 \quad \text{1.5pt}\end{aligned}$$

1. On accepte la réponse si le gradient est exprimé dans la base cylindrique même s'elle n'est pas encore définie.

et qui l'équation différentielle vérifiée par ϵ.

7-b) Les petites oscillations se font avec la pulsation propre ω_0 telle que

$$\omega_0 = \left(\frac{27a}{m^2\sigma_0}\right)^{1/6}. \quad 0.5\text{pt}$$

Exercice II (10 points)

On se propose d'étudier dans cet exercice le mouvement des chaises volantes d'un manège, voir photo ci-dessous(figure 1). Pour ce faire, on considère une chaise comme un point matériel M de masse m suspendu à un disque D par un fil de longueur inextensible L. Le disque (D) de rayon R tourne à une vitesse angulaire constante ω et reste à tout instant horizontal et à une hauteur h constante du sol, voir figure 2.

Considérons $\mathcal{R}(O, xyz)$ un référentiel fixe, supposé galiléen, muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\mathcal{R}_1(O_1, x_1y_1z_1)$ un référentiel lié au disque D, que l'on utilise comme référentiel relatif, muni de la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1 \equiv \vec{k})$. $\mathcal{R}_1$ tourne autour de l'axe de Oz et le vecteur rotation de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}$ est donné par $\vec{\Omega}(R_1/R) = \omega\vec{k}$. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ reste constamment dans le plan $(O_1x_1z_1)$ et sa direction par rapport à la verticale est repérée par l'angle θ.

On donne $\overrightarrow{OO_1} = h\vec{k}$, $\overrightarrow{O_1A} = R\vec{i}_1$ et $\overrightarrow{AM} = L\vec{u}_1$. On pose $\vec{u}_3 = -\vec{j}_1$ ainsi la famille des vecteurs unitaires $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ forme une base orthonormée directe.

Toutes les expressions des grandeurs demandées doivent être exprimées dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

Figure 1 – Manège de chaises volantes

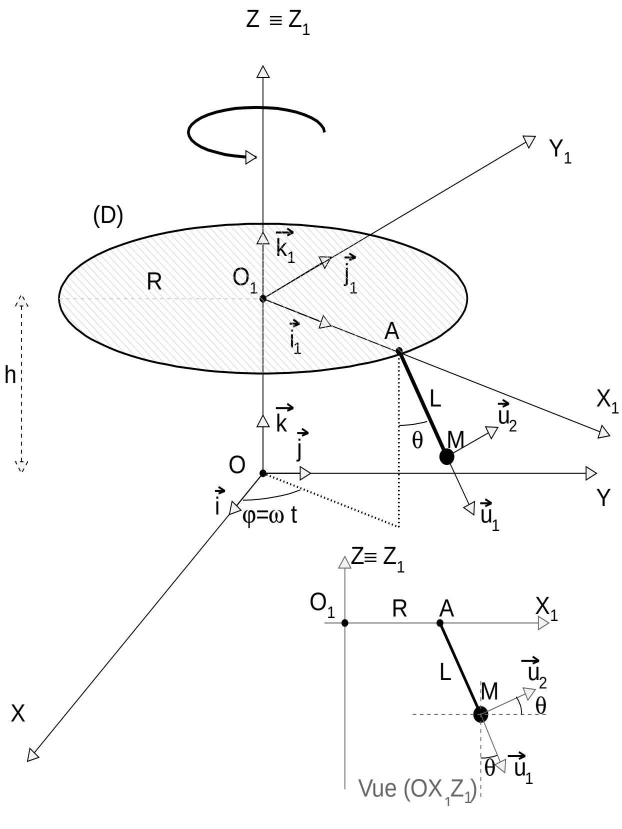

Figure 2 – Shéma utilisé pour résoudre l'exercice.

1pt

1. Calculons les expressions de $\vec{i}_1$ et de $\vec{k}$ en fonction $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$:

$$\vec{i}_1 = \sin\theta\vec{u}_1 + \cos\theta\vec{u}_2 \quad 0.5\text{pt}$$

$$\vec{k} = -\cos\theta\vec{u}_1 + \sin\theta\vec{u}_2 \quad 0.5\text{pt}.$$

$\boxed{2pt}$ 2. Sachant que $\overrightarrow{O_1M} = L\vec{u}_1$, le vecteur vitesse relative est donné par

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_1) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} = L\left.\frac{d\vec{u}_1}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} = L\dot{\theta}\vec{u}_2. \quad \textbf{1pt}$$

Le vecteur accélération relative $\vec{\gamma}_r$ est donné par

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) = \left.\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} = -L\dot{\theta}^2\vec{u}_1 + L\ddot{\theta}\vec{u}_2. \quad \textbf{1pt}$$

$\boxed{2.5pt}$ 3. Sachant que ω est constante, $\left.\frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$, l'accélération d'entrainement $\vec{\gamma}_e$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_e &= \left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \left(\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right) \\
&= \omega\vec{k} \wedge \left(\omega\vec{k} \wedge \left(R\vec{i}_1 + L\vec{u}_1\right)\right) \\
&= \omega\vec{k} \wedge \left(R\omega\vec{j}_1 - L\omega\sin\theta\vec{u}_3\right) \\
&= \omega\vec{k} \wedge (R\omega + L\omega\sin\theta)\,\vec{j}_1 \\
&= -\omega^2\,(R + L\sin\theta)\,\vec{i}_1 \\
&= -\omega^2\,(R + L\sin\theta)\,(\sin\theta\vec{u}_1 + \cos\theta\vec{u}_2) \quad \textbf{1.5pt}
\end{aligned}$$

L'expression de l'accélération de Coriolis est donnée par

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_c &= 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) \\
&= 2\omega\vec{k} \wedge L\dot{\theta}\vec{u}_2 \\
&= -2L\omega\dot{\theta}\cos\theta\vec{u}_3. \quad \textbf{1pt}
\end{aligned}$$

$\boxed{1pt}$ 4. Les forces qui sont appliquée à M dans $\mathcal{R}_1$ sont :

$$\left\{\begin{array}{lcll}
m\vec{g} &=& -mg\vec{k} = -mg\,(-\cos\theta\vec{u}_1 + \sin\theta\vec{u}_2) & \textbf{0.25pt} \quad \text{le poids ;} \\
\vec{T} &=& -T\vec{u}_1 & \textbf{0.25pt} \quad \text{la tension du fil ;} \\
\vec{F}_{ie} &=& -m\vec{\gamma}_e = m\omega^2\,(R + L\sin\theta)\,(\sin\theta\vec{u}_1 + \cos\theta\vec{u}_2) & \textbf{0.25pt} \quad \text{la force d'inertie d'entrainement} \\
\vec{F}_{ic} &=& -m\vec{\gamma}_c = 2mL\omega\dot{\theta}\cos\theta\vec{u}_3 & \textbf{0.25pt} \quad \text{la force d'inertie de Coriolis}
\end{array}\right.$$

$\boxed{1.5pt}$ 5. Comme $\mathcal{R}_1$ n'est pas galiléen, l'expression du PFD appliqué à M dans $\mathcal{R}_1$ est donnée par

$$\begin{aligned}
m\vec{\gamma}(M\mathcal{R}_1) &= m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} \quad \textbf{0.5pt} \\
\Longrightarrow -mL\dot{\theta}^2\vec{u}_1 + mL\ddot{\theta}\vec{u}_2 &= -mg\,(-\cos\theta\vec{u}_1 + \sin\theta\vec{u}_2) - T\vec{u}_1 \\
&\quad + m\omega^2\,(R + L\sin\theta)\,(\sin\theta\vec{u}_1 + \cos\theta\vec{u}_2) + 2mL\omega\dot{\theta}\cos\theta\vec{u}_3 \\
&= \left[mg\cos\theta - T + m\omega^2\,(R + L\sin\theta)\sin\theta\right]\vec{u}_1 \\
&\quad + \left[-mg\sin\theta + m\omega^2\,(R + L\sin\theta)\cos\theta\right]\vec{u}_2 + 2mL\omega\dot{\theta}\cos\theta\vec{u}_3 \quad \textbf{1pt}
\end{aligned}$$

2pt

6. Par projection sur la base, on obtient

6-a) l'expression de T : projection sur $\vec{u}_1$

$$mg\cos\theta - T + m\omega^2 (R + L\sin\theta)\sin\theta = -mL\dot{\theta}^2$$

$$\Longrightarrow \quad T = mg\cos\theta + m\omega^2 (R + L\sin\theta)\sin\theta + mL\dot{\theta}^2$$ 1 pt

6-b) l'expression de l'équation du mouvement : projection sur $\vec{u}_2$

$$-mg\sin\theta + m\omega^2 (R + L\sin\theta)\cos\theta = mL\ddot{\theta}$$

$$\Longrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta - \omega^2 \left(\frac{R}{L} + \sin\theta\right)\cos\theta = 0$$ 1pt