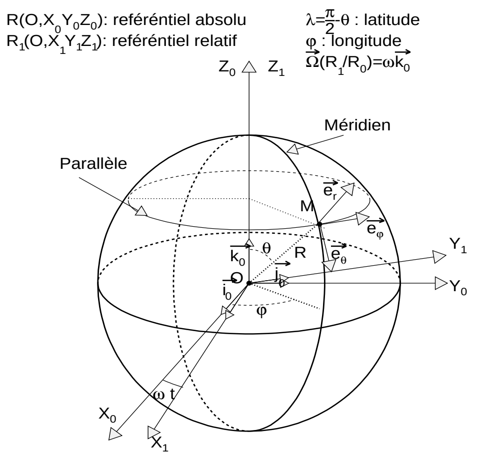
Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2017/2018

Module de physique - Mécanique du Point Matériel
Filière S1 SMA - Série N° 3

Corrigé 1 : Référentiel non galiléen

Considérons un point matériel, au repos par rapport à la surface terrestre, de masse m suspendu à une altitude h à la latitude λ et à la longitude φ.
Le référentiel absolu est le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_0(O, X_0Y_0Z_0)$, considéré comme galiléen, et le référentiel relatif est le référentiel terrestre lié à la terre $\mathcal{R}_1(O, X_1Y_1Z_1)$, référentiel du laboratoire, en rotation uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$ avec le vecteur rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \omega\vec{k}_0$.
le référentiel absolu est le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_0(O, X_0Y_0Z_0)$, considéré comme galiléen, et le référentiel relatif est le référentiel terrestre lié à la terre $\mathcal{R}_1(O, X_1Y_1Z_1)$ en rotation uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$ avec le vecteur rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \vec{\Omega} = \omega\vec{k}_0$.



1. On note par $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r = (R_T + h)\vec{e}_r$. L'expression de l'attraction gravitationnelle est donnée par

$$\begin{aligned}\vec{F}_g &= -K_G\frac{mM_T}{r^2}\vec{e}_r\\ &= -K_G\frac{M_T}{R_T^2}\frac{mR_T^2}{(R_T+h)^2}\vec{e}_r = -g_0\frac{mR_T^2}{(R_T+h)^2}\vec{e}_r.\end{aligned}$$

Si l'on néglide h devant R_T, ce qui est justifié, alors

$$\begin{aligned}\vec{F}_g &= -g_0\frac{mR_T^2}{(R_T+h)^2}\vec{e}_r\\ &= -g_0\frac{mR_T^2}{R_T^2(1+\frac{h}{R_T})^2}\vec{e}_r \rightarrow -mg_0\vec{e}_r.\end{aligned}$$

2. **Calcul de $\vec{f}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e$:**
   Calculons l'accélération d'entrainement, sachant que $h/R_T \to 0$ et donc le point M est considéré sur la face du globe terrestre,

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_e &= \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \left(\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{OM}\right) \\ &= R_T\omega^2 \sin\theta \vec{k}_0 \wedge \vec{e}_\varphi \\ &= -R_T\omega^2 \sin\theta \left(\sin\theta \vec{e}_r + \cos\theta \vec{e}_\varphi\right)\end{aligned}$$

   ce qui donne $\vec{f}_{-ie} = mR_T\omega^2 \sin\theta \left(\sin\theta \vec{e}_r + \cos\theta \vec{e}_\varphi\right)$.
   Calcul de $\vec{f}_{ic} = -m\vec{\gamma}_{ic}$:
   Comme le point matériel est au repos dans $\mathcal{R}_1$, ce qui implique que $\vec{V}_r = \vec{0}$ et $\vec{\gamma}_{ic} = \vec{0}$. Ainsi $\vec{f}_{ic} = 0$.
3. $\mathcal{R}_1$ est non galiléen, ainsi le PFD dans ce référentiel est

$$\begin{aligned}m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) &= \vec{F}_g + \vec{T} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} \\ \Longrightarrow \vec{0} &= \vec{T} - mg_0\vec{e}_r + mR_T\omega^2 \sin\theta \left(\sin\theta \vec{e}_r + \cos\theta \vec{e}_\varphi\right) \\ \Longrightarrow \vec{0} &= \vec{T} - m\left[\left(g_0 - R_T\omega^2 \sin^2\theta\right)\vec{e}_r - R_T\omega^2 \sin\theta \cos\theta \vec{e}_\varphi\right]\end{aligned}$$

   On peut déduire de l'expression précédente que

$$\vec{g} = \left(g_0 - R_T\omega^2 \sin^2\theta\right)\vec{e}_r - R_T\omega^2 \sin\theta \cos\theta \vec{e}_\varphi$$

   ce qui donne pour g, sachant que $R_T\omega^2 \to 0$ et qui permet de négliger le terme en ω^4 et obtenir

$$g = \sqrt{\left(g_0 - R_T\omega^2 \sin^2\theta\right)^2 + \frac{1}{4}R_T^2\omega^4 \sin^2 2\theta} \simeq g_0 - R_T\omega^2 \sin^2\theta$$

   avec $\theta = \pi/2 - \lambda$, cela donne

$$g \simeq g_0 - R_T\omega^2 \cos^2\lambda.$$

   A.N. :

$$\frac{g - g_0}{g_0} = \frac{R_T\omega^2 \cos^2\lambda}{g_0} \simeq \frac{6.4 \times 10^{-10} \times (7.27 \times 10^{-5})^2 \times \cos^2(\frac{0.57\times\pi}{180°})}{9.80} \simeq 2.4 \times 10^{-3}$$

   qui représente 2.4 pour mille de la valeur de g_0 et donc on peut la négliger.

Corrigé 2

Un automobiliste roule à une vitesse de $V = 70\text{kmh}^{-1}$ et il a freiné. A quelle distance d va-t-il s'arrêter ?
L'automobiliste freine alors les forces appliquées à la voiture sont son poids $\vec{P} = M\vec{g}$ et la réaction du sol $\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N$. Comme La voiture glisse alors $\|\vec{R}_T\| = k_d\|\vec{R}_N\|$(loi de Coulomb). De même, $\vec{P} + \vec{R}_N = \vec{0}$ étant donné qu'elles sont perpendiculaires à la direction du mouvement (qui porte l'accélération). La seule force qui travaille lors du freinage est $\vec{R}_T$. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique :

$$E_C^f - E_C^i = W_i^f(\vec{R}_T) = \int_i^f \vec{R}_T \cdot d\overrightarrow{OM}.$$

Comme $\vec{R}_T$ est constante alors

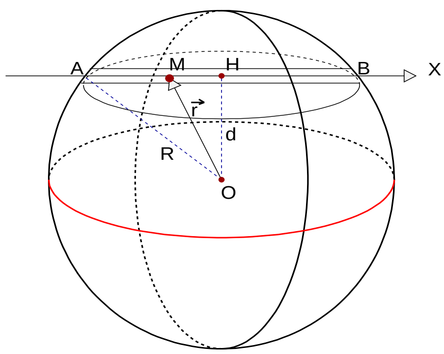
$$\int_i^f \vec{R}_T \cdot d\overrightarrow{OM} = -\|\vec{R}_T\| \int_i^f \|d\overrightarrow{OM}\| = -\|\vec{R}_T\| d.$$

Comme $E_C^f - E_C^i = \frac{1}{2}MV_f^2 - \frac{1}{2}mV_i^2 = -\frac{1}{2}mV_i^2$, nous avons ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mV_i^2 &= d\|\vec{R}_T\| = dk_d Mg \Longrightarrow d = \frac{V_i^2}{2k_d g} \\
&= \frac{\left(\frac{70\times 10^3}{3600}\right)^2}{2\times 0.6\times 9.81} \simeq 32\mathbf{m}
\end{aligned}$$

Corrigé 3 : Tunnel traversant la Terre

Considérons un point matériel situé à l'intérieur de la terre à une distance r de son centre, voir figure ci-dessous.



1. Soit M la position du point matériel telle que $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$. Rappelons que M va subir l'effet d'attraction de la sphère de rayon r et donc de masse M_r, si l'on considère que la masse volumique de la terre est constante $\rho_T = M_T/\left(4\pi R_T^3/3\right)$

$$M_r = \rho_T \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3} \times \frac{M_T}{\frac{4\pi R_T^3}{3}} = M_T \times \frac{r^3}{R_T^3}$$

ce qui donne pour l'attraction gravitationnelle que va subir M l'expression

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= -K_G \frac{mM_r}{r^2}\vec{e}_r \\
&= -K_G \frac{mM_T \frac{r^3}{R_T^3}}{r^2}\vec{e}_r = -K_G mM_T \frac{r}{R_T^3}\vec{e}_r
\end{aligned}$$

Comme l'attraction gravitationnelle est conservative, alors

$$\begin{aligned}
dE_p &= -\vec{F}\cdot d\vec{r} \\
&= K_G mM_T \frac{r}{R_T^3}\vec{e}_r \cdot (dr\vec{e}_r + rd\vec{e}_r) = K_G mM_T \frac{rdr}{R_T^3} \Longrightarrow E_p = K_G mM_T \frac{r^2}{2R_T^3} + K
\end{aligned}$$

avec $K = E_P(r=0) = 0 \Longrightarrow E_p = K_G mM_T \frac{r^2}{2R_T^3}$.

2. La position de M peut être repérée par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = d\ \vec{k}_0 + \vec{x} = d\ \vec{k}_0 + x\vec{u}$ avec $\vec{u}$ le vecteur unitaire de la direction Ox. La vitesse est égale à

$$\begin{aligned}
\vec{(}M/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \\
&= \dot{x}\vec{u} + x\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{u} + x\left(\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{u}\right) = \dot{x}\vec{u} + x\omega\vec{k} \wedge \vec{u}
\end{aligned}$$

ce qui donne pour le module de la vitesse $V = |V(M/\mathcal{R})| = \sqrt{\dot{x}^2 + x^2\omega^2}$ sachant que $\vec{u} \perp \vec{k}$. L'énergie cinétique est égale à $E_c = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + x^2\omega^2\right)$.

3. L'énergie mécanique est donnée par $E_m = E_c + E_p$

$$\begin{aligned}
E_m &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + x^2\omega^2\right) + K_G m M_T \frac{r^2}{2R_T^3} \\
&= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + x^2\omega^2\right) + K_G m M_T \frac{x^2 + d^2}{2R_T^3}
\end{aligned}$$

La seule force à laquelle est soumise M est la force gravitationnelle, qui est conservative, et comme E_m ne dépend pas explicitement du temps, alors elle est conservée.
La valeur de E_m est constante et égale à sa valeur à l'instant initial, sachant que $\dot{x}_0 = 0$ et $\cos\lambda = x_0/R_T$, où λ est la latitude du tunnel,

$$\begin{aligned}
E_p &= E_P(t=0) = \frac{1}{2}m x_0^2\omega^2 + K_G m M_T \frac{x_0^2 + d^2}{2R_T^3} \\
&= \frac{1}{2}m R_T^2\omega^2\cos^2\lambda + K_G m M_T \frac{R_T^2\cos^2\lambda + d^2}{2R_T^3}
\end{aligned}$$

4. La vitesse du véhicule M est maximale, son énergie cinétique aussi, si l'énergie potentielle du véhicule est minimale, car l'énergie mécanique est conservée.
Rappelons que r varie entre d et R_T, $r \in [d, R_T]$, voir figure. Comme E_p est une fonction strictement croissante en fonction de r dans cet intervalle, alors E_p est minimale pour $r = d$ et donc

$$r = d \Longrightarrow E_p(r=d) = E_p^{min} \quad \text{et} \quad E_c(r=d) = E_c^{max} = \frac{1}{2}mV_{max}^2$$

ce qui donne en utilisant $E_p = E_p^0 = E_p^{min} + E_c^{max}$,

$$\begin{aligned}
E_c^{max} &= E_p^0 - E_p^{min} \\
&= \frac{1}{2}m R_T^2\omega^2\cos^2\lambda + K_G m M_T \frac{R_T^2\cos^2\lambda + d^2}{2R_T^3} - K_g m M_T \frac{d^2}{2R_T^3} \\
\frac{1}{2}mV_{max}^2 &= \frac{1}{2}m R_T^2\omega^2\cos^2\lambda\left(1 + \frac{K_G M_T}{R_T^3}\right) \\
\Longrightarrow V_{max} &= \sqrt{R_T^2\omega^2\cos^2\lambda\left(1 + \frac{K_G M_T}{R_T^3}\right)}
\end{aligned}$$

5. L'énergie cinétique étant conservée, sa dérivée par rapport au temps est nulle

$$\begin{aligned}
\frac{dE_m}{dt} &= m\left(\dot{x}\ddot{x} + \omega^2 x\dot{x}\right) + x\dot{x}\frac{K_G m M_T}{R_T^3} \\
&= m\dot{x}\left[\ddot{x} + \left(\omega^2 + \frac{K_G M_T}{R_T^3}\right)x\right] = 0
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \ddot{x} + \left(\omega^2 + \frac{K_G M_T}{R_T^3}\right)x = 0 \quad \text{sachant que} \quad m\dot{x} \neq 0$$

qui est une équation différentielle de second ordre à coefficients constants. Les racines de l'équation caractéristique sont des nombres complexes imaginaires purs $\pm i\sqrt{\omega^2 + \frac{K_G M_T}{R_T^3}}$, or $g_0 = K_G M_T / R_T^2$ ce qui donne pour solution

$$x(t) \;=\; A\cos[\sqrt{\omega^2 + \frac{g_0}{R_T}}t - \alpha_0]$$

A et α_0 sont déterminées à partir des conditions initiales

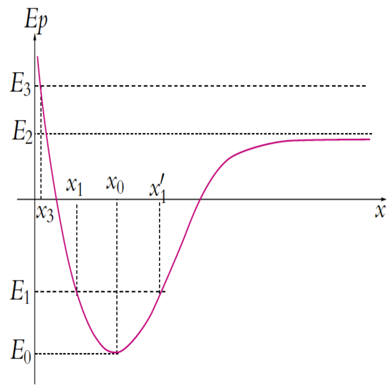
$$\left.\begin{array}{rcl} x(t=0) = x_0 & = & \sqrt{R_T^2 - d^2} = A\cos\alpha_0 \\ \dot{x}(t=0) = 0 & = & A\sqrt{\omega^2 + \frac{g_0}{R_T}}\sin\alpha_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha_0 = 0 \quad \text{et} \quad A = x_0 = \sqrt{R_T^2 - d^2}$$

d'où la solution

$$x(t) \;=\; \left(\sqrt{R_T^2 - d^2}\right)\cos[\sqrt{\omega^2 + \frac{g_0}{R_T}}t].$$

Corrigé 4 : Etats liés et états libres

Un point matériel M est assujeti à se déplacer le long de l'axe (Ox) d'un référentiel galiléen. Il est soumis à un champ de force conservative dérivant de l'énergie potentielle $E_p(x)$ dont l'allure des variations en fonction de x est donnée par la figure ci-contre.



1. Nous savons que $E_m = E_p + E_c \geq E_p$. Comme la force est conservative, E_m est une intégrale première et donc constante.
   Le cas $E_m < E_0$ n'est pas permis étant donné que $E_m \geq E_p \Longrightarrow E_m \geq E_0$ et donc n'est pas un cas physique.
   $E_0 \leq E_m < E_2$: on constate dans ce cas que seules certaines valeurs de x sont permises, comme pour l'exemple $E_m = E_1$, le mouvement de M ne peut avoir lieu que pour $x \in [x_1, x_1']$. Or ce genre de mouvement, pour lequel x est limité à un intervalle est un mouvement d'oscillations.

   On dit dans ce cas que l'état du système est lié car il ne peut s'éloigner à l'infini.

   $E_m \geq E$: si l'on note par x_m l'abscisse de l'intersection de la droite d'équation $E_p = E_m$ avec $E_p = E_p(x)$, alors x peut prendre les valeurs telles que $x \geq x_m$. Cet exemple est illustré par $E_m = E_3$ avec $x \in [x_3, +\infty[$.

   M peut s'éloigner à l'infini, on dit dans ce cas que M est dans un état libre.

2. Lorsque $E_m = E_0$, et en développant $E_p(x)$ au voisinage de x_0 à l'ordre 2, nous avons

$$\begin{aligned} E_p(x) &= E_p(x_0) + \left.\frac{dE_p(x)}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E_p(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2 + \mathcal{O}[(x-x_0)^3] \\ &\simeq E_0 + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 \end{aligned}$$

On en déduit que la force qui est appliquée est

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}(E_p(x)) = -\frac{dE_p(x)}{dx} = -k(x-x_0).$$

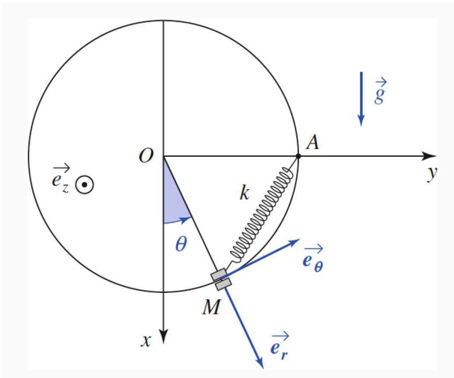
qui n'est d'autre qu'une force élastique. L'application du PFD donne

$$m\ddot{x} = -k(x-x_0) \Longrightarrow (x \ddot{-} x_0) + \frac{k}{m}(x-x_0) = 0$$

dont la solution est $x - x_0 = A\cos(\omega t - \varphi)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Donc le mouvement de M au voisinage de $x = x_0$ est un mouvement sinusoidal de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Corrigé 5 : Théorèmes généreaux

Un point matériel M de masse m est astreint à glisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon R et de centre O. M est lié au point A par un ressort de constante de raideur k et de longueur au repos négligeable, voir figure ci-contre.



Comme indiqué dans la figure, considérons le repère $\mathcal{R}(O, xyz)$ et soit $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ la base polaire. $\mathcal{R}$ peut être considéré galiléen car la durée de l'expérience considérée, mouvement de M, peut être négligée devant la période de rotation de la Terre.

1. **Equation du mouvement en utilisant le PFD :**
   Expression de l'accélération :
   Nous avons $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$, ce qui implique que $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$.
   Bilan des forces : M est soumis à
   $\vec{P} = m\vec{g}$: le poids ;
   $\vec{R}$: la réaction du cerceau sur M. Comme le mouvement a lieu sans frottement donc $\vec{R} = R\vec{e}_r$;
   $\vec{F} = -k\overrightarrow{AM}$: la froce de rappel du ressort. Notons que la longueur au repos est considérée négligeable. Nous avons

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} \\ &= R\vec{e}_r - R\left(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta\right) \\ &= R(1-\sin\theta)\vec{e}_r - R\cos\theta\vec{e}_\theta \\ \Longrightarrow \vec{F} &= -kR\left[(1-\sin\theta)\vec{e}_r - \cos\theta\vec{e}_\theta\right] \end{aligned}$$

Le PFD donne, étant donné que $\mathcal{R}$ est galiléen,

$$\begin{aligned} m\left(-R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta\right) &= mg\left(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta\right) + R\vec{e}_r - kR\left[(1-\sin\theta)\vec{e}_r - \cos\theta\vec{e}_\theta\right] \\ &= \end{aligned}$$

Par projection sur $\vec{e}_\theta$ nous obtenons

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta - \frac{k}{m}\cos\theta = 0.$$

Equation du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique :
Déterminons l'expression du moment cinétique par rapport au point O dans $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_O(M\mathcal{R}) &= \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) \\ &= mR^2\dot{\theta}\vec{e}_z \\ \Longrightarrow \left.\frac{d\vec{\sigma}_O(M\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= mR^2\ddot{\theta}\vec{e}_z. \end{aligned}$$

Expressions des moments des forces appliquées à M par rapport au point O :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R}) &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} = \vec{0}; \\ \vec{\mathcal{M}}_O(m\vec{g}) &= R\vec{e}_r \wedge mg\left(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta\right) \\ &= -mgR\sin\theta\vec{e}_z; \\ \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) &= R\vec{e}_r \wedge \left\{-kR\left[(1-\sin\theta)\vec{e}_r - \cos\theta\vec{e}_\theta\right]\right\} \\ &= kR^2\cos\theta\vec{e}_z. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème du moment cinétique

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\vec{\sigma}_O(M\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} &= \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R} + m\vec{g} + \vec{F}) \\ mR^2\ddot{\theta}\vec{e}_z &= -mgR\sin\theta\vec{e}_z + kR^2\cos\theta\vec{e}_z \end{aligned}$$

d'où l'équation du mouvement en projetant sur $\vec{e}_z$,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta - \frac{k}{m}\cos\theta = 0.$$

Equation du mouvement à partir du théorème de l'énergie mécanique
L'énetgie cinétique de M est $E_c = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$.
$\vec{R}$ ne travaille pas et donc ne contribue pas à l'énergie mécanique.
Le poids est une force conservative et

$$\begin{aligned} dE_p(m\vec{g}) &= -\delta W(m\vec{g}) = -m\vec{g}\cdot d\overrightarrow{OM} \\ &= -mg\left(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta\right)\cdot Rd\theta\vec{e}_\theta \\ &= mRg\sin\theta d\theta \Longrightarrow E_p(m\vec{g}) = -mgR\cos\theta + Cst1. \end{aligned}$$

Quant à la force de rappel, nous avons

$$\begin{aligned} dE_p(\vec{F}) &= -\vec{F}\cdot d\overrightarrow{OM} \\ &= kR\left[(1-\sin\theta)\vec{e}_r - \cos\theta\vec{e}_\theta\right]\cdot Rd\theta\vec{e}_\theta \\ &= -kR^2\cos\theta d\theta \\ \Longrightarrow E_p(\vec{F}) &= -kR^2\sin\theta + Cst2 \end{aligned}$$

Sachant que 'énergie mécanique est donnée par

$$\begin{aligned} E_m &= E_c + E_p(m\vec{g}) + E_p(\vec{F}) \\ &= \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR\cos\theta - kR^2\sin\theta + Cst1 + Cst2 \end{aligned}$$

Comme les forces qui travaillent sont conservatives, alors l'énergie mécanique est conservée et donc

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= 0 \\ \Longrightarrow mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgR\sin\theta\dot{\theta} - kR^2\cos\theta\dot{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

comme $\dot{\theta} \neq 0$ alors

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta - \frac{k}{m}\cos\theta = 0.$$

On note que les trois méthodes donne la même équation du mouvement, ce qui était bien attendu.

2. Les points d'équilibres, appelés aussi les points de stabilité de M, sont obtenus à partir de l'énergie potentiel de M et qui est $E_p = E_p(m\vec{g}) + E_p(\vec{F}) = -mgR\cos\theta - kR^2\sin\theta + Cst$. En effet, les positions d'équilibre sont obtenus cherchant les extremums de $E_p(M)$ par rapport à θ,

$$\begin{aligned} \frac{dE_p}{d\theta} &= mgR\sin\theta - kR^2\cos\theta \\ \left.\frac{dE_p}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_e} &= 0 \\ \Longrightarrow mgR\sin\theta_e - kR^2\cos\theta_e &= 0 \\ \Longrightarrow \mathrm{tg}\theta_e &= \frac{\frac{g}{R}}{\frac{k}{m}} \\ \Longrightarrow \theta_e &= \mathrm{atan}\left(\frac{\frac{g}{R}}{\frac{k}{m}}\right) + m\pi \end{aligned}$$

où m est un entier relatif. Notons que $\theta_e \in]0, \pi/2[$.
Calculons la dérivée seconde du potentiel

$$\left.\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_e} = mgR\cos\theta_e + kR^2\sin\theta_e \geq 0$$

puisque $\theta_e \in [0, \pi/2[$. Nous en déduisons que l'énergie potentielle est minimale pour $\theta = \theta_e$ et donc cette position est une position d'équilibre stable.
Considérons des petites oscillations autour de la position d'équilibre et $\theta = theta_e + \epsilon$ où $\epsilon \to 0$. Le développement limité au premier ordre autour de θ_e donne

$$\begin{aligned} \sin\theta &\simeq \sin\theta_e + \cos\theta_e\,(\theta - \theta_e) = \sin\theta_e + \epsilon\cos\theta_e \\ \cos\theta &\simeq \cos\theta_e - \sin\theta_e\,(\theta - \theta_e) = \cos\theta_e - \epsilon\sin\theta_e \end{aligned}$$

ce qui donne pour l'équation du mouvement, avec $\ddot{\theta} = \ddot{\epsilon}$

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon} + \frac{g}{R}\left(\sin\theta_e + \epsilon\cos\theta_e\right) - \frac{k}{m}\left(\cos\theta_e - \epsilon\sin\theta_e\right) &= 0 \\ \ddot{\epsilon} + \left(\frac{g}{R}\cos\theta_e + \frac{k}{m}\sin\theta_e\right)\epsilon + \frac{g}{R}\sin\theta_e - \frac{k}{m}\cos\theta_e &= 0 \end{aligned}$$

or $\frac{g}{R}\sin\theta_e - \frac{k}{m}\cos\theta_e = 0$, ce qui donne finalement

$$\ddot{\epsilon} + \left(\frac{g}{R}\cos\theta_e + \frac{k}{m}\sin\theta_e\right)\epsilon \quad = \quad 0$$

et en posant $\omega_0^2 = \left(\frac{g}{R}\cos\theta_e + \frac{k}{m}\sin\theta_e\right)$ alors l'équation du mouvement aurour de θ_e devient

$$\ddot{\epsilon} + \omega_0^2\epsilon \quad = \quad 0$$

et la période est $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi/\sqrt{\frac{g}{R}\cos\theta_e + \frac{k}{m}\sin\theta_e}$.