Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

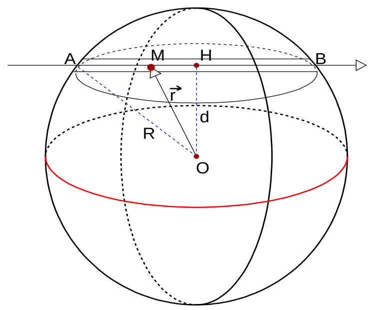
Année Universitaire 2014/2015

Module de Mécanique du Point Matériel
Série N° 4
Filières SMP/SMC/SMA

Exercice 1 : Théorème de l'énergie mécanique

Soit M un véhicule que l'on considère, comme un point matériel, situé à l'intérieur de la Terre à une distance r de son centre. M subit l'attraction gravitationnelle de la masse de la sphère de rayon r concentrée en O. On considère que la forme de la Terre est sphérique et que sa masse volumique est constante. On note le rayon de la Terre par R_T. g_0 est l'accélération de la pésanteur à la surface de la Terre.

1. Montrer que l'attraction gravitationnelle peut se mettre sous la forme
$$\vec{F} \;=\; -mg_0\frac{r}{R_T}\vec{e}_r.$$
où $\vec{e}_r$ est le vecteur radial de la base sphérique. En déduire l'énergie potentielle E_p dont dérive $\vec{F}$. On prend $E_p(r=0)=0$.
Soit un tunnel rectiligne AB ne traversant pas O et muni de l'axe HX, voir figure ci-contre. On note $OH = d$. Un véhicule assimilé à un point matériel de masse m glisse sans frottement dans le tunnel. Il part du point A de la surface terrestre sans vitesse intiale. On repère la position du véhicule dans le tunnel par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = d\,\vec{k}_0 + \vec{x}$.



2. Calculer la vitesse du véhicule. En déduire son énergie cinétique.
3. Calculer l'énergie mécanique E_m et montrer qu'elle est constante. Quelle est sa valeur ?
4. Calculer la vitesse maximale du véhicule ?
5. En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, établir l'équation differentielle. Résoudre l'équation et montrer que l'équation horaire est donnée par
$$x(t) = \sqrt{R_T^2 - d^2}\cos\sqrt{\left(\omega^2 + \frac{g_0}{R_T}\right)}t.$$

Mouvement dans un champ de force centrale

Exercice 2 : Orbite géostationnaire

On rappelle qu'une orbite géostationnaire est celle d'un satellite restant toujours à la verticale d'un même point du globe terrestre.
On note par S le satellite que l'on considère comme un point matériel. La période de rotation de la Terre est $T = 86164s$, son rayon $R_T \simeq 6.4\times10^3 km$ et sa masse $M_T \simeq 6\times10^{24}kg$. La constante gravitationnelle est $G \simeq 6.7\times10^{-11}S.I.$.

1. Calculer la vitesse angulaire Ω_g d'un satellite sur l'orbite géostationnaire. Quel est le référentiel d'étude $\mathcal{R}_g$? Est-il galiléen ?

2. On se propose d'établir les expressions du rayon de l'orbite géostationnaire R_g ainsi que son altitude h_g.

   a) Montrer que le mouvement du satellite est plan. Etablir l'expression de l'accélération du satellite $\vec{\gamma}(S/\mathcal{R}_g)$. En utilisant le PFD, déduire l'expression de R_g ainsi que celle de h_g. Faire leurs applications numériques.

   b) En déduire la valeur de la vitesse $v_g = \|\vec{v}_g(S/\mathcal{R})\|$ du satellite sur l'orbite géostationnaire. Faire son application numérique.

   c) Montrer que cette orbite est forcément dans le plan de l'équateur.

Exercice 3 : orbite elliptique

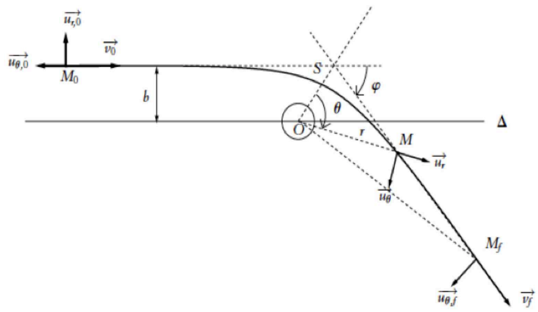
Avant de placer un satellite sur une orbite géostationnaire, le lanceur des satellites, comme Ariane pour l'exemple, l'injecte à la périgée d'une orbite elliptique, dite orbite de transfert, à une altitude $h_0 = 200km$ de la base de lancement et avec une vitesse, que l'on note v_0, telle que l'apogée A de l'orbite de transfert soit sur l'orbite géostationnaire. Au moment où le satellite se trouve en A, on actionne des moteurs qui réajuste sa vitesse et le transfèrent sur l'orbite géostationnaire.

Les notations et les résultats de l'exercice précédents concernant une orbite géostationnaire sont utilisés sans démonstration.

1. Déterminer les paramètres de l'ellipse : le demi grand-axe a, l'excentricité e et le paramètre p en fonction de R_T, h_0 et h_g. Faire leurs applications numériques.
2. En utilisant la formule de Binet de l'accélération, d'une part, et du PFD, d'autre part, établir la relation entre la constante des aires C en fonction de M_T, G et p.
3. En déduire la vitesse v_0 à donner au satellite lors de son lancement et la vitesse v_1 qu'il atteint à l'apogée A. Faire leurs applications numériques.
4. Quelle est la différence des vitesses en A que doivent fournir les moteurs pour que le satellite soit placé sur son orbite géostationnaire ?
5. En utilisant la troisième loi de Kepler, calculer le temps que passe le satellite sur l'orbite de transfert.

Exercice 4 : Orbite hyperbolique

Une météorite M a, très loin de la Terre, une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\, \vec{u}_\Delta$ portée par une droite située à la distance b de l'axe (Δ) du centre de la Terre O, voir figure ci-contre. On note par m la masse du météorite, M_T la masse de la Terre, R_T son rayon et G la constante de gravitation universelle. On travaille dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen. La position de M est repérée par les coordonnées polaires (r, θ), $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$. La trajectoire du météorite est une branche d'hyperbole de foyer O, le centre de la Terre.
Noter bien que l'on utilise les notations $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ pour la base polaire et (r, θ) les coordonnées correspondantes.



1. Montrer que le moment cinétique de la météorite par rapport à O et son énergie mécanique sont conservés.
2. En déduire l'expression de r_{min}, lorsque la météorite se trouve au sommet S de l'hyperbole, en fonction de v_0, G, M_T et b.
3. Déterminer la valeur minimale b_{min} de b pour que la météorite ne rencontre pas la Terre.
4. Dans le cas où $b > b_{min}$, déterminer l'angle de déviation φ de la météorite.