Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2015/2016

Module de Mécanique du Point Matériel
Série N^0 1
Filières SMA

Opération sur les vecteurs

Exercice 1

On donne les trois vecteurs $\vec{V}_1(1,1,0)$, $\vec{V}_2(0,1,0)$ et $\vec{V}_3(0,0,2)$.

1. Calculer les normes $\|\vec{V}_1\|$, $\|\vec{V}_2\|$ et $\|\vec{V}_3\|$. En déduire les vecteurs unitaires $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ des directions respectivement de $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et de $\vec{V}_3$.
2. Calculer $\cos(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2})$, sachant que l'angle correspondant est compris entre 0 et π.
3. Calculer $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$, $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3$ et $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)$. Que représente chacune de ces trois grandeurs ?

Exercice 2

L'objectif de cet exercice est de reformuler les expressions des opérations vectorielles en utilisant la fonction de Kronecker δ_{ij} [1] et le tenseur de Levi-Civita ϵ_{ijk} [2]. Les indices $i, j, k \in \{1,2,3\}$ étant donné que l'on travaille dans un espace vectoriel de dimension 3.

On considère un repère $\mathcal{R}$ muni de la base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. La propriété d'orthonormalité de la base se traduit par $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$, qui seront utilisés dans la suite de l'exercice, sauf mention contraire. Soient trois vecteurs $\vec{A}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{B}(b_1, b_2, b_3)$ et $\vec{C}(c_1, c_2, c_3)$.

1. Montrer que le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1,3} a_i b_i$.
2. Sachant que la $i^{\text{ème}}$ composante de $\vec{A} \wedge \vec{B}$ peut s'écrire comme suit $(\vec{A} \wedge \vec{B})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k$, en déduire que

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i.$$

---

1. la fonction de Kronecker est définie par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

2. Le tenseur de Levi-Civita est défini par

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si au moins deux indices sont égaux} \\ 1 & \text{si } (i,j,k) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \in \{(1,3,2),(2,1,3),(3,2,1)\} \end{cases}.$$

Le tenseur possède les propriétés suivantes, que l'on ne va pas démontrer

$$\sum_{i,j} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = \delta_{kl} \quad \text{et} \quad \sum_{i} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}.$$

3. Montrer que le produit mixte
$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \sum_{i,j,k}\epsilon_{ijk}a_ib_jc_k.$$
4. En utilisant le résultat de la question 2, montrer
$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) \;=\; (\vec{A}\cdot C)\vec{B}-(\vec{A}\cdot B)\vec{C}$$
5. Montrer que
$$\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{C}\wedge\vec{D}\right) \;=\; \left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\left(\vec{B}\cdot\vec{D}\right)-\left(\vec{A}\cdot\vec{D}\right)\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right).$$

Exercice 3 : Différentielle et dérivée d'un vecteur unitaire

Considérons la position d'un point M dans le repère $\mathcal{R}(O,xyz)$. Soient $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$ et $(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_\varphi})$ respectivement les bases cartésienne, cylindrique et sphérique associées à ce repère.

1. Calculer
$$\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\varphi}\;,\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi}\quad\text{et}\quad\frac{\partial\vec{k}}{\partial\varphi}.$$
2. En déduire $d\vec{e}_\rho$ et $d\vec{e}_\varphi$ dans la base cartésienne.
3. Montrer que les différentielles des vecteurs de la base cylindrique peuvent se mettre sous la forme
$$d\vec{e}_\rho \;=\; dt\vec{\Omega}\wedge\vec{e}_\rho \quad\text{et}\quad d\vec{e}_\varphi = dt\vec{\Omega}\wedge\vec{e}_\varphi$$
en précisant l'expression du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ des vecteurs de la base cylindrique par rapport à $\mathcal{R}$. Déduire les dérivées par rapport au temps des vecteurs de la base cylindrique dans $\mathcal{R}$.
4. Quel est le vecteur rotation de la base sphérique par rapport à $\mathcal{R}$? En utilisant les résultats de la question précédente, déduire les expressions de
$$\frac{d\vec{e_r}}{dt},\quad\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}\quad\text{et}\quad\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt}.$$

Exercice 4 : Mouvement sur une parabole

Un point matériel M se déplace selon une courbe d'équation polaire $r\cos^2\frac{\theta}{2}=a$ où a est une constante positive et $\theta\in[-\pi,+\pi[$.

1. Montrer que la trajectoire de M est une parabole et tracer sa représentation graphique.
2. On considère le cas où le module du vecteur vitesse est toujours proportionnel à r comme suit $v=kr$, où k est une constante positive.

   a- Calculer en fonction de θ les composantes radiale et orthoradiale du vecteur vitesse de M.

   b- Déterminer la loi du mouvement $\theta(t)$ sachant que $\theta(t=0)=0$ et que θ croit.

   On donne $\int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos\theta} = \mathbf{Log}\left|\mathbf{tg}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$