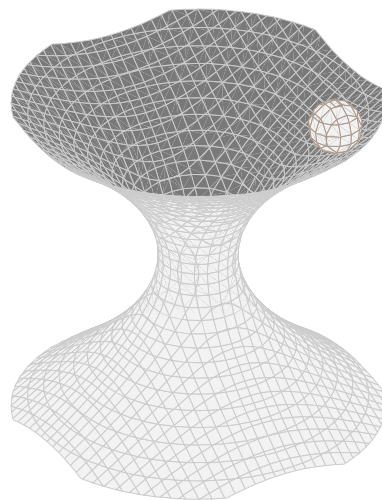


UNIVERSITÉ CADI AYYAD
FACULTÉ DES SCIENCES SEMLALIA
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE



Notes de cours de Mécanique du Point Matériel



MOHAMED EL KACIMI

Septembre 2015

Rappels et compléments mathématiques

1.1 Introduction

La mécanique newtonienne est l'une des premières théories les plus abouties. Elle fournit un cadre mathématique exhaustif permettant de décrire de manière prédictive et précise le mouvement d'un point. De par le caractère vectoriel du formalisme, nous allons passer en revue un ensemble de prérequis mathématiques de base nécessaires à l'introduction de la mécanique du point, aussi bien dans le volet de la cinématique que celui de la dynamique et portant sur les coordonnées, les vecteurs ainsi que les différentes opérations auxquelles ils sont soumis.

Avant d'entamer les prérequis, quelques notations seront adoptées afin d'uniformiser les expressions à utiliser. Aussi l'espace vectoriel sous tendant le formalisme que nous utiliseront pour décrire l'espace de position ou spatial et qui est de dimension 3 sera noté par \mathcal{E} , l'espace euclidien, ainsi que l'espace affine, de même dimension qui lui sont associés seront notés ξ , un point sera décrit par trois coordonnées et un vecteur sera décrit par trois composantes ramenées à une base choisie de \mathcal{E} . L'espace euclidien est considéré homogène et isotrope, c'est à dire qu'il a les mêmes propriétés en tout point de l'espace, homogénéité, ainsi que dans toutes les directions, isotropie. La première partie de ce chapitre sera consacrée aux rappels sur les vecteurs, les produits scalaires, vectoriels et mixtes. La deuxième partie traitera les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques. Un aperçu sur les déplacements élémentaires et la différentiation d'un vecteur sera donné.

1.2 Notions de vecteurs

Pour introduire la notion de vecteur, nous commençons par la description algébrique avant la représentation géométrique ce qui nous permettra par la suite d'introduire les systèmes de coordonnées qui feront l'objet du prochain paragraphe.

L'espace spatial est représenté par un espace vectoriel \mathcal{E} de dimension 3, étant donné que n'importe quelle position peut être décrite par la donnée de trois nombres. Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée de \mathcal{E} . Les vecteurs \vec{e}_i sont orthogonaux deux à deux et de module égal à l'unité, $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ pour $i \neq j$ et $\|\vec{e}_i\| = 1$. Tout élément \vec{A} de \mathcal{E} est appelé un vecteur et peut s'écrire comme suit

$$\vec{A} = \sum_{i=1,3} a_i \vec{e}_i$$

le coefficient a_i est la projection de \vec{A} sur le vecteur \vec{e}_i . Les vecteurs décrivent des grandeurs physiques telles qu'une vitesse, une accélération, une force,

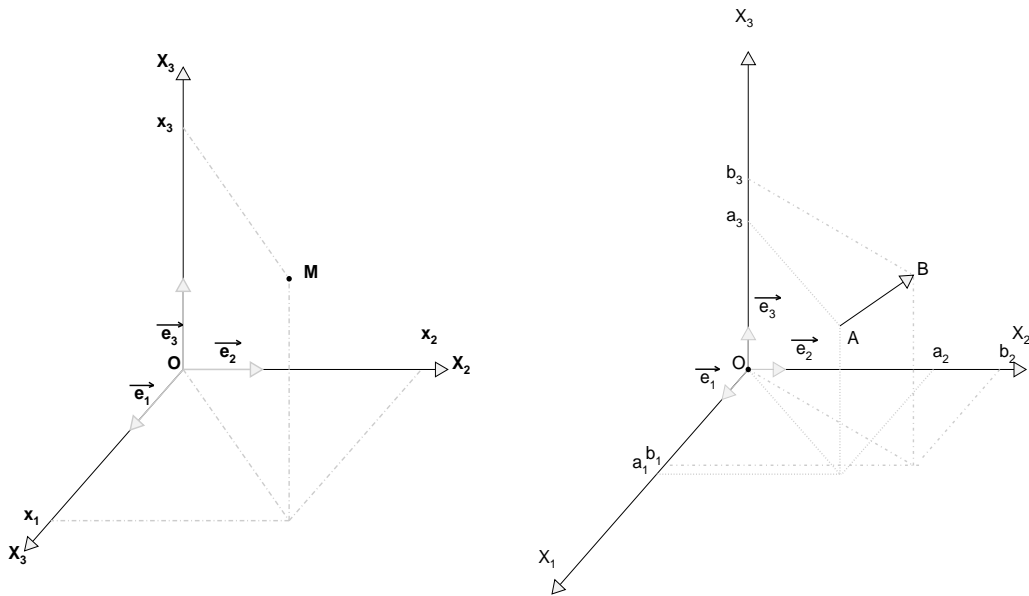


FIGURE 1.1 – Représentation d'un point M dans un repère $\mathcal{R}(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, figure à gauche, et celle d'un vecteur, figure à droite.

Pour procéder à la représentation géométrique, nous associons à \mathcal{E} un espace affine ξ de dimension 3 et nous munissons chacun des vecteurs de la base \vec{e}_i d'un axe qui lui est collinéaire. Les trois axes associés à la base sont concourants en un point O que l'on appelle l'origine, un point de référence. Les trois axes et l'origine constitue ce que l'on appelle un repère $\mathcal{R}(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Un point M de l'espace est représenté dans \mathcal{R} comme illustré par la figure 1.1 et est décrit par ses coordonnées (x_1, x_2, x_3) .



La représentation géométrique d'un vecteur \overrightarrow{AB} se fait à l'aide des positions de l'origine et du sommet du vecteur, qui sont respectivement A et B , comme c'est indiqué dans la figure 1.1 de droite. Les composantes du vecteur \overrightarrow{AB} dans la base $\mathcal{R}(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont données alors par

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \begin{cases} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{cases} \\ &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.\end{aligned}$$

Quelques propriétés

On note par la suite $\vec{A} = \overrightarrow{OA}$ à fin d'alléger les notations et on utilise comme base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, sauf indication contraire. Les résultats restent les mêmes pour un vecteur dont l'origine ne coïncide pas avec O .

La norme d'un vecteur, que l'on appelle aussi le module et qui représente la distance entre O et A s'exprime par $\|\vec{A}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. A chaque vecteur on peut associer un vecteur unitaire défini par

$$\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}.$$

Une combinaison linéaire de deux vecteurs, $\lambda\vec{A} + \beta\vec{B} = \sum_{i=1,3}(\lambda a_i + \beta b_i)\vec{e}_i$, est un vecteur, conséquence des propriétés de l'espace vectoriel \mathcal{E} sous-jacent, λ, β deux réels quelconques.

Produit scalaire : le produit scalaire entre deux vecteurs est défini par

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \cos(\alpha) \\ &= \sum_{i=1,3} a_i \times b_i\end{aligned}$$

α étant l'angle entre les deux vecteurs en question. Le produit scalaire ne dépend pas de la base choisie. Le produit scalaire entre deux vecteurs orthogonaux est nul, car $\cos(\alpha = \pi/2) = 0$.

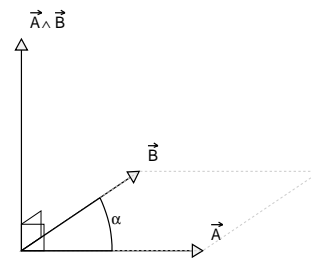
Il est plus facile de retrouver le résultat précédent en introduisant la fonction de Kronecker δ_{ij} ¹. Le caractère orthonormé des vecteurs de la base s'exprime comme suit $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$. Ainsi le produit scalaire entre \vec{A} et \vec{B} se calcule de la manière suivante

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= \left(\sum_i a_i \vec{e}_i \right) \cdot \left(\sum_j b_j \vec{e}_j \right) \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j \delta_{ij} \\ &= \sum_i a_i b_i \end{aligned}$$

qui n'est d'autre que le résultat déjà retrouvé.

Produit vectoriel : que l'on appelle aussi produit extérieur. Il est défini par

$$\begin{aligned} \vec{A} \wedge \vec{B} &= \begin{cases} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{cases} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \\ &\quad + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \\ \|\vec{A} \wedge \vec{B}\| &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \|A\| \times \|B\| \times \sin\alpha \end{aligned}$$



Le produit vectoriel est un vecteur et dépend donc de la base choisie. Il est antisymétrique, $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$, et nul si les deux vecteurs sont colinéaires. Son module représente la surface du parallélogramme formé sur la base des deux vecteurs et son sens est défini par la règle du tire-bouchon. Une écriture plus compacte des composantes du

1. La fonction de Kronecker δ_{ij} est définie comme suit :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

produit vectoriel peut s'obtenir en utilisant le tenseur antisymétrique de Levi-Civita²

$$(\vec{A} \wedge \vec{B})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k.$$

Double produit vectoriel : il est défini par

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} [\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})]_i &= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \vec{A}_j (\vec{B} \wedge \vec{C})_k \\ &= \sum_{jklm} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} A_j B_l C_m \\ &= \sum_{jklm} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} A_j B_l C_m \\ &= \sum_{jlm} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_j B_l C_m \\ &= \sum_m (A_m B_i C_m) - \sum_l A_l B_l C_i \\ &= [(\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}]_i \end{aligned}$$

qui représente le résultat annoncé précédemment.

Produit mixte : On appelle produit mixte de trois vecteurs \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} le scalaire défini par

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

2. Le tenseur antisymétrique de Levi-Civita ϵ_{ijk} est défini par $\epsilon_{ijk} = 1$ si $(i,j,k)=(1,2,3)$ ou toute permutation circulaire, $(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)$, sachant que i, j et k peuvent prendre les valeurs 1,2,3, , $\epsilon_{ijk} = -1$ dans le cas contraire et $\epsilon_{ijk} = 0$ si au moins deux indices sont égaux. Quelques propriétés du tenseur :

$$\begin{aligned} \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} &= 6 \\ \sum_{ij} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl} &= 2\delta_{kl} \\ \sum_m \epsilon_{ijm} \epsilon_{klm} &= \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk} \end{aligned}$$

Le produit mixte est noté $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$. Il reste invariant pour toute permutation circulaire des vecteurs \vec{A}, \vec{B} et \vec{C} : $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = (\vec{B}, \vec{C}, \vec{A}) = (\vec{C}, \vec{A}, \vec{B})$. On peut réexprimer le produit mixte comme suit $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k$. En effet

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) &= \sum_i a_i (\vec{B} \wedge \vec{C})_i \\ &= \sum_i a_i \left(\sum_{jk} \epsilon_{ijk} b_j c_k \right) \\ &= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k. \end{aligned}$$

1.3 Systèmes de coordonnées

Considérons un point matériel en mouvement. Le choix de la base, et par la suite le système des coordonnées, dans laquelle l'on exprime les grandeurs vectorielles liées au mouvement du point dépend de la nature de la trajectoire et un choix pertinent permet de réaliser les différents calculs de manière plus au moins aisée. Nous allons passer en revue les trois systèmes de coordonnées que sont le système des coordonnées cartésiennes, le système des coordonnées cylindriques et le système des coordonnées sphériques.

Considérons un repère \mathcal{R}_0 muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ appelée la base cartésienne. Le système de coordonnées curvilignes sera abordé dans le chapitre de la cinématique.

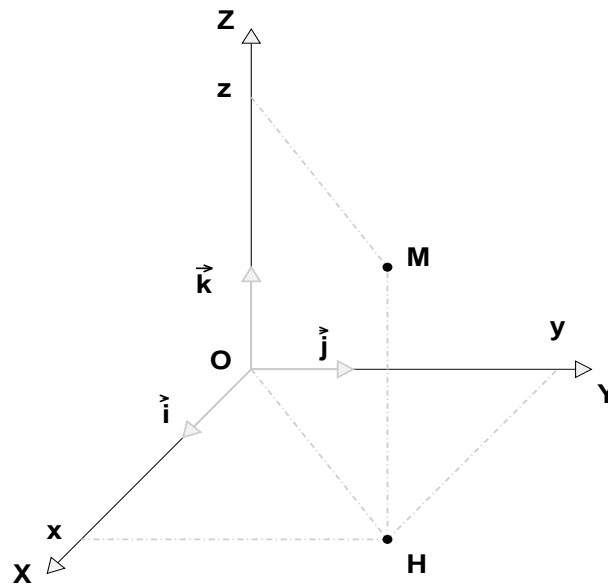
1.3.1 système des coordonnées cartésiennes

La position d'un point M est repérée dans ce système par les coordonnées (x, y, z) , appelées coordonnées cartésiennes, comme illustré dans la figure 1.2 :

$$\begin{cases} x = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{i} & \text{est appelé l'abscisse;} \\ y = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{j} & \text{est appelé l'ordonnée;} \\ z = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{k} & \text{est appelé la cote.} \end{cases}$$

Les coordonnées cartésiennes $(x, y, z) \in]-\infty, +\infty[$. Le vecteur \overrightarrow{OM} peut s'écrire comme suit

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}}.$$

FIGURE 1.2 – Coordonnées cartésiennes de M dans \mathcal{R}_0 .

On omettra de préciser la base quand on écrit un vecteur sous forme de colonne, sachant que la nature des coordonnées utilisées indique laquelle des bases est utilisée.

Déplacement élémentaire

Considérons un déplacement élémentaire du point M dans \mathcal{R}_0 tel que $x \rightarrow x + dx$, $y \rightarrow y + dy$ et $z \rightarrow z + dz$, le vecteur déplacement peut être écrit alors comme

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} &= \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} \\ &= d\overrightarrow{M} \\ &= dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

sachant que les vecteurs de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont liés à \mathcal{R}_0 , ce qui implique que leurs déplacements par rapport à \mathcal{R}_0 sont nuls, $d\vec{i} = d\vec{j} = d\vec{k} = \vec{0}$.

1.3.2 Système des coordonnées cylindriques

la position du point M peut être repérée par les coordonnées ρ, φ et z , figure 1.3, tel que

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$$

$$\begin{aligned}
 &= \rho \vec{e}_\rho + z \vec{k} \\
 &= \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

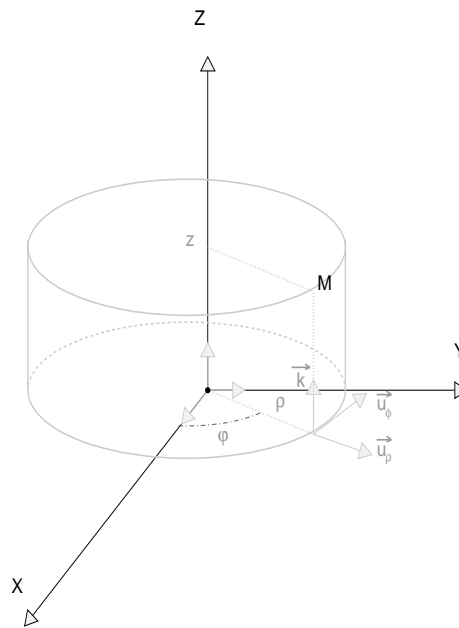


FIGURE 1.3 – Coordonnées cylindriques de M dans \mathcal{R}_0 .

La base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ est orthonormée. Elle est appelée la base cylindrique, $\|\vec{e}_\rho\| = \|\vec{e}_\varphi\| = 1$ et $\vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\varphi = \vec{k}$. Les directions des vecteurs \vec{e}_ρ et \vec{e}_φ changent avec la position de M ce qui implique que la base cylindrique est une base mobile.

La base cylindrique est bien adaptée aux trajectoires dont le mouvement est circulaire dans le plan OXY et rectiligne selon l'axe OZ , comme l'est le mouvement d'une particule chargée soumise à un champs magnétique constant dirigé selon OZ .

Si la cote du point M est nulle, sa position peut être décrite seulement avec les coordonnées polaires ρ et φ .

Relations entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques

En exprimant les vecteurs de la base cylindrique dans la base cartésienne, on obtient

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_\rho &= \cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j} \\
 \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}
 \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k} \\ &= \rho\cos\varphi\vec{i} + \rho\sin\varphi\vec{j} + z\vec{k} \\ &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\end{aligned}$$

et par identification terme à terme, on obtient

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Le même résultat peut être obtenu en considérant la matrice de passage de la base cartésienne à la base cylindrique. Rappelons que la matrice de passage est obtenue en exprimant les vecteurs de la base cartésienne en fonction de ceux de la base cylindrique comme suit

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\varphi \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

Si l'on note cette matrice par \mathcal{O} , le vecteur des coordonnées dans la base cartésienne s'obtient à partir du vecteur des coordonnées cylindriques par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{O} \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

On remarque que dans ce cas, la matrice \mathcal{O} n'est que la matrice représentant une rotation d'un angle φ autour de l'axe OZ .

Rappelons que les représentations matricielles des rotations forment un groupe orthogonal, c'est à dire que pour chaque matrice représentant une rotation, la matrice inverse est égale à la matrice transposée. Cette propriété peut être bien comprise si l'on tient compte du fait que le module d'un vecteur reste le même quelque soit la base choisie pour l'expression du vecteur.³

3. Les modules des vecteurs ne dépendent pas de la base choisie pour l'expression du vecteur. Considérons

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad A^T = (a_1, a_2, a_3).$$

A^T étant le transposé de A , alors $\|A\|^2 = A^T A$. Faisons un changement de base : $A \rightarrow A' = \mathcal{O}A$, alors $\|A'\|^2 = A'^T A' = A^T \mathcal{O}^T \mathcal{O} A = A^T A$ puisque le module est le même dans les deux bases alors $\mathcal{O}^T \mathcal{O} = \mathcal{O} \mathcal{O}^T = 1$, d'où la propriété recherchée. On a utilisé la propriété $(\mathcal{O}A)^T = A^T \mathcal{O}^T$. L'orthogonalité de \mathcal{O} permet d'identifier la matrice inverse à la matrice transposée.

Déplacement élémentaire

Considérons que le point M subit un déplacement élémentaire, où $\rho \rightarrow \rho + d\rho$, $\varphi \rightarrow \varphi + d\varphi$ et $z \rightarrow z + dz$. L'expression du vecteur déplacement peut être réalisée soit dans la base cylindrique, qui est une base mobile, ou bien dans la base cartésienne. Les deux cas sont traités ci-dessous :

Base cylindrique :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dM} &= d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\vec{e}_\rho + dz\vec{k} \\ &= d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{k} \\ &= \begin{pmatrix} d\rho \\ \rho d\varphi \\ dz \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

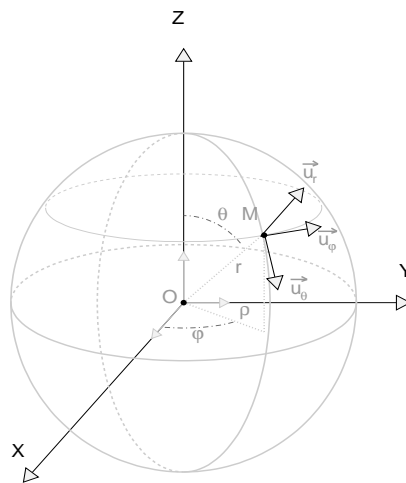
Base cartésienne : Il suffit d'appliquer la matrice de passage entre les deux bases, ce qui donne

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dM} &= \mathcal{O} \begin{pmatrix} d\rho \\ \rho d\varphi \\ dz \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d\rho\cos\varphi - \rho d\varphi\sin\varphi \\ -d\rho\sin\varphi + \rho d\varphi\cos\varphi \\ dz \end{pmatrix} \\ &= (d\rho\cos\varphi - \rho d\varphi\sin\varphi)\vec{i} - (d\rho\sin\varphi - \rho d\varphi\cos\varphi)\vec{j} + dz\vec{k}\end{aligned}$$

1.3.3 système des coordonnées sphériques

Le point M peut être repéré par les coordonnées sphériques, figure 1.4, comme suit

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= r\vec{e}_r \\ &= \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

FIGURE 1.4 – Coordonnées sphériques de M dans \mathcal{R}_0 .

La famille $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ constitue une base orthonormée directe. Le vecteur \vec{e}_r repère les variations du module $r = \overline{OM}$. Il est colinéaire à \overline{OM} . Le vecteur \vec{e}_θ repère les variations de θ et orienté dans le sens croissant de θ . Il est tangent au méridien passant au point M , c'est le cercle qui passe par les deux pôles et le point M . Quant à \vec{e}_φ , il repère les variations de φ et il est orienté vers les φ croissants. Il est tangent à la parallèle passant par le point M . C'est le cercle dont le plan le contenant est perpendiculaire à l'axe Oz .



En langage de géographe, l'angle θ est appelé la latitude du point M et φ est sa longitude.

Les directions des vecteurs de la base sphérique changent quand la position de M change. C'est une base mobile. Les domaines de variations des trois variables sont :

$$\begin{cases} r \in [0, +\infty[\\ \theta \in [0, \pi[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\end{cases}$$

Notons qu'une autre définition de θ existe, où celui-ci est l'angle entre e_r et sa projection sur le plan (Oxy) et dans ce cas le domaine de variation de θ est $[-\pi/2, \pi/2]$.

Remarquons que pour $r = R$ constant et φ et θ variables, le point M appartient à la surface de la sphère de rayon R .

Relations entre les coordonnées sphériques et cylindriques

L'expression des vecteurs de la base cylindrique dans la base sphérique permet d'écrire

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= r\vec{e}_r \\ &= r(\cos\theta\vec{k} + \sin\theta\vec{e}_\rho) \\ &= r\sin\theta\vec{e}_\rho + r\cos\theta\vec{k} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}\end{aligned}$$

ce qui permet de déduire que $\rho = r\sin\theta$ et $z = r\cos\theta$. De même il est plus simple d'exprimer la matrice de passage entre les deux bases, comme suit

$$\begin{aligned}\vec{e}_\rho &= \sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi &= \vec{e}_\varphi \\ \vec{k} &= \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

ce qui donne pour la matrice de passage de la base sphérique à la base cylindrique

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \end{pmatrix}$$

et on peut déduire les résultats précédents à l'aide de \mathcal{O} .

Relations entre les coordonnées sphériques et cartésiennes

L'expression des coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées sphériques s'obtient en exprimant \vec{e}_r dans la base cartésienne :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= r\vec{e}_r \\ &= r(\cos\theta\vec{k} + \sin\theta\vec{e}_\rho) \\ &= r\cos\theta\vec{k} + r\sin\theta(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}) \\ &= r\sin\theta\cos\varphi\vec{i} + r\sin\theta\sin\varphi\vec{j} + r\cos\theta\vec{k}\end{aligned}$$

comme $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, on obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

On peut aboutir au même résultat en procédant par la matrice de passage de la base sphérique à la base cartésienne. Pour ce faire, il suffit d'exprimer les vecteurs de la base

cartésienne dans la base sphérique. Il est plus aisé d'obtenir l'expression finale en passant par la base cylindrique. Aussi,

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \cos\varphi\vec{e}_\rho - \sin\varphi\vec{e}_\varphi = \cos\varphi\sin\theta\vec{e}_r + \cos\varphi\cos\theta\vec{e}_\theta - \sin\varphi\vec{e}_\varphi \\ \vec{j} &= \sin\varphi\vec{e}_\rho + \cos\varphi\vec{e}_\varphi = \sin\varphi\sin\theta\vec{e}_r + \sin\varphi\cos\theta\vec{e}_\theta + \cos\varphi\vec{e}_\varphi \\ \vec{k} &= \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

ce qui donne pour la matrice de passage

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi \\ \sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{O} \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

ainsi on peut écrire

$$\begin{aligned}x &= \mathcal{O}_{11} \times r = r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= \mathcal{O}_{21} \times r = r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= \mathcal{O}_{31} \times r = r\cos\theta\end{aligned}$$

Notons que pour la différentiation des vecteurs de la base sphérique, il est plus aisé de les exprimer dans la base cartésienne en utilisant \mathcal{O} , sachant que $\mathcal{O}^{-1} = \mathcal{O}^T$, c'est à dire $(\mathcal{O}^{-1})_{ij} = (\mathcal{O}^T)_{ij} = \mathcal{O}_{ji}$, et de procéder à la dérivation ; sachant que les vecteurs de la base cartésienne sont fixes :

$$\vec{e}_r = \mathcal{O}_{11}\vec{i} + \mathcal{O}_{21}\vec{j} + \mathcal{O}_{31}\vec{k} \implies d\vec{e}_r = d\mathcal{O}_{11}\vec{i} + d\mathcal{O}_{21}\vec{j} + d\mathcal{O}_{31}\vec{k}$$

de même pour les autres vecteurs de la base.

Déplacement élémentaire

Considérons un déplacement élémentaire tels que $r \rightarrow r+dr$, $\theta \rightarrow \theta+d\theta$ et $\varphi \rightarrow \varphi+d\varphi$. Ainsi le déplacement selon \vec{e}_r sera dr , selon \vec{e}_θ il prendra l'expression $r d\theta$ et selon \vec{e}_φ son expression est $r\sin\theta d\varphi$. Ces dernières expressions sont déduites comme suit

- selon \vec{e}_θ , le déplacement élémentaire est un arc de cercle de rayon r et d'angle $d\theta$, ce qui donne $r d\theta$ pour la longueur de l'arc ;
- selon \vec{e}_φ , le déplacement élémentaire est un arc de cercle de rayon $\rho = r\sin\theta$ et d'angle $d\varphi$, ce qui donne pour la longueur de l'arc $r\sin\theta d\varphi$

Comme le déplacement est infinitésimal, on peut confondre les arcs avec des segments de droite. Ainsi, le vecteur déplacement peut s'écrire comme suit

$$\overrightarrow{dM} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi.$$

Rappelons que s'il s'agit d'exprimer l'élément de déplacement dans la base cartésienne, il est plus simple d'utiliser la différentiation du vecteur \overrightarrow{OM} en utilisant la matrice de passage entre les deux bases, comme c'est indiqué auparavant.

1.4 Différentielle et dérivée d'un vecteur

La notion de différentielle est très largement utilisée en physique et plus particulièrement la différentielle d'un vecteur est à la base de bien de développements en mécanique. Pour cela, nous allons passer en revue cette notion avant d'aborder la dérivée temporelle.



La différentielle d'une grandeur est la modification de cette grandeur engendrée par l'évolution d'un ou de plusieurs paramètres dont dépend cette grandeur : changement du temps, d'angle, de longueur....

Prenons comme grandeur un vecteur, puisque c'est ce qui nous intéresse et considérons le cas général où le vecteur est exprimé dans une base orthonormée $\{\vec{e}_i, i = 1, 3\}$, avec $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$, $\vec{A} = \sum_{i=1,3} a_i \vec{e}_i$. La différentielle du vecteur \vec{A} est égale à

$$d\vec{A} = \sum_{i=1,3} da_i \vec{e}_i + \sum_{i=1,3} a_i d\vec{e}_i.$$

où les variations peuvent provenir soit des coordonnées du vecteur dans la base soit des variations des vecteurs de la base. Rappelons que seule la direction des vecteurs de la base peut changer puisque leur module est égal à l'unité et donc constant.

1.4.1 Différentielle d'un vecteur unitaire

Examinons d'abord la différentielle $d\vec{u}$ d'un vecteur unitaire \vec{u} qui tourne dans un plan et soit θ l'angle qui repère sa rotation. Lorsque $\theta \rightarrow \theta + d\theta$, le vecteur change comme suit $\vec{u} \rightarrow \vec{u} + d\vec{u}$. Comme le vecteur \vec{u} est unitaire, alors $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1$ ce qui implique

$$\begin{aligned} d(\vec{u} \cdot \vec{u}) &= 0 \\ &= 2\vec{u} \cdot d\vec{u} \implies d\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \end{aligned}$$

alors

$$\vec{u} \perp d\vec{u} \quad \vec{u} \text{ et } d\vec{u} \text{ sont orthogonaux.}$$

Ainsi si $d\theta \rightarrow 0$, le module de $d\vec{u}$ est égal à l'arc décrit par le sommet de \vec{u} , figure 1.5. Soit \vec{v} un vecteur orthogonal à \vec{u} et appartenant au même plan que \vec{u} , alors

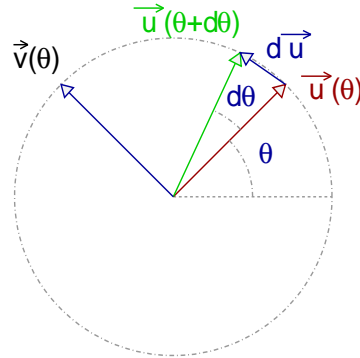


FIGURE 1.5 – Rotation d'un vecteur unitaire.

$$\begin{aligned} d\vec{u} &= \|d\vec{u}\|\vec{v} \\ &= d\theta\vec{v} \implies \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{v} \end{aligned}$$

Soit \vec{w} un troisième vecteur unitaire orthogonal au plan contenant les vecteurs \vec{u}, \vec{v} tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit direct et soit $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation de \vec{u} . On peut écrire $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{w}$. Reprenons l'expression précédente, $\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{v} = \dot{\theta}(\vec{w} \wedge \vec{u})$ et donc on peut énoncer le résultat important, à retenir,

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}.$$

Montrons que \vec{v} tourne avec le même vecteur rotation. Pour ce faire, on note par $\vec{\Omega}'$ le vecteur rotation de \vec{v} , $\dot{\vec{v}} = \vec{\Omega}' \wedge \vec{v}$, et on va démontrer que $\vec{\Omega}' = \vec{\Omega}$. On sait que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{u} \cdot \vec{v}) &= \dot{\vec{u}} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \dot{\vec{v}} \\ &= (\vec{\Omega} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot (\vec{\Omega}' \wedge \vec{v}) \\ &= (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{\Omega} + (\vec{v} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{\Omega}' \quad (\text{permutation circulaire}) \\ &= (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{\Omega} - \vec{\Omega}') \end{aligned}$$

on a utilisé la propriété d'invariance du produit mixte par rapport à une permutation

circulaire des trois vecteurs ; or

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{u} \cdot \vec{v}) &= 0 \\ \implies \vec{\Omega} - \vec{\Omega}' &= 0 \\ \implies \vec{\Omega} &= \vec{\Omega}' \end{aligned}$$

et donc \vec{u} et \vec{v} tournent avec le même vecteur rotation $\vec{\Omega}$.



Cette propriété se généralise aux trois vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ quand la rotation a lieu dans l'espace.



Remarques

- un vecteur unitaire qui ne tourne pas est constant et sa dérivée par rapport au temps est nulle.
- \vec{v} tourne avec le même vecteur rotation $\vec{\Omega}$ que \vec{u} , puisque \vec{v} appartient au plan de la rotation et reste constamment orthogonal à \vec{u} .
- Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée à un référentiel \mathcal{R} et que $\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation de \mathcal{R} par rapport à un référentiel fixe \mathcal{R}_0 , alors la dérivée des trois vecteurs unitaires par rapport au temps a la même expression que celle établie précédemment.



Tous les résultats établis dans ce paragraphe peuvent être généralisés au cas où le vecteur unitaire tourne dans l'espace.

Si l'on applique ce résultat au vecteur \vec{A} , tout en notant le vecteur rotation de \vec{A} par $\vec{\Omega}$:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \sum_{i=1,3} \frac{da_i}{dt} \vec{e}_i + \vec{\Omega} \wedge \vec{A}.$$

On peut exprimer aussi la dérivée du vecteur \vec{A} par

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\|\vec{A}\|}{dt} \vec{u}_A + \|\vec{A}\| \vec{\Omega} \wedge \vec{u}_A.$$

Cinématique du point matériel

2.1 Introduction

La cinématique consiste à étudier le mouvement d'un système sans s'intéresser aux causes qui sont à l'origine de ce mouvement. Nous n'aborderons pas dans ce chapitre les forces ou bien les lois fondamentales de la dynamique.



Un point matériel définit tout objet dont les dimensions peuvent être négligées et le mouvement se ramène à celui de son centre de masse. De même le mouvement de rotation du point sur lui-même n'a aucune incidence sur le mouvement du point matériel.

Dans la suite, l'espace est considéré euclidien homogène et isotrope. Un référentiel est un repère muni d'une horloge, c'est à dire en plus de repérer la position, le repère est doté d'une horloge permettant de mesurer le temps.

La position d'un point est repérée dans un référentiel physique : le laboratoire, la terre, le centre Le référentiel physique est doté de trois axes et d'une base et définit un repère. Le choix du système de coordonnées dans lequel sont exprimées les grandeurs cinématiques se fait selon la nature de la trajectoire afin d'alléger les formulations.



Les vitesses qui seront considérées dans ce cours sont très faibles par rapport à la vitesse de la lumière, ce qui nous affranchi de la relativité, d'une part, et la mesure du temps est absolue dans tous les référentiels, c'est à dire que les horloges de tous les référentiels indiquent le même temps quelque soit leurs mouvement les uns par rapport aux autres.

On adoptera la notation de point au dessus d'une variable pour représenter sa dérivée par rapport au temps.

2.2 Vitesse

La position d'un point M est repérée dans un référentiel $\mathcal{R}(O, X, Y, Z)$ par le vecteur position \overrightarrow{OM} .



Définition

Le vecteur vitesse du point M par rapport à \mathcal{R} , $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ est défini par

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+dt) - \overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \left. \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

L'expression explicite du vecteur vitesse dépend du système de coordonnées que l'on utilise. Aussi, l'on va l'exprimer dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques et curvilignes.

2.2.1 Coordonnées cartésiennes

La base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est solidement liée au référentiel \mathcal{R} et de ce fait les vecteurs de la base sont constants et leurs dérivées par rapport à n'importe quel paramètre sont nulles. L'expression de la dérivée droite par rapport au temps s'exprime dans ce système de coordonnées comme suit

$$\frac{d}{dt} = \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Aussi, l'expression de la vitesse dans ce cas est donnée par

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \left. \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \left(\dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \right) [x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}] \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

On rappelle que la dérivée partielle par rapport au temps d'une grandeur n'est différente de 0 que si la grandeur dépend explicitement du temps.

Dans la suite, quand on va opérer une dérivée droite par rapport au temps, on va omettre d'expliquer celle-ci en fonction des coordonnées avant de l'appliquer.

2.2.2 Coordonnées cylindriques

Rappelons La dérivée droite par rapport au temps dans ce système de coordonnées s'écrit comme

$$\frac{d}{dt} = \dot{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{z} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

La position du point M est décrite dans ce système de coordonnées par $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}$, ce qui donne pour la vitesse

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho \left. \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} \right|_R + \dot{z}\vec{k}$$

or \vec{e}_ρ est un vecteur unitaire dont le vecteur rotation par rapport à \mathcal{R} est $\dot{\varphi}\vec{k}$, ainsi on a

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}.$$

D'autres approches peuvent être utilisées pour retrouver ce résultat. L'un d'elles consiste à exprimer les vecteurs polaires dans la base cartésienne $\vec{e}_\rho = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}$ et $\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}$. Ce qui donne pour

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_\rho &= \dot{\varphi} \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} \\ &= \dot{\varphi} (-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}) \\ &= \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

et de la même manière on établit $\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho$.



Les mêmes résultats peuvent s'obtenir en partant du déplacement élémentaire dans le cas des coordonnées cylindriques.

Le vecteur vitesse peut se mettre sous forme $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = V_\rho\vec{e}_\rho + V_\varphi\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}$. où l'on fait apparaître la vitesse radiale, $V_\rho = \dot{\rho}$, et la vitesse orthoradiale $V_\varphi = \rho\dot{\varphi}$.

2.2.3 Coordonnées sphériques

De la même manière, on rappelle que la dérivée droite par rapport au temps dans ce système de coordonnées est

$$\frac{d}{dt} = \dot{r} \frac{\partial}{\partial r} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Le vecteur position est repéré dans ce cas par $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ et le vecteur vitesse est donné par

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{r}\vec{e}_r + r \left. \frac{d\vec{e}_r}{dt} \right|_R$$

or

$$\begin{aligned} \vec{e}_r = \sin\theta\vec{e}_\rho + \cos\theta\vec{k} \implies \left. \frac{d\vec{e}_r}{dt} \right|_R &= \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta)\vec{e}_\rho + \sin\theta \left. \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} \right|_R + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\cos\theta)\vec{k} \\ &= \dot{\theta}\cos\theta\vec{e}_\rho + \dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi - \dot{\theta}\sin\theta\vec{k}. \end{aligned}$$

or $\vec{e}_\theta = \cos\theta\vec{e}_\rho - \sin\theta\vec{k}$, ce qui donne

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi.$$



Ce même résultat peut être obtenu directement à partir du déplacement élémentaire dans le cas de coordonnées sphériques $d\vec{M} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\varphi d\varphi\vec{e}_\varphi$ et en divisant par dt on retrouve la vitesse du point M dans \mathcal{R} .

Une autre approche peut être utilisée pour aboutir au même résultat en constatant que le vecteur \vec{e}_r tourne dans \mathcal{R} avec $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{e}_r}{dt} \right|_R &= \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r \\ &= \dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{e}_r + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r \\ &= \dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\vec{e}_\theta \end{aligned}$$

et en remplaçant cette dernière expression dans l'expression de la vitesse du point M par rapport à \mathcal{R} , on retrouve le résultat recherché.

2.2.4 Coordonnées curvilignes

Le repère associé à ce système de coordonnées s'appelle le repère de Fresnet. La position du point M est repérée par l'abscisse curviligne s , qui est égale à la longueur de l'arc de la trajectoire à partir d'un point origine P , figure 3.1.

Il est possible de définir à chaque instant t un plan, que l'on appelle le plan osculateur, qui contient localement la trajectoire du point M .

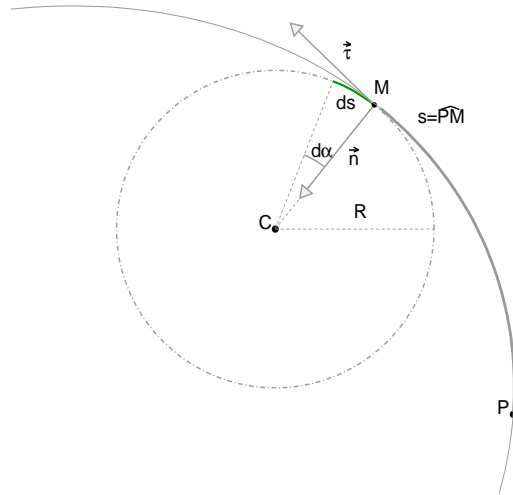


FIGURE 2.1 – *Coordonnées curvilignes*

La base orthormée directe associée à ce système, dite aussi la base de Fresnet, est définie à chaque instant t par les trois vecteurs :

- $\vec{\tau}$: tangent à la trajectoire au point M et orienté dans le sens du mouvement.
- \vec{n} : perpendiculaire à $\vec{\tau}$ et contenu dans le plan osculateur et est définie par la relation $d\vec{\tau} = d\alpha\vec{n}$, α étant l'angle de rotation instantanée de $\vec{\tau}$. De même, un déplacement infinitésimal de M engendre une variation de la coordonnée curviligne $ds = R d\alpha$, où R est appelé le rayon de courbure de la trajectoire au point M .
- \vec{b} qui est le vecteur perpendiculaire au plan osculateur. Il est donnée par $\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$.



La base de Fresnet est ainsi formée par $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$

Le vecteur vitesse peut être écrit dans ce cas comme suit

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \frac{ds}{dt} \vec{\tau}$$

2.3 Accélération



Définition

Le vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ du point M par rapport à \mathcal{R} , est défini par la dérivée par rapport au temps dans \mathcal{R} de $\vec{V}(M/\mathcal{R})$:

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \left. \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_R.$$

A l'instar du traitement réservé au vecteur vitesse, nous allons exprimer l'accélération du point M dans \mathcal{R} dans les différents systèmes de coordonnées.

2.3.1 Coordonnées cartésiennes

L'accélération est donnée par

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \left. \frac{d}{dt} [x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}] \right|_R$$

ce qui donne

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

2.3.2 Coordonnées cylindriques

L'expression de l'accélération est obtenue en dérivant le vecteur vitesse exprimé dans la base cylindrique et ce par rapport au temps dans le référentiel \mathcal{R} :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \left. \frac{d}{dt} [\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}] \right|_R \\ &= \left. \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} \right|_R + \left. \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \right|_R + \ddot{z}\vec{k} \end{aligned}$$

on obtient

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{k}.$$

Si $z = 0$, on retrouve l'expression de l'accélération en coordonnées polaires.

2.3.3 Coordonnées sphériques

De la même façon que pour les autres systèmes des coordonnées, on part de l'expression de la vitesse et on dérive par rapport au temps et ce dans le référentiel \mathcal{R} . Aussi,

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \frac{d}{dt} \left[\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi \right] \Big|_R \\ &= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} \Big|_R + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \Big|_R + (\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta)\vec{e}_\varphi + \\ &\quad + (r\dot{\varphi}\sin\theta)\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \Big|_R\end{aligned}$$

A partir de là, on peut utiliser plusieurs approches. Soit de calculer directement les dérivées des vecteurs de la base sphérique en les exprimant dans la base cartésienne ou bien cylindrique. Une deuxième approche consiste à utiliser la dérivation d'un vecteur unitaire, et c'est cette dernière que l'on va utiliser. Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_r}{dt} \Big|_R &= (\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi) \wedge \vec{e}_r \\ &= [\dot{\varphi}(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta) + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi] \wedge \vec{e}_r \\ &= \dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \text{et} \\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \Big|_R &= (\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi) \wedge \vec{e}_\theta \\ &= \dot{\varphi}\cos\theta\vec{e}_\varphi - \dot{\theta}\vec{e}_r \\ \text{et} \\ \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \Big|_R &= (\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi) \wedge \vec{e}_\varphi \\ &= -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho \\ &= -\dot{\varphi}(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta)\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\vec{e}_\theta + \\ &\quad + (2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\vec{e}_\varphi.\end{aligned}$$

2.3.4 Coordonnées curvilignes

La dérivée droite par rapport au temps s'exprime dans ce système de coordonnées par

$$\frac{d}{dt} = \dot{s} \frac{\partial}{\partial s} + \dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial t}$$

On dérive la vitesse exprimée en coordonnées curvilignes comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \left. \frac{d(\dot{s}\vec{\tau})}{dt} \right|_R \\ &= \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s} \left. \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right|_R \end{aligned}$$

or comme $\vec{\tau}$ est un vecteur unitaire dont le vecteur de rotation est $\dot{\alpha}\vec{b}$, sa dérivée par rapport au temps est donnée par

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{\tau}}{dt} \right|_R &= \dot{\alpha}\vec{b} \wedge \vec{\tau} \\ &= \dot{\alpha}\vec{n} \end{aligned}$$

et $\dot{s} = R\dot{\alpha} \implies \dot{\alpha} = \dot{s}/R$, ce qui implique, en remplaçant \dot{s} par $\|\vec{V}(M/\mathcal{R})\| = V$

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \left. \frac{dV}{dt} \right|_R \vec{\tau} + \frac{V^2}{R} \vec{n}.$$



$\gamma_\tau = \dot{V}$ est appelée l'accélération tangentielle à la trajectoire au point M et
 $\gamma_n = V^2/R$ est appelée l'accélération normale à la trajectoire au même point.

Le rayon de courbure de la trajectoire au point M peut être déduit à partir des expressions précédentes. En effet

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{V^2}{R} \\ &= \left\| \vec{\tau} \wedge \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \right\| \\ &= \left\| \frac{\vec{V}(M/\mathcal{R})}{V} \wedge \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \right\| \end{aligned}$$

ce qui donne

$$R = \frac{V^3}{\left\| \vec{V}(M/\mathcal{R}) \wedge \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \right\|}$$

En faisant le produit scalaire de l'accélération et de la vitesse, on obtient :

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}) = V \frac{dV}{dt} \Big|_R$$

comme $V > 0$, le signe du produit scalaire entre l'accélération et la vitesse du point M nous renseigne sur la nature du mouvement.



- $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}) > 0$ alors $dV/dt > 0$ et le mouvement est accéléré ;
- $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}) < 0$ alors $dV/dt < 0$ et le mouvement est décéléré ;
- $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}) = 0$ alors $dV/dt = 0$, la vitesse est constante et le mouvement est uniforme.

2.4 Changement de référentiel

Comme on le verra dans le chapitre réservé à la dynamique, la loi de la relation fondamentale de la dynamique est valable dans un référentiel inertiel ou Galiléen. Il est donc très important d'étudier le changement de référentiel dans l'objectif de formuler cette loi dans un référentiel quelconque.

De plus, le mouvement d'un point matériel peut s'avérer très simple si l'on peut le décomposer en passant par un repère intermédiaire, lui même en mouvement par rapport au repère dans lequel se trouve l'observateur.

Pour illustrer ce point, prenons l'exemple d'une bille qui chute librement dans un train et l'observateur est situé sur les quais. Le mouvement de la bille par rapport à l'observateur décrit une trajectoire parabolique alors que son mouvement par rapport au repère lié au train est rectiligne.

Considérons deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre. Le premier référentiel $\mathcal{R}(O, xyz)$ d'origine O est muni de la base cartésienne orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le deuxième référentiel est noté $\mathcal{R}_1(O_1, x_1y_1z_1)$ d'origine O_1 et muni de la base cartésienne $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$.

Le repère \mathcal{R} est dit absolu, il permet d'observer le mouvement absolu du point matériel. Sa base cartésienne est constante et donc la dérivée de ces vecteurs est nulle. Notons que ce repère n'est pas forcément un repère Galiléen. Notons que le caractère absolu du repère tient compte seulement de son choix privilégié pour observer le mouvement du point matériel.

Le repère \mathcal{R}_1 est dit relatif et sa base cartésienne est fixe par rapport à \mathcal{R}_1 par contre

elle est mobile par rapport à \mathcal{R} .

Le but de ce chapitre est de déterminer les relations entre les vitesses et les accélérations respectivement dans les deux référentiels : $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = f[\vec{V}(M/R_1)]$ et $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = f[\vec{\gamma}(M/R_1)]$.



Notons que le choix des bases cartésiennes dans les deux référentiels est dicté seulement par la commodité des calculs. Les résultats restent valables quelques soient les bases choisies dans les deux référentiels.

2.4.1 Composition des vitesses

Soit $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})$ le vecteur rotation du repère relatif par rapport au repère absolu. La position de M peut être écrite comme suit

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} \\ &= \overrightarrow{OO_1} + x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1\end{aligned}$$

(x_1, y_1, z_1) étant les coordonnées cartésiennes du point M dans le repère relatif. La vitesse du point M par rapport à \mathcal{R} est égale à

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \left. \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \vec{V}(O_1/\mathcal{R}) + \dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{y}_1\vec{j}_1 + \dot{z}_1\vec{k}_1 + x_1 \left. \frac{d\vec{i}_1}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + y_1 \left. \frac{d\vec{j}_1}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + z_1 \left. \frac{d\vec{k}_1}{dt} \right|_{\mathcal{R}}.\end{aligned}$$

Comme les vecteurs de la base de \mathcal{R}_1 sont en rotation dans \mathcal{R} avec le vecteur rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})$, nous avons

$$\left. \frac{d\vec{i}_1}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{i}_1, \quad \left. \frac{d\vec{j}_1}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{j}_1, \quad \left. \frac{d\vec{k}_1}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{k}_1.$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \vec{V}(O_1/\mathcal{R}) + \dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{y}_1\vec{j}_1 + \dot{z}_1\vec{k}_1 + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge (x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1) \\ &= \vec{V}(O_1/\mathcal{R}) + \dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{y}_1\vec{j}_1 + \dot{z}_1\vec{k}_1 + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M}\end{aligned}$$

ainsi le vecteur vitesse peut être décomposé comme suit

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(M/R_1) + \vec{V}(O_1/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M}.$$

On pose $\vec{V}_r(M) = \vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$, appelée la vitesse relative, et $\vec{V}_e(M) = \vec{V}(O_1/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M}$, appelée la vitesse d'entraînement, d'où la loi de composition des vitesses

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}_e(M) + \vec{V}_r(M).$$

La vitesse d'entraînement du point M par rapport à \mathcal{R} est égale à la vitesse d'un point fixe dans \mathcal{R}_1 par rapport à \mathcal{R} .

En effet, les coordonnées du point M selon la base de \mathcal{R}_1 se comportent dans ce cas comme si elles sont constantes.

Remarquons que la dérivée de n'importe quel vecteur \vec{A} par rapport à \mathcal{R} peut se décomposer comme suit

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{A}.$$

\mathcal{R}_1 en translation par rapport à \mathcal{R}

\mathcal{R}_1 est considéré en translation par rapport à \mathcal{R} lorsque les vecteurs de la base de \mathcal{R}_1 restent constamment parallèles aux vecteurs de la base de \mathcal{R} . Dans ce cas, $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \vec{0}$ et la vitesse d'entraînement est réduite à la vitesse de l'origine O_1 de \mathcal{R}_1 .



Remarques

Si $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \vec{0}$ et l'origine de O_1 de \mathcal{R}_1 décrit un cercle, il s'agira d'un mouvement de translation circulaire.

2.4.2 Composition des accélérations

Le vecteur accélération du point M par rapport à \mathcal{R} est donné par

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \left. \frac{d\vec{V}_r(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\vec{V}_e(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \left. \frac{d\vec{V}_r(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}_r(M) + \left. \frac{d\vec{V}_e(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}_e(M) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{V}_r(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \left. \frac{d\vec{V}_r(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}_r(M) \\ &= \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}_r(M) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d\vec{V}_e(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \left. \frac{d\vec{V}(O_1/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d(\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overline{O_1\vec{M}})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\
 &= \vec{\gamma}(O_1/\mathcal{R}_1) + \dot{\vec{\Omega}}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overline{O_1\vec{M}} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \left(\left. \frac{d\overline{O_1\vec{M}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overline{O_1\vec{M}} \right) \\
 &= \vec{\gamma}(O_1/\mathcal{R}_1) + \dot{\vec{\Omega}}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overline{O_1\vec{M}} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}_r(M) + \\
 &\quad + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overline{O_1\vec{M}}).
 \end{aligned}$$

On pose

- $\vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1)$, appelée l'accélération relative ;
- $\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(O_1/\mathcal{R}) + \dot{\vec{\Omega}}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overline{O_1\vec{M}} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overline{O_1\vec{M}})$, appelée l'accélération d'entraînement ;
- $\vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}_r(M)$, appelée l'accélération de Coriolis.

Aussi, le vecteur accélération peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned}
 \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) + \vec{\gamma}(O_1/\mathcal{R}) + \dot{\vec{\Omega}}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overline{O_1\vec{M}} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overline{O_1\vec{M}}) + \\
 &\quad + 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}_r(M)
 \end{aligned}$$

et la loi de composition des vitesses peut être énoncée comme suit

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M).$$

Mouvement de translation

Si $\vec{\gamma}(O_1/\mathcal{R}) = \vec{0}$, le mouvement de \mathcal{R}_1 par rapport à \mathcal{R} est une translation et on a $\vec{\gamma}_c = \vec{0}$ et $\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}(O_1/\mathcal{R})$.

Si la translation du repère relatif \mathcal{R}_1 est rectiligne et uniforme alors $\vec{\gamma}(O_1/\mathcal{R}) = \vec{0}$ et l'accélération absolue et relative deviennent égales, $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1)$. C'est un résultat qui montre bien, comme on le verra dans les chapitres suivants, l'intérêt de la classe des référentiels qui sont en mouvement de translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Rappelons une nouvelle fois que le choix de la base cartésienne dans les deux référentiels, absolu et relatif, n'est fait que parce que les développements de calcul sont bien commodes. Les résultats obtenus quant à la composition des vitesses et des accélérations restent valables quelque soit la base choisie, comme c'est illustré dans les exemples qui suivent et qui font intervenir les différents systèmes de coordonnées dans le référentiel relatif.

Coordonnées cylindriques

Vitesse : Le repère absolu est muni de la base cartésienne, $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Quant au repère relatif, on prend la base cylindrique $\mathcal{R}(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$. Notons que les deux référentiels ont la même origine, $O_1 = O$, ce qui implique qu'il faut substituer dans les lois de composition les expressions suivantes $\vec{V}(O_1/\mathcal{R}) = \vec{0}$ et $\vec{\gamma}(O_1/\mathcal{R}) = \vec{0}$. En plus, le vecteur rotation de \mathcal{R}_1 par rapport à \mathcal{R} est $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\varphi}\vec{k}$. Il ne nous reste maintenant qu'à appliquer les lois de composition. On a $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\vec{V}_r(M) &= \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} \\ &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{z}\vec{k}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{V}_e(M) &= \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M} \\ &= \dot{\varphi}\vec{k} \wedge (\rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}) \\ &= \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

ce qui donne finalement en additionnant les vitesses relative et d'entraînement

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M) \\ &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}.\end{aligned}$$

qui n'est d'autre que la vitesse calculée auparavant dans le système des coordonnées cylindriques.

Si $z = 0$, on retrouve l'expression de la vitesse dans le système des coordonnées polaires.

Accélération : De la même manière, appliquons la relation de composition des accélérations, en tenant compte de $\vec{\gamma}(O_1/\mathcal{R}) = \vec{0}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_r(M) &= \left. \frac{d\vec{V}_r(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} \\ &= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{z}\vec{k}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_e(M) &= \dot{\vec{\Omega}}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M}) \\ &= \ddot{\varphi}\vec{k} \wedge (\rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}) + \dot{\varphi}^2\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge [\rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}]) \\ &= \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_c(M) &= 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}_r(M) \\ &= 2\dot{\varphi}\vec{k} \wedge (\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{z}\vec{k}) \\ &= 2\rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + z\ddot{k}$$

qui n'est d'autre que l'accélération du point M par rapport à \mathcal{R} retrouvée dans le système de coordonnées cylindriques. Si $z = 0$, on retrouve l'expression de l'accélération du point M par rapport à \mathcal{R} dans le système de coordonnées polaires.

Coordonnées sphériques

Vitesse : De manière analogue que dans le paragraphe précédent, le repère relatif est muni cette fois-ci de la base sphérique $\mathcal{R}(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$. Comme, les deux référentiels, absolu et relatif, ont la même origine $O_1 = O$, il suffit de substituer dans les relations de composition de vitesse et d'accélération respectivement $\vec{V}(O_1/\mathcal{R}) = \vec{0}$ et $\vec{\gamma}(O_1/\mathcal{R}) = \vec{0}$.

De même le vecteur rotation du repère relatif par rapport au repère absolu est égal dans ce cas à $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi$.

En général, pour retrouver le vecteur rotation, il suffit d'additionner toutes les rotations possibles de \mathcal{R}_1 par rapport à \mathcal{R} , ce qui correspond dans notre cas aux deux rotations repérées par les angles φ et θ et dont les vecteurs sont portés par les vecteurs perpendiculaires aux plans de rotations.

Partons de $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$,

$$\begin{aligned}\vec{V}_r(M) &= \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} \\ &= \dot{r}\vec{e}_r\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{V}_e(M) &= \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM} \\ &= (\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi) \wedge r\vec{e}_r \\ &= r\dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r \\ &= r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

et la vitesse du point M par rapport à \mathcal{R} est alors égale à

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M) \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

qui est la vitesse du point M par rapport à \mathcal{R} exprimée dans le système des coordonnées sphériques.

Accélération : Calculons d'abord la dérivée par rapport au temps du vecteur rotation :

$$\left. \frac{d\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \ddot{\varphi}\vec{k} + \ddot{\theta}\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \Big|_{\mathcal{R}}$$

$$\begin{aligned}
&= \ddot{\varphi}\vec{k} + \ddot{\theta}\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}(\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi) \wedge \vec{e}_\varphi \\
&= \ddot{\varphi}\vec{k} + \ddot{\theta}\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{e}_\varphi \\
&= \ddot{\varphi}\vec{k} + \ddot{\theta}\vec{e}_\varphi - \dot{\theta}\dot{\varphi}(\cos\theta\vec{e}_\theta + \sin\theta\vec{e}_r) \\
&\text{et} \\
\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_1) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M}) &= (\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi) \wedge [(\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi) \wedge r\vec{e}_r] \\
&= (\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi) \wedge (r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \\
&= -r\dot{\varphi}^2\sin\theta(\cos\theta\vec{e}_\theta + \sin\theta\vec{e}_r) + r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\vec{e}_\varphi - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r \\
&\text{et} \\
\dot{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M} &= r\ddot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\vec{e}_\varphi.
\end{aligned}$$

On a maintenant tous les éléments pour exprimer les accélérations en partant de la relation de composition et en tenant compte du fait que $O_1 = O$. Aussi, l'on obtient

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_r(M) &= \left. \frac{d\vec{V}_r(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} \\
&= \ddot{r}\vec{e}_r
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_e(M) &= \dot{\vec{\Omega}}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M}) \\
&= (-r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (-r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + (2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta)\vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}_c(M) &= 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_1) \wedge \vec{V}_r(M) \\
&= 2(\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi) \wedge \dot{r}\vec{e}_r \\
&= 2\dot{r}(\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\vec{e}_\theta)
\end{aligned}$$

ce qui donne enfin pour l'expression de l'accélération du point M dans le référentiel \mathcal{R}

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \\
&\quad + (r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta)\vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

et qui n'est d'autre que celle déjà retrouvée directement auparavant.

3.1 Introduction

Ce chapitre traite les relations fondamentales sur lesquelles le formalisme de la mécanique est construit. Les lois qui seront abordées et qui sont à la base de la mécanique sont exprimées sous forme vectorielle. Manière élégante de regrouper plusieurs relations physiques dans la même équation.

Les lois de la dynamique permettent d'étudier le mouvement d'un corps en reliant les causes qui sont à l'origine de ce mouvement à ses caractéristiques. L'avantage des formulations des lois de la dynamique réside aussi dans le fait qu'elles ne font pas référence à un repère particulier. Toutefois, cela suppose un espace euclidien, isotrope et homogène.

3.2 Masse et forces

3.2.1 Masse

Les points matériels sont caractérisés par une grandeur scalaire positive que l'on appelle la masse, notée m .

L'unité de la masse dans le système international (SI) est le kilogramme (Kg).



Dans le domaine des vitesses que l'on traite dans le cadre de ce cours, la masse est **une constante et reste invariante dans un changement de référentiel.**

Bien que la masse mise en jeu dans les relations de la dynamique, que l'on appelle la masse dynamique ou inerte, et la masse qui donne naissance à la force gravitationnelle, que l'on appelle la masse gravitationnelle, sont d'origines différentes, nous les considérons dans ce cours identiques et donc nous prenons le rapport entre les deux égal à l'unité.

3.2.2 Forces

La relation fondamentale de la dynamique, comme on le verra dans ce chapitre, relie l'accélération d'un point matériel aux forces qui lui sont appliquées et le coefficient de proportionnalité est ce que l'on appelle la masse. Nous passerons en revue dans ce chapitre brièvement les forces les plus couramment rencontrées.

L'unité de la force dans le système international (S.I) est le Newton noté N tel que $1N = 1kg\ m\ s^{-2}$. On distingue deux classes de forces, que l'on passe en revue.

Forces d'interactions à distance

On appelle ces forces par les forces élémentaires ou interactions fondamentales. Elles sont au nombre de quatre, citées dans l'ordre de l'intensité décroissante.

Force forte : elle est responsable de la cohésion du noyau. Elle interagit entre les protons et les neutrons, constituants du noyau.

Force électromagnétique : elle se manifeste entre les particules électriquement chargées. La force électromagnétique unifie la force électrique ou coulombienne et la force magnétique.

Deux point matériels ayant des charges électriques respectivement q_1 et q_2 sont soumis à une force électrique

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

où $\vec{F}_{1/2}$ est l'action de la particule (1) sur la particule (2). Les charges sont exprimées en Coulomb (C), et la constante ϵ_0 , appelée la permittivité électrique dans le vide, est reliée à la vitesse de la lumière dans le vide c et à la perméabilité magnétique μ_0 dans le vide par $\epsilon_0\mu_0c^2 = 1$, $c = 2.998\ 10^8\ m\ s^{-1}$, $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}\ S.I$ et $\epsilon_0 = 8.854\ 10^{-12}\ S.I$.

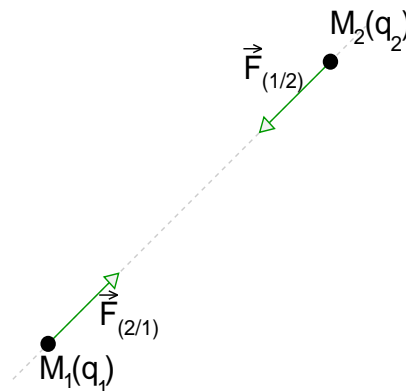


FIGURE 3.1 – Force attractive entre deux charges électriques de même signes.

La force est attractive si les deux charges sont de signes opposés et répulsive dans le cas contraire.

La force magnétique se manifeste lorsqu'un point matériel ayant une charge (q) se déplace avec une vitesse \vec{V} dans une région où règne un champ magnétique \vec{B} . Elle est de la forme

$$\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B}.$$

Quand une particule chargée (q) se déplace avec une vitesse \vec{V} dans une région où règnent un champ magnétique \vec{B} et un champ électrique \vec{E} , elle est soumise à la force dite de Lorentz, qui est la résultante de la force électrique et de la force magnétique,

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} \right).$$

Force faible : elle est responsable de ce que l'on appelle la désintégration β , transformation d'un proton en neutron et vice-versa ;

Force gravitationnelle : elle se manifeste entre les corps dotés d'une masse.



Newton stipula en 1650 que deux masses ponctuelles m_1 et m_2 séparées d'une distance r s'attirent en raison de leurs masses et l'intensité de la force varie comme l'inverse du carré de la distance qui les sépare selon une direction qui passe par les deux masses :

$$\vec{F}_{1/2} = -K_G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}.$$

$\vec{F}_{1/2}$ étant la force exercée par la particule (1) sur la particule (2); K_G étant la constante gravitationnelle universelle ($= 6.6726 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$) avec $\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$. La relation est parfaitement symétrique.

Forces de contact

Elles sont le résultat macroscopique des quatre forces fondamentales.

Les forces de frottement solide : elles se manifestent entre deux solides en contact. Notons \vec{R} la réaction d'un solide sur l'autre qu'il est utile de décomposer en une composante normale à la surface de contact, \vec{R}_N , et une composante tangentielle \vec{R}_T ;



La réaction est toujours dirigée dans le sens opposé du mouvement.



Remarques

Deux cas peuvent être relevés :

- Pas de mouvement relatif entre les deux solides, c'est à dire pas de glissement : dans ce cas la composante tangentielle $|R_T| < k_s |R_N|$. C'est ce que l'on appelle **la condition de frottement statique**. k_s est appelé le coefficient de frottement statique.
- Mouvement relatif d'un solide par rapport à un autre : on dit qu'il y a glissement dans ce cas. La composante tangentielle dans ce cas est reliée à la composante normale par $|R_T| = k_d |R_N|$. k_d est appelé le coefficient de frottement dynamique.

Les forces de frottement visqueux : Ce frottement s'applique à un solide se déplaçant dans un milieu fluide, gazeux ou liquide.

La poussée d'archimède : elle se manifeste lorsqu'un solide est plongé dans un fluide. Elle est égale en intensité au poids du liquide déplacé et dirigée dans le sens opposé de ce dernier :

$$\vec{F}_{ar} = \rho \times Vol \times g \times \vec{k}$$

où ρ est la masse volumique du fluide, Vol est le volume du solide, g est l'accélération de la pesanteur et \vec{k} est le vecteur unitaire dirigé vers le haut selon la verticale.

Les forces de tension : comme exemple, l'on peut citer la force de rappel d'un ressort ou la force de tension d'un fil élastique. Généralement, l'intensité de cette catégorie de forces est en première approximation proportionnelle à l'allongement

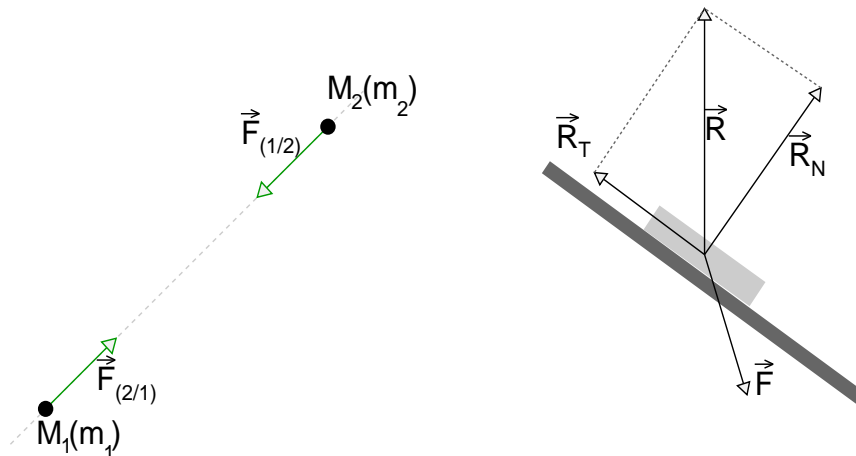


FIGURE 3.2 – Figure de gauche : Force gravitationnelle s'exerçant entre deux masses m_1 et m_2 . Figure de droite : Force de frottement solide.



Les deux premières interactions fondamentales, forte et faible, sont de faible portée et s'exercent au niveau subatomique et donc se traitent dans le cadre de la mécanique quantique.

3.3 Quantité de mouvement

C'est une grandeur qui joue un rôle central dans la dynamique. Nombre de phénomènes peuvent se comprendre de manière aisée si l'on comprend l'effet des forces sur la quantité de mouvement.



Définition

On définit par la quantité de mouvement d'un point matériel de masse m et animé d'une vitesse \vec{V} la quantité

$$\vec{P} = m\vec{V}$$

La quantité de mouvement augmente avec la vitesse et la masse. Elle est exprimée dans le système international (SI) en kilogramme mètre par seconde ($Kg\ m\ s^{-1}$).



Notons que la quantité de mouvement dépend du référentiel dans lequel elle est exprimée, étant donnée que la vitesse l'est.

3.4 Principe fondamental de la dynamique : PFD

La définition de la quantité de mouvement permet de donner l'énoncé exact du principe fondamental de la dynamique. Ce principe ou la loi qui lui est associée ne sont valables que dans un référentiel galiléen, qui sera défini ultérieurement.

Le PFD peut être énoncé soit sous sa forme différentielle soit sous sa forme de dérivée.

Enoncé du PFD sous forme différentielle

La variation de la quantité de mouvement est égale au produit de la force extérieure appliquée par le temps pendant lequel cette force est appliquée :

$$d\vec{p} = \vec{F}_{ext} dt$$

Enoncé du PFD sous forme de dérivée

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

Si plusieurs forces sont appliquées à la masse m , c'est la résultante des forces qu'il faut prendre en compte.

3.5 Principe de l'action et de la réaction

Enoncé

Quand 2 corps interagissent, la force $\vec{F}_{1/2}$ exercée par le premier corps sur le second est égale et opposée à la force $\vec{F}_{2/1}$ engendrée par le deuxième corps sur le premier :

$$\vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/1} = \vec{0}.$$

**Exemple**

Considérons deux points matériels m_1 et m_2 interagissant entre eux et supposons qu'aucune force extérieure n'est mise en jeu. Appliquons le PFD au premier point matériel

$$d\vec{p}_1 = \vec{F}_{2/1} dt$$

et au deuxième point matériel

$$d\vec{p}_2 = \vec{F}_{1/2} dt$$

ce qui donne $d\vec{p}_1 + d\vec{p}_2 = (\vec{F}_{2/1} + \vec{F}_{1/2})dt$. Comme le principe de l'action et de la réaction implique $\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}$ cela implique que $d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{0}$.

On définit la quantité de mouvement totale $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$.

La relation précédente montre que $d\vec{P} = \vec{0}dt \implies \vec{P} = \vec{C}te$. On en conclut que la quantité de mouvement totale est constante.



Ce résultat reste valable lorsque l'on a N corps interagissant entre eux. La quantité de mouvement totale du système reste constante au cours du temps.

3.6 Les lois de Newton

Les lois de Newton ont régi la mécanique jusqu'à l'aube du 20^{ème} siècle. Toute leur portée est contenue dans le PFD.

3.6.1 Première loi de Newton : Principe d'inertie

Cette loi peut être énoncée de plusieurs manières.

**Enoncé de la 1^{ère} loi de Newton**

Un corps isolé, sur lequel aucune force n'agit, se déplace avec une vitesse constante ou reste au repos selon son état initial.

$$\vec{F} = \vec{0} \implies \vec{V} = \vec{C}te \quad \text{1^{ère} loi.}$$

Énoncé de la 1^{ère} loi de Newton (Bis)

Il existe un référentiel privilégié \mathcal{R} par rapport auquel tout point matériel M isolé a un mouvement rectiligne uniforme, si sa vitesse initial est non nulle, ou au repos si c'est le cas contraire.

Aussi faut-il définir ce référentiel privilégié qui fait partie d'une catégorie de référentiels dits galiléens.

3.6.2 Deuxième loi de Newton

Cette loi est l'ancienne loi fondamentale de la dynamique.

Énoncé de la 2^{ème} de Newton

La force totale \vec{F} appliquée à un corps est égale au produit de sa masse m par son accélération $\vec{\gamma}$

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}$$

Notons que cette loi, n'est valable que pour des corps ayant des masses constantes. Ce qui n'est pas le cas du PFD. En fait, lorsque les vitesses mises en jeu sont faibles, les masses des particules sont constantes et donc la deuxième loi de Newton est applicable. Par contre lorsque les vitesses en question sont voisines de celle de la lumière, nous sommes dans le domaine relativiste, qui ne fait pas l'objet de ce cours, et la masse varie avec la vitesse de la particule et la deuxième loi de Newton n'est plus valable. C'est le PFD qu'il faut alors appliquer.



On note bien que la deuxième loi de Newton est plus restrictive que le PFD

.

Toutefois, pour ce cours, le PFD et la deuxième loi de Newton se confondent.

3.6.3 Troisième loi de Newton

c'est la loi de l'action et de la réaction ou la loi d'opposition des actions réciproques. C'est le même énoncé que précédemment

$$\vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/1} = \vec{0} \quad \text{3^{ème} loi.}$$

**Remarques**

La première loi se déduit de la seconde et n'apporte rien de plus. C'est seulement l'origine historique des deux lois qui les distinguent. En effet, la première loi peut être attribuée à Galilée et a été élaborée avant les lois de Newton.

3.7 Référentiels Galiléens

La première loi et la deuxième loi de Newton ne sont valables que dans un référentiel non accéléré, que l'on appelle un référentiel galiléen ou inertiel.

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'un point matériel a la même accélération dans deux référentiels en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre.

On peut énoncer que les lois de Newtons sont valables dans des référentiels en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

**Remarques**

La terre est animée d'un mouvement composé par une rotation sur elle même avec une vitesse angulaire $\omega = 7.6 \times 10^{-5} \simeq 10^{-4} \text{ rds}^{-1}$ et d'un mouvement orbital elliptique autour du soleil.

Pour des problèmes locaux et des temps plus courts que la journée, le référentiel du laboratoire peut être pris pour un référentiel galiléen. On néglige la rotation de la terre sur elle même.

Pour des problèmes mettant en jeu des mouvements ou des temps à grande échelle, on peut utiliser un référentiel lié au centre de la terre, appelé référentiel géocentrique. Les axes sont orientés vers des étoiles fixes.

Pour des mouvements à très grande échelle, comme le mouvement des planètes, on utilise le référentiel lié au centre du soleil, les axes étant orientés vers des étoiles fixes. Ce référentiel est appelé le référentiel héliocentrique.

3.8 Référentiels non galiléens

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que les référentiels non galiléens sont des référentiels accélérés. Toutefois, la résolution d'un problème de dynamique, en utilisant le PFD, dans un référentiel non galiléen reste possible à condition, comme on va le voir dans ce paragraphe, de rajouter au PFD des termes qui compensent l'accélération du référentiel non inertiel sous forme de pseudo-forces que nous appelons des forces d'inertie

ou des forces d'origine cinématique.

3.8.1 Expression du PFD

Soit \mathcal{R} un référentiel galiléen et \mathcal{R}_1 un référentiel en mouvement quelconque par rapport à \mathcal{R} . La relation de composition des accélérations nous permet d'écrire pour un point matériel M

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c.$$

L'expression du PFD dans le référentiel galiléen est

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \\ &= m(\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c) \\ \implies \vec{F} - m\vec{\gamma}_e - m\vec{\gamma}_c &= m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) \end{aligned}$$



On peut écrire que la masse multipliée par l'accélération de M dans \mathcal{R}_1 est égale aux forces extérieures auxquelles on ajoute des termes supplémentaires que l'on appelle les forces d'inertie et qui sont

la force d'inertie d'entraînement que l'on note $\vec{f}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e$;

la force d'inertie de Coriolis que l'on note $\vec{f}_{ic} = -m\vec{\gamma}_c$

La relation du principe fondamental de la dynamique peut s'écrire dans \mathcal{R}_1 comme

$$m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) = \vec{F} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}.$$



Remarque

Notons que l'on a retrouvé l'usage de la relation fondamentale de la dynamique dans un référentiel non galiléen à condition de rajouter des forces d'inertie qui compensent l'accélération du référentiel non galiléen.

**Exemple**

Considérons un point matériel M de masse m en rotation uniforme dans le plan Oxy du référentiel \mathcal{R} . Soit \mathcal{R}_1 le référentiel lié au point matériel. Alors $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\vec{k}$, $\vec{V}(M/\mathcal{R}_1) = \vec{0}$ et $O_1 \equiv O$. Si la rotation du point matériel est repérée par l'angle θ alors $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\vec{k}$ et $\dot{\theta}$ constante.

Après avoir explicité les données de l'exemple, on peut établir que l'accélération de Coriolis est

$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) = \vec{0}.$$

Comme $\dot{\vec{\Omega}}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \vec{0}$ et $O_1 \equiv O$ alors l'accélération d'entraînement est

$$\vec{\gamma}_e = \dot{\vec{\Omega}}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge (\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M}).$$

Soit H la projection de M dans le plan du mouvement, qui dans ce cas le plan Oxy , et notons par $R = OH$, alors l'accélération d'entraînement exprimée dans la base polaire est

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_e &= \dot{\theta}^2 \vec{k} \left[\vec{k} \wedge (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}) \right] \\ &= R\dot{\theta}^2 \vec{k} \left[\vec{k} \wedge (\|\overrightarrow{MH}\|\vec{k} + R\vec{e}_\rho) \right] \\ &= R\dot{\theta}^2 \vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho) \\ &= -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_\rho. \end{aligned}$$



On note que l'accélération d'entraînement est centripète.

On peut ainsi appliquer la relation du principe fondamental de la dynamique dans \mathcal{R}_1 à condition d'ajouter la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e = mR\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho$.

3.9 Equilibre d'un point matériel dans un référentiel \mathcal{R}

Un point matériel est dit en équilibre dans un référentiel \mathcal{R} si ses coordonnées ne dépendent pas explicitement du temps. Une condition nécessaire et suffisante d'équilibre est que

$$\begin{cases} \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \vec{0} \quad \forall t \\ \vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{0} \quad \text{à } t = 0. \end{cases}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que le point matériel soit en équilibre dans \mathcal{R} est que la résultante des forces soit nulle.



⚠ Notez bien, que si \mathcal{R} n'est pas galiléen, il faut tenir compte des forces d'inertie.

3.10 Application du PFD

Soit $\mathcal{R}(O,xyz)$ un référentiel galiléen. Considérons un point matériel suspendu par un fil de longueur l incliné de $\alpha > 0$ par rapport à Oz . M est animé d'un mouvement de rotation uniforme par rapport à \mathcal{R} dans le plan (xy) , figure 3.3.

Soit $\mathcal{R}_1(Ox_1y_1z_1)$ un référentiel lié au point matériel tel que $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\vec{k}$, $\dot{\theta} = \omega = \text{constante}$.

Calculons la valeur de la tension T et trouvons la condition sur la pulsation ω pour qu'un tel mouvement soit possible.

Nous allons utiliser deux méthodes, :

PFD dans \mathcal{R}_1 : Puisque \mathcal{R}_1 est non galiléen calculons les forces d'inerties.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R} \text{ lié à } M \implies \vec{V}_r = \vec{0} \text{ et } \vec{\gamma}_r = \vec{0} \\ \vec{V}_r = \vec{0} \implies \vec{\gamma}_c = \vec{0} \\ \dot{\omega} = 0 \implies \vec{\gamma}_e = l\omega^2 \sin\alpha \vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho) = -l\omega^2 \sin\alpha \vec{e}_\rho \end{array} \right.$$

La seule force d'inertie non nulle est la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e = ml\omega^2 \sin\alpha \vec{e}_\rho$. Le PFD dans \mathcal{R}_1 , sachant que les forces extérieures s'exerçant sur M sont son poids $m\vec{g}$ et la tension du fil \vec{T} , s'écrit alors comme

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{f}_{ie} = m\vec{\gamma}_r \implies (-mg + T\cos\alpha)\vec{k} - (T\sin\alpha - ml\omega^2 \sin\alpha)\vec{e}_\rho = \vec{0}.$$

C'est une équation vectorielle que l'on projète sur Oz et sur Ox_1 sachant que $\vec{k} \cdot \vec{e}_\rho = 0$ pour $\sin\alpha \neq 0$ et donc $\alpha \neq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Projection selon } Oz : \quad T\cos\alpha - mg = 0 \implies T = \frac{mg}{\cos\alpha} \\ \text{Projection selon } Ox_1 : \quad T\sin\alpha - ml\omega^2 \sin\alpha = 0 \implies T = ml\omega^2 \end{array} \right.$$

La première équation détermine la valeur de T en fonction de la masse et de l'angle α . Pour avoir la condition qu'un tel mouvement soit permis, il suffit de procéder comme suit

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} \text{ et } T = ml\omega^2 \implies \omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}$$

comme $0 < \alpha < \pi/2 \implies 0 < \cos\alpha \leq 1$ et donc la racine carrée est bien définie et ω doit vérifier

$$\omega \geq \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

ω_0 est appelée la pulsation propre du système.

Pour que le mouvement puisse avoir lieu, il faut que la pulsation imposée au système soit supérieure à sa pulsation propre.

PFD dans \mathcal{R} : Dans ce cas l'accélération du point matériel est

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \left. \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OM} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= l \sin\alpha \left. \frac{d^2}{dt^2} \vec{e}_\rho \right|_{\mathcal{R}} = l \omega^2 \sin\alpha \vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho) \\ &= -l \sin\alpha \theta^2 \vec{e}_\rho = -l \omega^2 \sin\alpha \vec{e}_\rho \end{aligned}$$

et le PFD est

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = -ml\omega^2 \sin\alpha \vec{e}_\rho$$

qui est la même équation que dans le paragraphe précédent. Il suffit d'adopter la même démarche pour solutioner le problème.



Remarque

Dans ce cas particulier, l'usage direct de \mathcal{R} s'avère plutôt simple que celui de \mathcal{R}_1 . Toutefois, en présence de mouvement complexe, il est intéressant de décomposer le mouvement et de passer par un référentiel non galiléen.

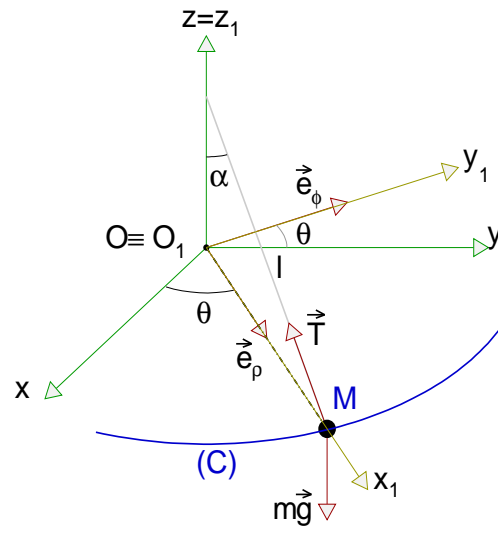


FIGURE 3.3 – Point matériel M en rotation uniforme autour de Oz .

Théorèmes généraux de la dynamique du point matériel

4.1 Introduction

Les théorèmes généraux que l'on va traiter dans ce chapitre permettent de tirer profit des propriétés des relations fondamentales de la dynamique en définissant de nouvelles grandeurs à même de résoudre de manière aisée une classe de problèmes de mécanique du point matériel.

4.2 Moments et théorème du moment cinétique

4.2.1 Moment d'une force par rapport à un point O

**Définition**

Le moment d'une force \vec{F} , appliquée en un point M , par rapport à un point O est défini par

$$\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}.$$

L'unité de $\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F})$ dans le système international est le mN . Noter que l'énergie s'exprime en mN ou en Joule mais les deux grandeurs ne sont pas de même nature : l'énergie est un scalaire alors que le moment d'une force est un vecteur.



Remarques

- Le vecteur $\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F})$ est perpendiculaire à \vec{F} et à \vec{OM} et son sens est tel que $(\vec{OM}, \vec{F}, \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}))$ forme un trièdre direct.
- $\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) = \vec{0}$ si \vec{OM} est parallèle avec \vec{F} ou si le support de \vec{F} passe par O ;
- $\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F})$ est maximal lorsque \vec{OM} et \vec{F} sont perpendiculaires ;
- $\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F})$ ne dépend pas de la position du point d'application de \vec{F} sur la droite support de \vec{F} ;
- Pour un point O' quelconque, nous avons $\vec{\mathcal{M}}_{o'}(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) + \vec{O'O} \wedge \vec{F}$.

4.2.2 Moment d'une force par rapport à un axe (Δ)



Définition

Le moment de \vec{F} par rapport à un axe Δ quelconque passant par O est le scalaire

$$\|\vec{\mathcal{M}}_\Delta(\vec{F})\| = \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) \cdot \vec{u} \quad \vec{u} \text{ un vecteur unitaire de l'axe } \Delta.$$

Comme il a été signalé auparavant, $\|\vec{\mathcal{M}}_\Delta(\vec{F})\|$ est indépendant de $O \in (\Delta)$. En effet, soit O' un point de l'axe (Δ),

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_{o'}(\vec{F}) &= \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) + \vec{O'O} \wedge \vec{F} \\ \implies \vec{\mathcal{M}}_{o'}(\vec{F}) \cdot \vec{u} &= \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) \cdot \vec{u} + (\vec{O'O} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} \\ \implies \vec{\mathcal{M}}_{o'}(\vec{F}) \cdot \vec{u} &= \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

car les vecteurs $\vec{O'O}$ et \vec{u} sont colinéaires.

4.2.3 Moment cinétique



Définition

Le moment cinétique d'une masse m de quantité de mouvement \vec{p} par rapport à \mathcal{R} , située au point M , par rapport à un point O est défini par

$$\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) = \vec{OM} \wedge \vec{p}.$$

L'unité du moment cinétique est le $kg\,m^2\,s^{-1}$.



Remarques

- Le point O peut être mobile dans \mathcal{R} ;
- $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$ dépend du référentiel dans lequel on exprime la vitesse de la masse ;
- Le trièdre $(\vec{OM}, \vec{p}, \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}))$ est direct.

4.2.4 Moment cinétique par rapport à un axe Δ

Si (Δ) est un axe passant par O et de vecteur unitaire \vec{u}_Δ , le moment cinétique par rapport à (Δ) est donné par

$$\|\vec{\sigma}_\Delta(M/\mathcal{R})\| = \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

4.3 Théorème du moment cinétique

A l'instar du principe fondamental de la dynamique qui relie la variation de la quantité de mouvement à la force appliquée, le théorème du moment cinétique établit un lien entre la variation du moment cinétique et le moment de la résultante des forces appliquées.

4.3.1 Cas d'un référentiel galiléen

Appliquons la dérivée par rapport au temps au moment cinétique

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \wedge \vec{p} + \vec{OM} \wedge \left. \frac{d\vec{p}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

comme $\vec{p} = m\vec{V}(M/\mathcal{R})$ alors

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{OM} \wedge \left. \frac{d\vec{p}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, $d\vec{p} = \vec{F}dt$, on obtient

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{OM} \wedge \vec{F}.$$



Théorème de du moment cinétique

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$ d'un point matériel M est égale au moment des forces extérieures $\vec{M}_o(\vec{F})$

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{M}_o(\vec{F}).$$



Remarques

- Notons que nous avons utilisé le principe fondamental de la dynamique, qui n'est valable que dans un référentiel galiléen. Aussi, le cas d'un référentiel non galiléen sera traité dans le paragraphe suivant.
- Si l'on considère le moment cinétique par rapport à un axe (Δ) passant par O , le théorème devient

$$\frac{d\|\vec{\sigma}_\Delta(M/\mathcal{R})\|}{dt} = (\vec{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta = \|\vec{\mathcal{M}}_\Delta(\vec{F})\|.$$

- Si le point matériel est isolé, $\vec{F} = \vec{0}$, alors

$$\frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt} = \vec{0} \implies \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) \text{ est un vecteur constant.}$$

- La vitesse du point M est définie par rapport au point O , aussi ce point doit être fixe. Le théorème reste valable par rapport à tout autre point fixe de \mathcal{R} .



Exercice

Déduire le théorème du moment cinétique appliqué à $\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R})$ où A est un point mobile animé de la vitesse $\vec{V}(A/\mathcal{R})$.



Solution

Etablissons la dérivée par rapport au temps du moment cinétique évalué par rapport à un point mobile A , sachant que $\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R}) = \vec{AM} \wedge \vec{p}(M/\mathcal{R})$

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{AM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \wedge \vec{p}(M/\mathcal{R}) + \vec{AM} \wedge \left. \frac{d\vec{p}(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

Si l'on fait interposer le point O , $\vec{AM} = \vec{AO} + \vec{OM}$ on obtient

$$\left. \frac{d\vec{AM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{AO}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{V}(M/\mathcal{R}) - \vec{V}(A/\mathcal{R})$$

ce qui donne

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) + \vec{p}(M/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(A/\mathcal{R})$$

4.3.2 Cas d'un référentiel non galiléen

Soit \mathcal{R}_1 un référentiel non galiléen. Appliquons le théorème du moment cinétique au point O_1 , origine de \mathcal{R}_1 :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\sigma}_{o_1}(M/\mathcal{R}_1)}{dt} &= \overrightarrow{O_1M} \wedge \frac{d\vec{p}(M/\mathcal{R}_1)}{dt} \\ &= \overrightarrow{O_1M} \wedge (\vec{F} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}) \\ &= \vec{\mathcal{M}}_{o_1}(\vec{F} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}) \end{aligned}$$

où nous avons appliqué dans cette dernière ligne le PFD dans un référentiel non galiléen.

4.3.3 Exemple d'application du théorème du moment cinétique

Comme exemple d'application du théorème du moment cinétique, nous allons établir l'équation du mouvement d'un pendule simple.

**Exemple**

Un pendule constitué d'une boule de masse m , que l'on peut considérer comme un point matériel M , est relié à un point fixe O par un fil de masse négligeable de longueur constante l , figure 4.1.

On met le pendule en mouvement en l'écartant de sa position verticale et en le lâchant sans vitesse initiale. On néglige tous les frottements.

Le mouvement de M est dans le plan vertical et à chaque instant t M est repéré par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM})$. Soit \vec{k} un vecteur orthogonal au plan du mouvement. Retrouvons l'équation du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique.

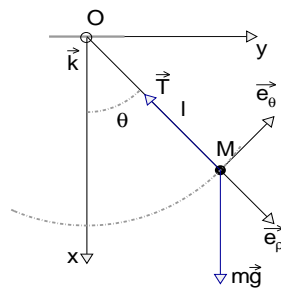


FIGURE 4.1 – Pendule simple.



Solution

Le référentiel \mathcal{R} est pris galiléen. On procède comme suit :

Etape 1 : on calcule le moment cinétique. Puisque le mouvement est plan, on utilise la base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ dont le vecteur rotation est $\dot{\theta}\vec{k}$. La position de M est repérée par $\vec{OM} = l\vec{e}_\rho$ et la vitesse du point M est alors

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/\mathcal{R}) &= l \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = l\dot{\theta}\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho \\ &= l\dot{\theta}\vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

Ce qui donne pour le moment cinétique

$$\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) = \vec{OM} \wedge \vec{p} = ml^2\dot{\theta}\vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\theta = ml^2\dot{\theta}\vec{k}.$$

et sa dérivée par rapport au temps dans \mathcal{R} est

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = ml^2\ddot{\theta}\vec{k}.$$

Etape 2 : Dénombrons les forces appliquées : le poids $m\vec{g} = mg(\cos\theta\vec{e}_\rho - \sin\theta\vec{e}_\theta)$ et la tension du fil $\vec{T} = -T\vec{e}_\rho$. Comme $\vec{T} // \vec{OM}$ son moment est nul. Il reste à calculer le moment du poids :

$$\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{p}) = mgl\vec{e}_\rho \wedge (\cos\theta\vec{e}_\rho - \sin\theta\vec{e}_\theta) = -mgl\sin\theta\vec{k}.$$

Etape 3 : Nous disposons de tous les ingrédients pour appliquer le théorème du moment cinétique :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) \\ ml^2\ddot{\theta}\vec{k} &= -mgl\sin\theta\vec{k} \implies \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \end{aligned}$$

En notant par $\omega_0^2 = \sqrt{g/l}$, la pulsation propre du pendule, l'équation du mouvement est

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

qui n'admet pas de solution analytique. En général, on utilise le domaine des petites oscillations, $\theta \rightarrow 0$ alors $\sin\theta \rightarrow \theta$ et l'équation devient $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ dont la solution générale est $\theta = \mathcal{R}e(Ae^{-i\omega_0 t} + Be^{i\omega_0 t})$ où A et B sont des nombres complexes déterminés à partir des conditions initiales sur θ et $\dot{\theta}$. Notons que la solution peut se mettre aussi sous la forme $\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$, où θ_0 et φ sont déterminées à partir des conditions initiales $\theta(t=0)$ et $\dot{\theta}(t=0)$.

4.4 Travail et Puissance d'une Force. Théorème de l'énergie cinétique

4.4.1 Travail d'une force



Définition

Le travail élémentaire ou différentiel δW d'une force \vec{F} appliquée à un point matériel M lors d'un déplacement $d\vec{M} = d\vec{l}$ est défini par

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R})dt$$

Mathématiquement, δW est appelé la circulation élémentaire de \vec{F} .

La notion de travail est subtil et non intuitive. En effet, maintenir un objet à bout de bras demande de l'effort et consomme des joules. Toutefois, le travail au sens mécanique est nul étant donné qu'il n'y a pas de déplacement !

Le travail peut être positif, négatif ou nul. Le travail est dit moteur s'il est positif et résistant s'il est négatif. Il a la dimension d'une énergie et est exprimé en Joule.

Travail sur un parcours ou chemin suivi par M : Pour calculer le travail de la force \vec{F} le long d'un parcours (AB) de M , il suffit d'intégrer le travail élémentaire sur le chemin suivi :

$$\int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R})dt$$



Notons, comme on le verra dans ce chapitre, lorsque la force est conservative, c'est à dire dérive d'un potentiel, le travail sur un trajet de M ne dépend pas du chemin suivi.

Si $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ alors le travail total n'est que la somme des travaux développés par chacune des forces le long du chemin (C) :

$$W_{(C)}(\vec{F}/\mathcal{R}) = \sum_i W_{(C)}(\vec{F}_i/\mathcal{R}).$$

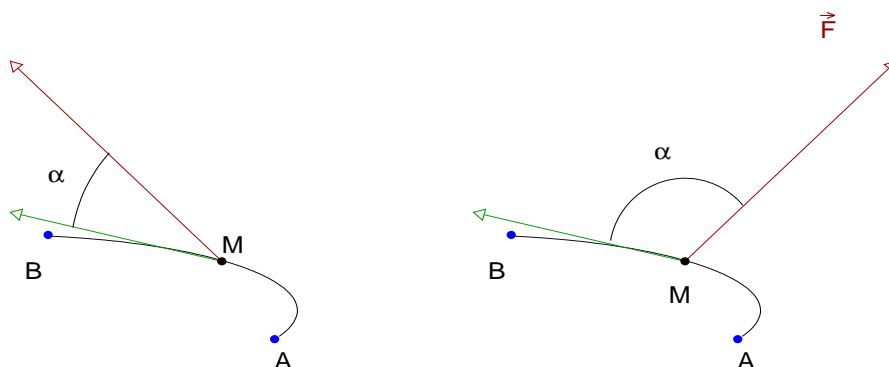


FIGURE 4.2 – Travail moteur : $0 < \alpha < \pi/2$, figure de gauche, et travail résistif : $\pi/2 < \alpha < \pi$, figure de droite

4.4.2 Quelques exemples

Nous allons présenter quelques exemples de calcul du travail pour les cas suivants : une force constante, une force élastique et finalement le cas d'une force magnétique.

Force constante Si la force est constante, c'est très rare que cela soit le cas, le travail est

$$\begin{aligned} W_A^B &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{l} \\ &= \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\vec{F}\| \|\overrightarrow{AB}\| \cos\alpha \end{aligned}$$

$$\alpha = \widehat{\vec{F}, \overrightarrow{AB}}.$$

Force de rappel : cas d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 : Si l est l'allongement du ressort à l'instant t , alors la force est $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}$, où \vec{u} est le vecteur unitaire de la direction de la force de rappel. La position de M est repérée par $\overrightarrow{OM} = l\vec{u}$ ce qui donne $d\vec{l} = dl\vec{u} + l d\vec{u}$. La figure 4.3 présente deux configurations où le ressort est étiré et comprimé. En posant $x = l - l_0 \implies dl = dx$, le travail est donné par

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F} \cdot d\vec{l} = -k(l - l_0) (dl + l\vec{u} \cdot d\vec{u}) \\ &= -kx dx \\ \implies W_A^B &= -\frac{1}{2}k (x_B^2 - x_A^2). \end{aligned}$$

nous avons utilisé la propriété que \vec{u} et $d\vec{u}$ sont perpendiculaires et donc $\vec{u} \cdot d\vec{u} = 0$. Notons que le travail ne dépend pas du chemin suivi.

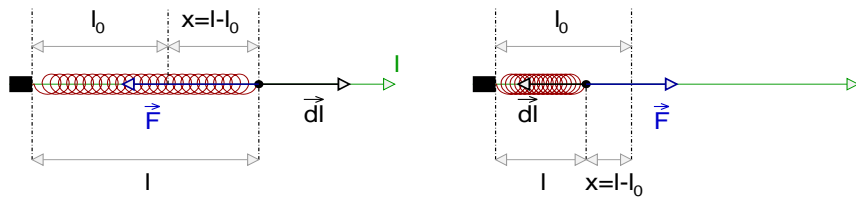


FIGURE 4.3 – Point matériel M soumis à une force de rappel. Le ressort est étiré, courbe de gauche, et comprimé, courbe de droite.

Cas de la force magnétique $\vec{F} = q\vec{V}(M/\mathcal{R}) \wedge \vec{B}$: Considérons un point matériel M de charge q et animé d'une vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ par rapport à \mathcal{R} dans une région où règne un champ magnétique \vec{B} . Le travail dans ce cas est donné par

$$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{dl} = q \left(\vec{V}(M/\mathcal{R}) \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{dl} = q \left(\vec{dl} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}) \right) \cdot \vec{B} = 0$$

puisque $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et \vec{dl} sont colinéaires.



On conclut que la force magnétique ne travaille pas et comme on le verra par la suite n'a pas d'effet sur l'énergie.

4.4.3 Puissance



Définition

La puissance instantanée d'une force \vec{F} dans \mathcal{R} est définie à partir du travail comme suit

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{dl}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R})$$

L'unité de la puissance est le Watt (W). Une ancienne unité de la puissance utilisée pour les automobiles est le cheval (ch) ($1ch = 736W$).

4.4.4 Energie cinétique

La notion de l'énergie cinétique combine la définition du travail et le principe fondamental de la dynamique. En effet

$$\begin{aligned}\delta W &= \vec{F} \cdot \vec{dl} = m \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt} \cdot \vec{dl} = m d\vec{V}(M/\mathcal{R}) \frac{d\vec{l}}{dt} \\ &= m d\vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}) = d\left(\frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R})\right).\end{aligned}$$

Ainsi la quantité $\frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R})$ a la dimension d'une énergie.



Définition

On appelle par énergie cinétique $E_c(M/\mathcal{R})$ dans \mathcal{R} d'un point matériel de masse m et animé d'une vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ la quantité

$$E_c(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R})$$

4.4.5 Théorème de l'énergie cinétique

Nous avons démontré dans le paragraphe précédent que $\delta W = dE_c$ et en intégrant

$$\int_A^B \delta W = \int_A^B dE_c \implies W_A^B = E_{c_B}(M/\mathcal{R}) - E_{c_A}(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}mV_B^2(M/\mathcal{R}) - \frac{1}{2}mV_A^2(M/\mathcal{R}).$$



Théorème de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants t_1 et t_2 est égale au travail entre ces deux instants des forces appliquées

$$W_A^B = \frac{1}{2}mV_B^2(M/\mathcal{R}) - \frac{1}{2}mV_A^2(M/\mathcal{R})$$

Notons que le théorème de l'énergie cinétique utilise le PFD, ainsi il doit être utilisé dans un référentiel galiléen. Si le référentiel n'est pas galiléen, il faut ajouter le travail des forces d'inertie à celui des forces extérieures

$$W_A^B(\vec{F}) + W_A^B(\vec{f}_{ie}) = \frac{1}{2}mV_B^2(M/\mathcal{R}) - \frac{1}{2}mV_A^2(M/\mathcal{R})$$

sachant que le travail de la force de Coriolis est nul. En effet, comme \vec{dl} est exprimé dans le référentiel non galiléen, c'est à dire $\vec{dl} // \vec{V}_r$, ce qui donne

$$\vec{f}_{ic} \cdot \vec{dl} = 2(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r) \cdot \vec{dl} = 2(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r) \cdot \vec{V}_r dt = 0.$$



Seule la force d'inertie d'entraînement travaille.

Notons aussi, que la masse a été considérée constante dans la démonstration et donc ce théorème n'est pas utilisable dans le cas relativiste.

4.4.6 Forces conservatives

Commençons par des exemples pour faciliter l'appréhension de cette notion.

Travail d'une force de rappel Nous avons établi auparavant que le travail d'une force de rappel de constante de raideur k est donné par

$$\delta W = d\left(-\frac{1}{2}kx^2\right) \quad \text{et} \quad W_A^B = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2).$$

On voit donc que le travail élémentaire est une différentielle totale et donc le travail total ne dépend pas du parcours suivi et ne dépend que de l'allongement final x_B et de l'allongement initial x_A .



La force de rappel d'un ressort est une force conservative.

Travail fourni par les forces de pesanteur : Un point matériel M , de masse m , est soumis au champ de pesanteur d'une masse m_0 située à l'origine d'un référentiel \mathcal{R} . On utilise les coordonnées sphériques, ainsi le déplacement élémentaire de M est

$$\vec{dl} = d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\vec{e}_r$$

sachant que $\vec{e}_r \cdot d\vec{e}_r = 0$.

Ce qui donne pour le travail des forces de pesanteur

$$\begin{aligned} \delta W &= -K_G \frac{m_0 m_1}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} \\ &= -K_G \frac{m_0 m_1}{r^2} (\vec{e}_r \cdot [dr\vec{e}_r + r d\vec{e}_r]) \\ &= -K_G \frac{m_0 m_1}{r^2} dr = d\left(K_G \frac{m_0 m_1}{r}\right) \implies W_A^B = K_G m_0 m_1 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \end{aligned}$$

et à l'instar du cas précédent, on voit que le travail élémentaire est une différentielle totale ainsi le travail total ne dépend pas du parcours suivi. Il ne dépend que de la position finale r_B et de la position initiale r_A .



Les forces de pesanteur sont des forces conservatives.



Définition

Des forces sont dites conservatives si le travail élémentaire fourni par ces forces est une différentielle totale. Le travail total fourni par ces forces lors d'un parcours ne dépend pas du chemin suivi.

4.4.7 Forces non conservatives : forces dissipatives



Définition

Des forces sont dites non conservatives lorsque le travail fourni par ces forces lors d'un parcours dépend du chemin suivi.

Donnons quelques exemples pour mieux cerner cette notion.

Force de frottement visqueux : $\vec{F} = -k\vec{V}(M/\mathcal{R})$ Calculons le travail fourni par ces forces :

$$\delta W = -k\vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{dl} = -k\vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \frac{\vec{dl}}{dt} dt = -kV^2(M/\mathcal{R})dt$$

on voit qu'à partir de cette expression si l'on effectue deux parcours différents entre deux points A et B avec la même vitesse, le travail sera différent puisque l'intervalle de temps pour les deux parcours sera différent. D'où le travail dépend du chemin suivi.

Notons que le travail de ces forces est toujours négatif car dt et k sont toujours positifs.



Pour démontrer qu'une force est non conservative, il suffit de trouver un exemple où le travail de la force dépend du chemin suivi.

Force de frottement solide : $\vec{F} = -R_T\vec{u}$

\vec{u} est le vecteur unitaire de la direction du mouvement et $R_T > 0$. Calculons le travail fourni par cette force

$$\delta W = -R_T\vec{u} \cdot \vec{dl} = -R_T\vec{u} \cdot (dl\vec{u} + ld\vec{u}) = -R_Tdl$$

Bien qu'en général, R_T est constant, δW n'est pas une différentielle totale car si dl est négatif \vec{F} doit changer de signe car cette force est toujours dans le sens opposé du mouvement et donc dans ce cas $\vec{F} = R_T\vec{u}$, ce qui contredit l'hypothèse du départ.

**Remarques**

Le travail est toujours négatif, l'énergie est perdue ou dissipée par le système. C'est pour cela que ces forces sont dites dissipatives.

4.4.8 Forces conservatives et énergie potentielle

On sait que le travail élémentaire fourni par une force conservative est une différentielle totale. Notons la grandeur dont elle dérive par $-U$, on verra l'importance du signe “-” après, alors

$$\delta W = -dU.$$

On note que la grandeur U a la dimension d'une énergie et donc exprimée en Joule.

Reprenons l'expression du travail élémentaire et exprimons le dans la base cartésienne

$$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{dl} = -dU \implies F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy - \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

comme les variables x, y et z sont indépendantes, on peut identifier les deux membres de l'équation terme à terme. Aussi la force peut s'écrire comme suit

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$$

et on reconnaît l'expression de l'opérateur gradient dans la base cartésienne

$$\vec{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

**Définition**

Une force \vec{F} est dite conservative s'il existe une grandeur scalaire U telle que \vec{F} peut se mettre sous la forme

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}}(U)$$

La grandeur U est dite le potentiel associée à \vec{F} ou bien l'énergie potentielle du point M dans le champ du vecteur force \vec{F} . U est notée parfois aussi E_p et les deux notations seront utilisées sans faire de distinction entre elles.

Ainsi, l'expression du travail peut se mettre sous la forme

$$\delta W(\vec{F}) = -dE_p(M/R)$$

avec $E_p = E_p(x, y, z, t)$. Dans la suite, on s'intéressera seulement aux potentiels qui ne dépendent pas explicitement du temps.

Exemple du poids $\vec{P} = m\vec{g}$: Considérons un repère cartésien où l'axe Oz oriente la verticale de bas en haut. Ainsi $\vec{P} = -mg\vec{k}$ et $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, d'où

$$-dE_p = \vec{P} \cdot d\vec{l} = -mgdz \implies E_p = mgz + \text{Constante}$$

Le potentiel associé à \vec{P} est déterminé à une constante près que l'on peut fixer en prenant une énergie potentielle de référence.



Expression des potentiels des forces conservatives traitées :

Force de rappel	→	$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \text{Constante}$
Force gravitationnelle	→	$E_p(r) = -K_G \frac{m_0 m_1}{r} + \text{Constante}$
Poids	→	$E_p(z) = mgz + \text{Constante}$

les constantes peuvent être fixées en prenant une énergie potentielle de référence. Par exemple pour la force de rappel, on peut prendre cette énergie nulle lorsque le ressort est au repos. Pour la force de gravitation, on peut prendre l'énergie potentielle nulle quand $r \rightarrow +\infty$.

4.4.9 Expression du travail dans le cas général

En général, parmi les forces auxquelles le point matériel est soumis on peut dénombrer des forces conservatives \vec{F}_c^i et des forces non conservatives \vec{F}_{nc}^j . Le travail fourni par les forces conservatives peut être déduit des énergies potentielles de ces forces. Le travail total est la somme des travaux fournis par les forces conservatives et par les forces non conservatives

$$\begin{aligned} W_A^B &= \sum_i W_A^B(F_c^i) + \sum_j W_A^B(F_{nc}^j) \\ &= \sum_i (E_{p_i}^B - E_{p_i}^A) + \sum_j W_A^B(F_{nc}^j) \end{aligned}$$



Le travail engendré entre deux points A et B en présence des forces conservatives et non conservatives est donné par

$$W_A^B = \sum_i (E_{p_i}^B - E_{p_i}^A) + \sum_j W_A^B(F_{nc}^j)$$

4.4.10 Energie mécanique

Nous avons établi dans le cadre du théorème de l'énergie cinétique que $W_A^B = E_c^B - E_c^A$, sachant que le travail est celui des forces conservatives et des forces non conservatives

$$\begin{aligned} W_A^B &= W_A^B(F_c) + W_A^B(F_{nc}) \\ &= (E_p^B - E_p^A) + W_A^B(F_{nc}) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$E_c^B - E_c^A = -(E_p^B - E_p^A) + W_A^B(F_{nc}) \implies (E_c^B + E_p^B) - (E_c^A + E_p^A) = W_A^B(F_{nc})$$

ce qui fait ressortir la grandeur $E_c + E_p$ que l'on définit par l'énergie mécanique.



Définition

On appelle par l'énergie mécanique E_m d'un point matériel M par rapport à \mathcal{R} la somme de son énergie cinétique E_c et de son énergie potentielle E_p

$$E_m(M/\mathcal{R}) = E_c(M/\mathcal{R}) + E_p(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(M/\mathcal{R}) + E_p(M/\mathcal{R})$$

Le signe moins qui a été introduit dans la définition de l'énergie potentielle permet de définir l'énergie mécanique par une addition. L'énergie cinétique et l'énergie potentielle s'additionnent et leur somme représente l'énergie *disponible*.

4.4.11 Théorème de l'énergie mécanique

En tenant compte des résultats établis jusqu'à maintenant, nous pouvons énoncer le théorème suivant.



Théorème de l'énergie mécanique

La variation de l'énergie mécanique d'un système matériel entre deux points A et B de la trajectoire est égal au travail des forces non conservatives, qui s'exercent sur ce système, sur le parcours entre ces deux points

$$E_m^B - E_m^A = W_A^B(F_{nc})$$

ou sous sa forme différentielle

$$dE_m = dE_c + dE_p = \delta W(F_{nc}).$$

Nous avons vu que le travail des forces non conservatives est toujours négatif. Aussi, en présence de forces dissipatives, l'énergie mécanique ne peut que décroître $E_m^B < E_m^A$.

4.4.12 Cas de forces conservatives : Conservation de l'énergie mécanique

Lorsque toutes les forces auxquelles le point matériel est soumis dérivent d'un potentiel, alors

$$dE_m = 0 \implies E_m = \text{Constante}$$



L'énergie mécanique d'un point matériel soumis à des forces conservatives est constante.

On dit que l'énergie mécanique est une intégrale première. C'est une constante du mouvement.



Remarques

- $E_m = E_c + E_p$, au cours du mouvement, l'énergie mécanique reste constante. Par contre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle varient et leurs variations se compensent de manière à ce que leur somme soit toujours égale à E_m .
- $E_m = \frac{1}{2}mV^2 + E_p$. Etant donnée que l'énergie cinétique est toujours positive, l'énergie potentielle est toujours inférieure à l'énergie mécanique $E_m \geq E_p$. Cette condition est toujours vérifiée et impose une contrainte sur les états possibles du point matériel, comme on va le voir dans l'exemple suivant.



Exercice : Masse m soumise à une force de rappel par un ressort

Considérons une masse m soumise à une force de rappel par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 . On définit $x = l - l_0$. A l'instant $t = 0$, la masse m est écartée de $x(t = 0) = x_0$ et lâchée sans vitesse initiale $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0 = 0$. Par raison de simplicité, considérons un système à une dimension.

Représenter l'énergie potentielle E_p et l'énergie mécanique E_m en fonction de x dans le même graphique et déduire que le mouvement est un mouvement d'oscillations.

**Solution**

Comme on l'avait déjà montré, la force de rappel est conservative. L'énergie mécanique est conservée.

Alors $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ en prenant $E_p(l = l_0) = E_p(x = 0) = 0$. $E_p = E_p(x)$ est donc une parabole de sommet O , voir figure ci-contre.

L'énergie mécanique est

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

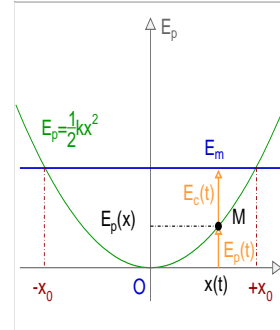
Comme elle est constante, on peut déterminer sa valeur à l'instant initial

$$E_m = E_m(t = 0) = \frac{1}{2}m\dot{x}_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}kx_0^2.$$

La représentation graphique de l'énergie mécanique est une droite d'équation $E_m = \frac{1}{2}kx_0^2$. Sachant que

$$E_p \leq E_m \implies \frac{1}{2}kx^2 \leq \frac{1}{2}kx_0^2 \implies |x| \leq x_0$$

ce qui montre que le mouvement a lieu dans l'intervalle $[-x_0, +x_0]$ et donc un mouvement d'oscillations.



4.4.13 Equilibre d'un point et conditions de stabilité

Pour raison de simplification de notation, nous considérons un système dont l'état ne dépend que d'une seule variable x et que la résultante des forces est selon l'axe Ox . Les résultats restent valables pour un cas général.

**Définition**

Nous avons vu précédemment qu'un point matériel est en équilibre dans un référentiel \mathcal{R} en un point M_0 si le point matériel est abandonné dans ce point et il y reste. La résultante des forces appliquées au point matériel dans \mathcal{R} est nulle.

Nous allons distinguer dans la suite de ce paragraphe les différents types d'équilibres.

Equilibre stable

**Définition**

Un équilibre est dit stable si le point matériel y reste lorsque sa vitesse est nulle et il y retourne spontanément s'il est écarté légèrement de cet état.

Conditions sur la force :

$$\begin{cases} F = 0 \\ \frac{dF}{dx} < 0 \end{cases}$$

Ainsi si l'écart est positif, $dx > 0$, la force est alors négative, c'est à dire dirigée dans le sens décroissant des x , et le point matériel est rappelé vers la position d'équilibre. Il est de même si $dx < 0$, la force est positive et le point matériel est rappelé vers la position d'équilibre.

Conditions sur l'énergie potentielle : Si la force dérive d'un potentiel $E_p(x)$ alors les conditions d'équilibre stable sont

$$\begin{cases} F = 0 \implies \frac{dE_p(x)}{dx} = 0 \\ \frac{dF}{dx} < 0 \implies \frac{d^2E_p(x)}{dx^2} > 0 \end{cases}$$

et le raisonnement pour illustrer la stabilité de l'équilibre est le même que celui utilisé pour la force.

Equilibre instable



Définition

Un équilibre est dit instable si le point matériel s'éloigne de cet état lorsqu'il y est écarté légèrement.

Conditions sur la force :

$$\begin{cases} F = 0 \\ \frac{dF}{dx} > 0 \end{cases}$$

Ainsi si l'écart est positif, $dx > 0$, la force est alors positive et le point matériel sera éloigné de la position d'équilibre. Il est de même si $dx < 0$, la force est négative et le point matériel est toujours éloigné de sa position d'équilibre.

Conditions sur l'énergie potentielle Si la force dérive d'un potentiel $E_p(x)$ alors les conditions de l'équilibre instable sont

$$\begin{cases} F = 0 \implies \frac{dE_p(x)}{dx} = 0 \\ \frac{dF}{dx} > 0 \implies \frac{d^2E_p(x)}{dx^2} < 0 \end{cases}$$

et le raisonnement pour illustrer l'instabilité de l'équilibre est le même que celui utilisé pour la force.

Equilibre métastable

**Définition**

Un équilibre est dit metastable si l'état est un état d'équilibre mais il existe un autre état d'équilibre stable d'énergie potentielle inférieure.

La figure ci-dessous illustre les différents états d'équilibre.

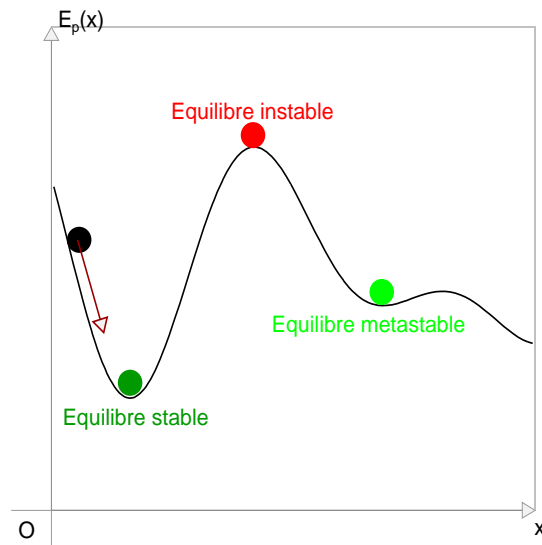


FIGURE 4.4 – Exemples de positions d'équilibre : stable, instable et metastable.

Système de deux points matériels

5.1 Introduction

Nous avons étudié jusqu'à présent la dynamique des systèmes formés par un seul point matériel. Ce chapitre sera consacré à l'étude des chocs, que l'on appelle aussi des collisions, entre deux particules qui seront considérées comme des point matériels. Tout au long de ce chapitre, nous considérerons que les deux particules forment un système isolé et qu'elles ne sont soumises qu'aux forces internes qu'elles subissent mutuellement.

On distingue lors d'un choc trois phases. Dans la première phase, avant le choc, la distance qui sépare les deux particules est grande et les interactions mutuelles sont négligeables. Cette phase est appelée aussi l'état initial. Selon le principe d'inertie, les deux particules sont animées d'un mouvement rectiligne uniforme et leurs vitesses sont donc constantes. La deuxième phase correspond à l'état où les forces internes ne sont plus négligeables et les deux particules interagissent mutuellement entre elles. Cette phase se déroule pendant un laps de temps très court. Lors de la troisième phase, les deux particules s'éloignent et les forces internes sont de nouveau négligeables. Cette phase s'appelle l'état final. Les vitesses des particules sont constantes et différentes de celles de l'état initial car elles ont été modifiées lors de la seconde phase.

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'état initial et à l'état final. Nous faisons abstraction de l'étude de la seconde phase qui ne relève pas de ce cours. L'objectif est d'utiliser les résultats des chapitres précédents pour calculer les vitesses des deux particules à l'état final à partir de celles de l'état initial, sachant que ces dernières sont connues.



Définition

Lors d'un choc, les points matériels ont un mouvement rectiligne uniforme à l'état initial et à l'état final. Leurs vitesses sont constantes.

5.2 Loi de conservation de la quantité de mouvement

Soit \mathcal{R} un référentiel galiléen. Nous étudierons le choc dans ce référentiel, sauf mention contraire. Considérons deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 et de vitesses par rapport à \mathcal{R} à l'état initial respectivement \vec{V}_1 et \vec{V}_2 . Les vitesses de M_1 et de M_2 dans \mathcal{R} à l'état final, après le choc, sont respectivement \vec{V}'_1 et \vec{V}'_2 , voir figure 5.1. Notons bien que les vitesses initiales appartiennent au plan P alors que les vitesses finales appartiennent au plan P' qui est en général différent de P . L'angle Φ entre les deux plans dépend des interactions internes entre les deux point matériels.

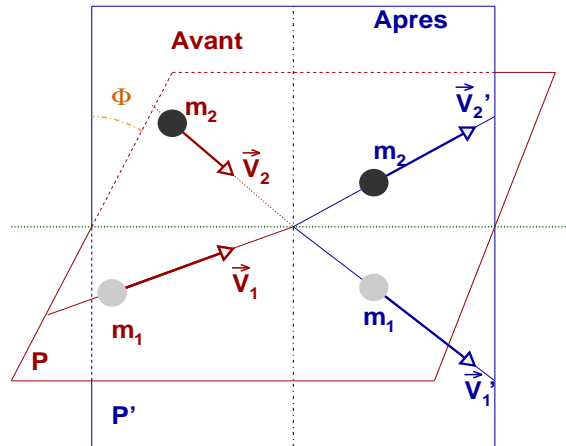


FIGURE 5.1 – Choc entre deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 ayant respectivement les vitesses initiales \vec{V}_1 et \vec{V}_2 .

Soient $\vec{P}_1 = m_1\vec{V}_1$, $\vec{P}_2 = m_2\vec{V}_2$, $\vec{P}'_1 = m_1\vec{V}'_1$ et $\vec{P}'_2 = m_2\vec{V}'_2$ les quantités de mouvement respectivement à l'état initial et à l'état final de M_1 et de M_2 .

Comme nous l'avons vu précédemment, les deux points matériels forment un système isolé. Aussi, l'application du principe fondamental de la dynamique dans \mathcal{R} à un système formé par deux points matériels donne

$$\sum_{i=1}^2 \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \vec{0} \implies \sum_{i=1}^2 \vec{P}_i = \overrightarrow{Cste}.$$



La quantité de mouvement totale du système formé par les deux points matériels M_1 et M_2 est conservée au cours du choc. On en conclut qu'elle a la même valeur avant et après le choc

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2$$

Rappelons que l'objectif est de déterminer les vitesses de l'état final, ce qui en fait six inconnues, chacune des vitesses a trois composantes. Or la conservation de la quantité de mouvement n'en fournit que trois équations. Aussi, nous allons nous placer dans des conditions particulières pour pouvoir résoudre ce problème et fixer les trois équations qui manquent.

5.3 Etude du choc dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R}

Le référentiel du laboratoire, comme il a été mentionné auparavant, peut être considéré comme un référentiel galiléen. Comme le système formé par les deux points matériels est isolé, l'énergie mécanique de l'état initial et celle de l'état final sont réduites respectivement aux énergies cinétiques dans les deux états. En effet, l'absence des forces extérieures implique l'absence de l'énergie potentielle dans ces deux états. Notons par E_{c1} et E_{c2} les énergies cinétiques à l'état initial respectivement de M_1 et de M_2 et E'_{c1} et E'_{c2} à l'état final. Soient E_m et E'_m les énergies mécaniques de l'état initial et de l'état final. Alors

$$E_m = E_{c1} + E_{c2} \text{ et } E'_m = E'_{c1} + E'_{c2}.$$

Commençons par analyser l'énergie mécanique lors de l'interaction entre les deux points matériels. On distingue deux cas de figures selon que les forces internes soient conservatives ou non. Dans le premier cas, l'énergie mécanique pendant l'interaction est conservée. Comme elle l'est aussi à l'état initial et à l'état final, alors on peut conclure que l'énergie mécanique se conserve et déduire que

$$E_m = Cte \implies E_m = E'_m \text{ et donc } E_{c1} + E_{c2} = E'_{c1} + E'_{c2}.$$



Lorsque les forces internes sont conservatives, l'énergie cinétique est conservée.

Dans le deuxième cas où les forces internes ne sont pas conservatives, il y a une dissipation de l'énergie lors de l'interaction entre les deux points matériels et l'on déduit que l'énergie cinétique dans ce cas n'est pas conservée.

5.3.1 Choc élastique

Nous allons traiter dans ce paragraphe le cas d'un choc élastique. On définit d'abord ce qu'est un choc élastique avant d'entamer la détermination des vitesses à l'état final dans quelques cas particuliers.



Définition

Un choc est dit élastique si l'énergie cinétique est conservée au cours du choc.

Relations entre les vitesses

A partir de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement et de celle de l'énergie cinétique, nous avons

$$\begin{cases} m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = m_1 \vec{V}'_1 + m_2 \vec{V}'_2 \\ \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2'^2 \end{cases}$$

Notons qu'il nous est impossible d'établir les vitesses dans l'état final car nous avons six inconnues et quatre équations. Aussi, nous considérons quelques cas particuliers.

M_1 et M_2 identiques et M_2 au repos dans \mathcal{R}

Si les deux points matériels sont identiques et M_2 est immobile dans \mathcal{R} , alors les équations précédentes deviennent en prenant $m_1 = m_2$ et $V_2 = 0$

$$\begin{cases} \vec{V}_1 = \vec{V}'_1 + \vec{V}'_2 \\ V_1^2 = V_1'^2 + V_2'^2. \end{cases}$$

Ce que l'on peut déduire des équations précédentes est que \vec{V}_1 , \vec{V}'_1 et \vec{V}'_2 forment un triangle rectangle, étant donnée que la deuxième équation n'est d'autre que la relation de pythagore, et que \vec{V}'_1 et \vec{V}'_2 sont perpendiculaires. Pour résoudre le système d'équations précédent, il nous faut une donnée supplémentaire et calculer les solutions en fonction de celle-ci.

Si l'on donne l'angle θ_1 que fait M_1 après le choc, les vitesses s'expriment comme suit

$$\begin{aligned} \vec{V}'_1 &= \cos\theta_1 \vec{V}_1 \\ \vec{V}'_2 &= \sin\theta_1 \vec{V}_1. \end{aligned}$$

Choc direct



Définition

Un choc direct est un choc dans lequel les vitesses de l'état initial et de l'état final sont colinéaires.

La figure 5.2 montre l'exemple d'un choc direct.

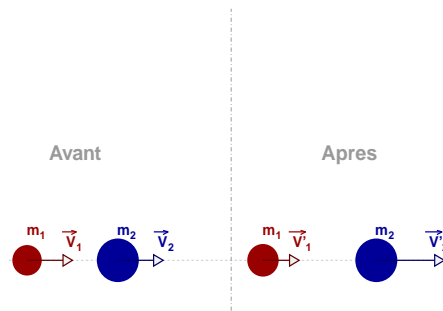


FIGURE 5.2 – Choc direct entre deux points matériels M_1 et M_2 .

Le système d'équations devient dans ce cas en projetant les vitesses

$$\begin{cases} m_1 (V_1 - V'_1) = -m_2 (V_2 - V'_2) \\ m_1 (V_1 - V'_1) (V_1 + V'_1) = -m_2 (V_2 - V'_2) (V_2 + V'_2) \end{cases} \implies V_1 + V'_1 = V_2 + V'_2$$

nous avons supposé que $V_1 - V'_1 \neq 0$ et $V_2 - V'_2 \neq 0$, qui est justifiée car dans le cas contraire cela veut dire qu'il n'y a pas de choc. En substituant V'_2 dans la première équation, nous obtenons

$$\begin{aligned} m_1 (V_1 - V'_1) &= -m_2 V_2 + m_2 (V_1 + V'_1 - V_2) \\ \implies V'_1 &= \frac{2m_2 V_2 + (m_1 - m_2) V_1}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

et l'on déduit aussi que

$$V'_2 = \frac{2m_1 V_1 + (m_2 - m_1) V_2}{m_1 + m_2}.$$



Dans le cas d'un choc direct, les vitesses dans l'état final sont égales à

$$\begin{aligned} V'_1 &= \frac{2m_2 V_2 + (m_1 - m_2) V_1}{m_1 + m_2} \\ V'_2 &= \frac{2m_1 V_1 + (m_2 - m_1) V_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$



Remarques

- Si $m_1 = m_2$ alors $V'_1 = V_1$ et $V'_2 = V_2$. Les points matériels gardent les mêmes vitesses après le choc.
- Si $V_2 = 0$, M_2 est au repos dans l'état initial, alors

$$V'_1 = \frac{(m_1 - m_2) V_1}{m_1 + m_2}$$

$$V'_2 = \frac{2m_1 V_1}{m_1 + m_2}.$$

- Si $m_1 \ll m_2$, alors

$$V'_1 \simeq \frac{2m_2 V_2 + -m_2 V_1}{m_2} = 2V_2 - V_1$$

$$V'_2 \simeq V_2.$$

Dans le cas contraire, $m_1 \gg m_2$, nous obtenons

$$V'_1 \simeq V_1$$

$$V'_2 \simeq 2V_1 - V_2.$$



Notons que dans ce paragraphe, les vitesses sont prises en valeurs algébriques. Dans le cas d'un choc frontal, il suffit de substituer V_2 par $-V_2$.

M_2 immobile Considérons le cas où M_2 est immobile dans \mathcal{R} , $\vec{V}_2 = \vec{0}$, voir figure 5.3. Le choc a lieu dans ce cas dans le même plan. En projetant les vitesses et en utilisant la conservation de l'énergie cinétique, nous obtenons le système d'équations suivant

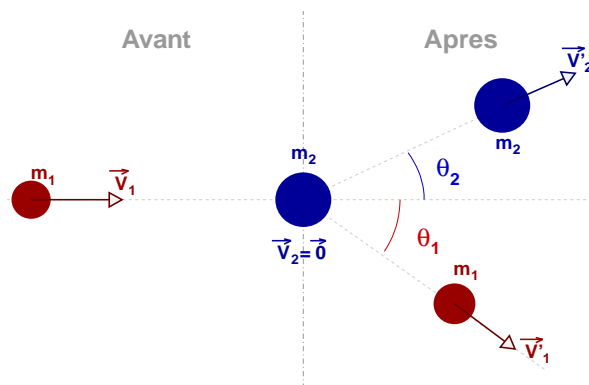


FIGURE 5.3 – Choc entre deux points matériels M_1 et M_2 où M_2 est immobile dans \mathcal{R} .

$$\left. \begin{aligned} m_1 V_1 &= m_1 V'_1 \cos \theta_1 + m_2 V'_2 \cos \theta_2 \\ m_1 V'_1 \sin \theta_1 &= m_2 V'_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \right\} \implies m_1^2 V_1^2 - 2m_1^2 V_1 V'_1 \cos \theta_1 + m_1^2 V_1'^2 = m_2^2 V_2'^2$$

$$\frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2'^2.$$

En substituant $V_2'^2 = (m_1/m_2) (V_1^2 - V_1'^2)$, on obtient

$$\begin{aligned} m_1^2 V_1^2 - 2m_1^2 V_1 V'_1 \cos \theta_1 + m_1^2 V_1'^2 &= m_1 m_2 (V_1^2 - V_1'^2) \\ \implies V_1'^2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) - 2V_1 V'_1 \cos \theta_1 + \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) V_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

qui est une équation de second ordre en V'_1 . Notons que la solution sera donnée en fonction de θ_1 . Nous allons la résoudre dans le cas particulier où $m_1 = m_2$.

M_1 et M_2 sont identiques L'équation précédente se réduit à

$$2V_1'^2 - 2V_1 V'_1 \cos \theta_1 = 0 \implies V'_1 (V'_1 - V_1 \cos \theta_1) = 0$$

ce qui donne comme solutions

$$\begin{cases} V'_1 = 0 & \text{et } V'_2 = V_1; & M_1 \text{ a transféré toute son énergie cinétique à } M_2; \\ V'_1 = \cos \theta_1 V_1 & \text{et } V'_2 = \sin \theta_1 V_1; & \text{on retrouve le résultat précédemment établi.} \end{cases}$$

5.3.2 Choc inélastique



Définition

On dit qu'un choc est inélastique lorsqu'il y a dissipation de l'énergie au cours de la phase d'interaction.

Notons que la quantité de mouvement reste en revanche conservée. Une partie de l'énergie cinétique initiale est dissipée. Cette dissipation de l'énergie peut prendre plusieurs formes : chaleur, déformation des "objets" constituant les points matériels... Nous allons nous intéresser dans le paragraphe suivant à un cas spécifique.

Choc totalement inélastique



Définition

Un choc est totalement inélastique lorsque les points matériels ont la même vitesse finale $\vec{V}'_1 = \vec{V}'_2 = \vec{V}'$.

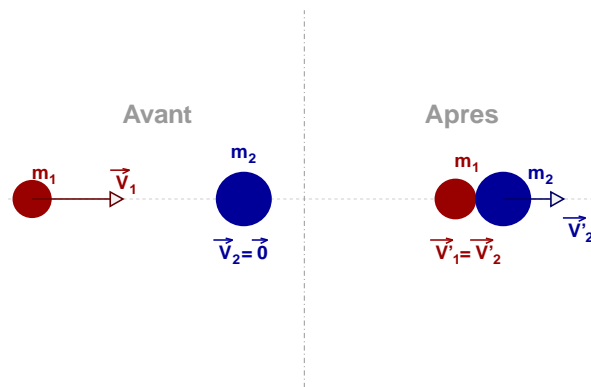


FIGURE 5.4 – Choc totalement inélastique ou mou entre deux points matériels M_1 et M_2 où M_2 est immobile dans \mathcal{R} .

Un choc totalement inélastique est appelé aussi un choc mou, voir figure 5.4. L'équation de la conservation de la quantité de mouvement dans ce cas devient

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = m_1 \vec{V}'_1 + m_2 \vec{V}'_2 = (m_1 + m_2) \vec{V}'$$

ce qui donne

$$\vec{V}' = \frac{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2}{m_1 + m_2}.$$

Remarques

Si le point matériel M_2 est au repos, alors la vitesse finale \vec{V}' devient

$$V' = \frac{m_1 V_1}{m_1 + m_2}.$$

et l'énergie cinétique finale est

$$E'_{c1} + E'_{c2} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V'^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} V_1^2 \neq \frac{1}{2} m_1 V_1^2$$

et l'on relève que la dissipation d'énergie est égale à

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= \frac{1}{2} m_1 V_1^2 - \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} V_1^2 = \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) E_c \\ &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_c. \end{aligned}$$

Notons que la dissipation d'énergie devient négligeable si $m_2 \gg m_1$.

5.4 Etude du choc dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}_G

5.4.1 Centre de masse



Définition

Le centre de masse G des points matériels M_1 et M_2 est défini par

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OM}_1 + m_2 \overrightarrow{OM}_2}{m_1 + m_2}$$

où \overrightarrow{OG} , \overrightarrow{OM}_1 et \overrightarrow{OM}_2 sont les vecteurs position respectivement de G , M_1 et M_2 .

La définition peut être étendue à un nombre quelconque de points matériels sans difficulté.

5.4.2 Référentiel du centre de masse \mathcal{R}_G

Considérons le référentiel $\mathcal{R}_G(G, GX, GY, GZ)$ d'origine G et dont les trois axes (GX) , (GY) et (GZ) sont constamment parallèles respectivement aux axes (OX) , (OY) et (OZ) du référentiel \mathcal{R} . Calculons la vitesse de G . Partant de la définition du centre de masse, nous obtenons

$$\begin{aligned} \vec{V}_G = \vec{V}(G/\mathcal{R}) &= \left. \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \frac{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

En dérivant par rapport au temps dans \mathcal{R} , on obtient

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_G = \left. \frac{d\vec{V}_G}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \left. \frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \frac{1}{m_1 + m_2} \frac{d}{dt} (\vec{P}_1 + \vec{P}_2) = \vec{0} \end{aligned}$$

ce qui montre bien que la vitesse de G est constante. Nous avons utilisé le fait que la quantité de mouvement du système est conservée.



Définition

Le référentiel du centre de masse \mathcal{R}_G d'un système de points matériels est un référentiel dont l'origine est formée par le centre de masse G et dont les trois axes restent constamment parallèles à ceux du référentiel du laboratoire \mathcal{R} .



Remarques

Comme \mathcal{R}_G est en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R} qui est supposé galiléen alors \mathcal{R}_G est un référentiel galiléen.

Lois de conservation dans \mathcal{R}_G

Soient $\vec{v}_i, \vec{v}'_i, i = 1, 2$, les vitesses des points matériels dans \mathcal{R}_G et ce respectivement à l'état initial et à l'état final, voir figure 5.5. Les vitesses initiales dans \mathcal{R}_G se déduisent de celles dans \mathcal{R} en utilisant la loi de composition des vitesses, sachant que la vitesse d'entraînement est \vec{V}_G ,

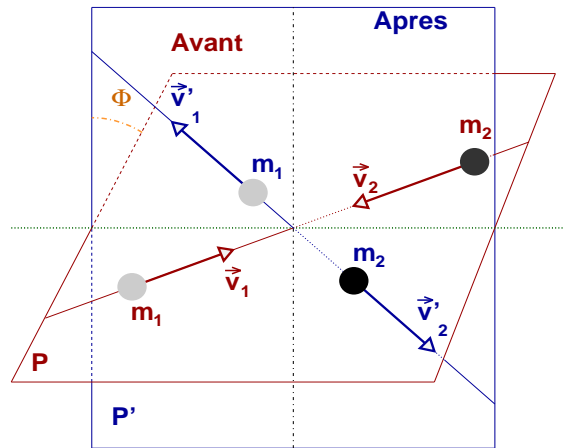


FIGURE 5.5 – Choc dans \mathcal{R}_G entre deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 ayant respectivement les vitesses initiales \vec{v}_1 et \vec{v}_2 .

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{V}_1 - \vec{V}_G \\ \vec{v}_2 &= \vec{V}_2 - \vec{V}_G. \end{aligned}$$

Loi de conservation des quantités de mouvement : L'application du principe fondamental de la dynamique au système de points matériels et ce dans \mathcal{R}_G donne

$$\sum_{i=1,2} \left. \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right|_{\mathcal{R}_G} = \vec{0} \implies \sum_{i=1,2} \vec{p}_i = \vec{Cte}$$

sachant que le système de points matériels est isolé. En appliquant la loi de composition des vitesses, nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{i=1,2} \vec{p}_i &= m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \\ &= m_1 (\vec{V}_1 - \vec{V}_G) + m_2 (\vec{V}_2 - \vec{V}_G) \\ &= m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 - (m_1 + m_2) \vec{V}_G\end{aligned}$$

et en utilisant l'expression de la définition de $\vec{V}_G = (m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2) / (m_1 + m_2)$, nous aboutissons à

$$\sum_{i=1,2} \vec{p}_i = \vec{0}.$$



La quantité de mouvement du système de points matériels est conservée et nulle dans \mathcal{R}_G

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{0} = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2.$$



Remarques

- A partir des relations précédentes, on déduit

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \quad \text{et} \quad \vec{p}'_1 = -\vec{p}'_2$$

ce qui implique que les points matériels se déplacent toujours dans des sens opposés aussi bien à l'état initial qu'à l'état final. Aussi l'on peut déduire que $(\widehat{v_1, v_2}) = \pi$ et $(\widehat{v'_1, v'_2}) = \pi$.

Energie cinétique dans \mathcal{R}_G : En substituant dans l'expression de l'énergie cinétique les vitesses dans \mathcal{R} en fonction de celles dans \mathcal{R}_G , on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_1 V_1^2 + \frac{1}{2}m_2 V_2^2 &= \frac{1}{2}m_1 (\vec{v}_1 + \vec{V}_G)^2 + \frac{1}{2}m_2 (\vec{v}_2 + \vec{V}_G)^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + m_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{V}_G + \frac{1}{2}m_1 \vec{V}_G^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + m_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{V}_G + \frac{1}{2}m_2 \vec{V}_G^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \vec{V}_G^2 + (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) \cdot \vec{V}_G\end{aligned}$$

or $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$, alors

$$\frac{1}{2}m_1 V_1^2 + \frac{1}{2}m_2 V_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \vec{V}_G^2.$$



L'énergie cinétique du système des deux points matériels dans \mathcal{R} est égale à l'énergie cinétique du système dans \mathcal{R}_G augmentée de la quantité $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_G^2$, qui correspond à l'énergie cinétique du centre de masse G doté de la masse $m_1 + m_2$.

Réexprimons l'énergie cinétique dans \mathcal{R}_G , en utilisant la propriété $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = -\vec{p}$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{p^2}{2m_1} + \frac{p^2}{2m_2} = \frac{p^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right).$$

On pose $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$, ce qui donne

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{p^2}{2\mu}.$$

On note ainsi que l'énergie cinétique du système des deux points matériels a la même expression que celle d'un point matériel de masse μ et de quantité de mouvement \vec{p} . μ est appelée la masse réduite du système.



Exercice

Réexprimer \vec{p} sous la forme $\vec{p} = \mu\vec{v}$ en déterminant l'expression de \vec{v} .



Solution

Partons de l'expression de l'énergie cinétique dans \mathcal{R}_G

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}(m_1\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2) \\ &= \frac{1}{2}(-\vec{p} \cdot \vec{v}_1 + \vec{p} \cdot \vec{v}_2) \\ &= \frac{1}{2}\vec{p} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \\ &= \frac{1}{2\mu}\vec{p} \cdot \vec{p} \implies \vec{p} = \mu(\vec{v}_2 - \vec{v}_1). \end{aligned}$$

On en déduit que $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$.



Remarques

- L'énergie cinétique d'un système de deux points matériels isolé dans \mathcal{R}_G est égale à l'énergie cinétique d'une particule fictive de masse μ et de vitesse $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}\mu v^2.$$

- L'expression de la vitesse de la particule fictive est

$$\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{V}_G + \vec{v}_2 - (\vec{V}_G + \vec{v}_1) = \vec{V}_2 - \vec{V}_1.$$

Choc élastique

Nous allons nous intéresser dans ce paragraphe au cas où M_2 est immobile dans \mathcal{R} c'est à dire $\vec{v}_2 = \vec{V}_2 - \vec{V}_G = -\vec{V}_G$, figure 5.6.

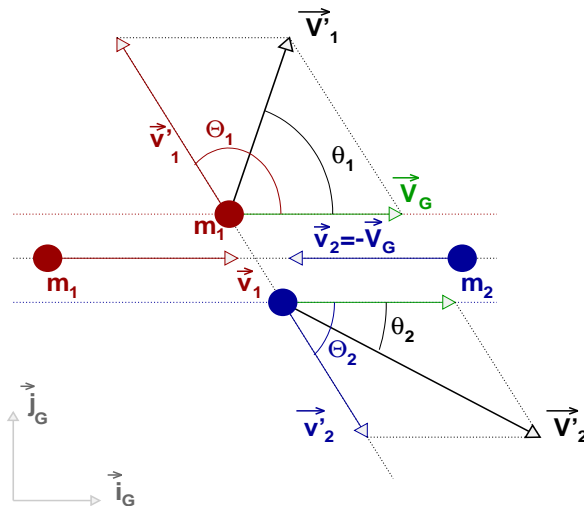


FIGURE 5.6 – Choc dans \mathcal{R}_G entre deux points matériels M_1 et M_2 . M_2 est au repos dans \mathcal{R} .

Les vitesses de l'état initial et de l'état final appartiennent au même plan. Nous orientons \mathcal{R}_G tel que le plan du choc soit le plan (GX, GY) , que l'on munit de la base cartésienne (\vec{i}_G, \vec{j}_G) . Nous partons des équations de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique dans \mathcal{R}_G et utilisons les résultats des paragraphes précédents

$$\begin{cases} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0} \\ \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{0} \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2. \end{cases}$$

Notons que nous avons quatre inconnues, chacune des vitesses $\vec{v}'_i, i = 1, 2$ a deux composantes, et trois équations. Nous exprimerons les solutions en fonction de Θ_1 .

Nous avons établi au paravant que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}\mu(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 \\ \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 &= \frac{1}{2}\mu(\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1)^2. \end{aligned}$$

ce qui nous permet de déduire que

$$\|\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1\| = \|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\| = \|\vec{V}_2 - \vec{V}_1\| = V_1 \implies \|\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1\| = V_1$$

or $\vec{v}'_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}'_2$ ce qui donne

$$\|\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1\| = v'_2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = v'_2 \frac{m_2}{\mu}$$

ce qui implique que

$$\begin{cases} v'_2 &= \frac{\mu}{m_2}V_1 = V_G = v_2 \\ v'_1 &= \frac{m_2}{m_1}v'_2 = \frac{m_2}{m_1}V_G. \end{cases}$$

Comme M_1 et M_2 se déplacent dans \mathcal{R}_G toujours dans des sens opposés, alors $\Theta_1 + \Theta_2 = \pi$, ce qui donne comme solutions en fonction Θ_1

$$\begin{cases} \vec{v}'_1 &= \frac{m_2}{m_1}V_G (\cos\Theta_1\vec{i}_G + \sin\Theta_1\vec{j}_G) \\ \vec{v}'_2 &= V_G (\cos\Theta_2\vec{i}_G + \sin\Theta_2\vec{j}_G) = V_G (-\cos\Theta_1\vec{i}_G + \sin\Theta_1\vec{j}_G) \end{cases}$$



Remarques

A partir des deux équations précédentes et des lois de compositions des vitesses pour passer de \mathcal{R}_G à \mathcal{R} , on peut déduire que

$$\begin{aligned} \vec{V}'_1 &= \vec{v}'_1 + \vec{V}_G = V_G \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\cos\Theta_1\right)\vec{i}_G + \frac{m_2}{m_1}V_G\sin\Theta_1\vec{j}_G \\ \vec{V}'_2 &= \vec{v}'_2 + \vec{V}_G = V_G(1 - \cos\Theta_1)\vec{i}_G + V_G\sin\Theta_1\vec{j}_G. \end{aligned}$$

Mouvement à force centrale

6.1 Introduction

Nous allons traiter dans ce chapitre le mouvement d'un point matériel soumis à un champ de force centrale. Comme on le verra par la suite, la force de gravitation fait partie de cette catégorie de forces et son étude ainsi que celle du mouvement qui en résulte ont fait l'objet d'investigations très exhaustives et ont donné lieu à un développement d'outils mathématiques extraordinaire facilitant la description des mouvements des planètes, astres, comètes, \dots . Cette catégorie de forces constitue un sujet de prédilection pour l'application du théorème du moment cinétique.

L'application aussi bien du PFD que des théorèmes généraux de la dynamique permettront de résoudre la trajectoire du mouvement. Nous énoncerons les lois de Kepler, qui, rappelons le, ont été publiées avant la construction du modèle mathématique qui décrit la gravitation. Ces lois ont été déduites à partir des observations expérimentales.

Les résultats de ce chapitre s'appliquent à tous les systèmes soumis à une force centrale.

6.2 Définition

**Définition**

Si le support de la force résultante appliquée à un point matériel passe constamment par un point fixe O , la force est dite centrale.

On peut choisir judicieusement le point O comme origine du référentiel galiléen $\mathcal{R}(O, xyz)$ dans lequel on étudie le mouvement, ce qui implique que le moment de la

force par rapport à ce point est nul. On adoptera ce référentiel pour le reste de ce chapitre, sauf indication contraire.

6.3 Champ Newtonien



Définition

Considérons un point matériel M tel que $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$. M est en mouvement dans un champ Newtonien si la force centrale appliquée s'écrit comme suit

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r.$$

- Si $k > 0$, la force \vec{F} est dirigée vers O , elle est attractive ;
- Si $k < 0$, la force \vec{F} est dirigée dans le même sens que \vec{e}_r , elle est répulsive ;

6.3.1 Exemples

La force électrostatique

Deux points matériels M_1 et M_2 de charges électriques respectives q_1 et q_2 interagissent par la force électrostatique selon la loi de Coulomb

$$\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r$$

où $r = |\overrightarrow{M_1 M_2}|$, ϵ_0 est la permittivité électrique dans le vide, définie dans le troisième chapitre. $\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2}$ est répulsive si les deux charges électriques q_1 et q_2 sont de même signe et attractive dans le cas contraire.

Force gravitationnelle

Considérons deux masses m_O et m_M situées respectivement aux points O et M tel que $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$. Les deux masses interagissent selon la loi de Newton

$$\vec{F}_{O \rightarrow M} = -G \frac{m_O m_M}{r^2} \vec{e}_r.$$

G est la constante de gravitation définie auparavant. La force gravitationnelle est toujours attractive. La masse joue pour l'interaction gravitationnelle le même rôle que joue la charge électrique pour la force électrostatique.

**Remarque**

Nous nous intéresserons dans le reste de ce chapitre à l'interaction gravitationnelle entre de grands systèmes tels que le soleil, les planètes, \dots . Ainsi le référentiel galiléen que l'on va adopter est le référentiel héliocentrique, dont l'origine est confondue avec le centre du soleil et les axes sont orientés vers trois étoiles fixes.

On considèrera ainsi dans le reste de ce chapitre un système M de masse m soumis à une force centrale dont le support passe par O .

6.4 Force centrale et théorème du moment cinétique

6.4.1 Théorème du moment cinétique

Appliquons le théorème du moment cinétique à M . Soit $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$ le moment cinétique de M dans \mathcal{R} par rapport à O . On a

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \implies \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) = \text{cte.}$$

Ainsi, nous déduisons une propriété très importante des forces centrales.

**Enoncé**

Le moment cinétique d'un système soumis à une force centrale est constant.

$\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$ est un vecteur constant (en direction, en sens et en module) que l'on peut définir à partir des conditions initiales, c'est à dire

$$\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) = \left. \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) \right|_{t=0} = \overrightarrow{OM}_0 \wedge m\vec{V}_0$$

où M_0 et \vec{V}_0 sont respectivement la position et la vitesse de M à l'instant $t = 0$.

Conséquences :

- Comme $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$ est constant, cela implique que \overrightarrow{OM} est constamment perpendiculaire à $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$, ce qui veut dire que le point M se déplace dans le plan perpendiculaire à $\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})$.

- Seules deux coordonnées peuvent décrire le mouvement de M , étant donné, comme on vient de le voir, que M se déplace sur un plan. On choisit, de manière naturelle les coordonnées polaires (ρ, φ) .

- La vitesse de M est $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$. Le moment cinétique est égal à

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) &= \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) \\ &= m\rho\vec{e}_\rho \wedge (\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) \\ &= m\rho^2\dot{\varphi}\vec{k} = m\rho_0^2\dot{\varphi}_0\vec{k} = \sigma_0\vec{k}. \end{aligned}$$

où ρ_0 et $\dot{\varphi}_0$ sont évalués à l'instant initial $t = 0$.

6.5 Loi des aires

Considérons un déplacement infinitésimal de M tel que $\rho \rightarrow \rho + d\rho$ et $\varphi \rightarrow \varphi + d\varphi$, l'élément de surface engendré par ce déplacement peut être écrit comme

$$\delta S \simeq \delta S_a + \delta S_b = \frac{1}{2}\rho^2\delta\varphi + \frac{1}{2}\rho d\rho\delta\varphi$$

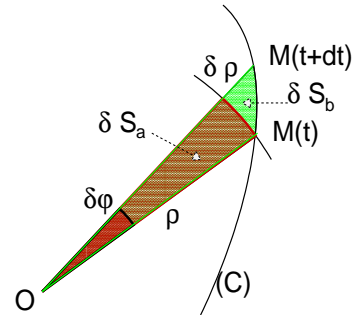
où δS_a est la surface d'une portion de disque d'angle $\delta\varphi$ et δS_b est la surface d'un triangle de côtés $d\rho$, $\rho d\varphi$ et $\overline{M(t)M(t+dt)}$. Lorsque $\delta\rho \rightarrow 0$, $\delta S_b \rightarrow 0$ ce qui donne

$$dS = \frac{1}{2}\rho^2 d\varphi$$

et on sait que

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R}) &= m\rho^2\dot{\varphi}\vec{k} = \sigma_0\vec{k} \\ \implies \frac{dS}{dt} &= \text{cte} = \frac{\sigma_0}{2m} = A \end{aligned}$$

FIGURE 6.1 – Surface élémentaire engendrée par un déplacement élémentaire de M .



où A est appelée *la vitesse aréolaire*, sachant que

$$A = \frac{dS}{dt} = \frac{\sigma_0}{2m} \quad \text{donc} \quad S = At + \text{cte} = \frac{\sigma_0}{2m}t + \text{cte}.$$

Ainsi on peut énoncer la loi des aires, que l'on appelle aussi **la deuxième loi de Kepler**.

Énoncé de la 2^{ème} loi des aires

Les aires balayées pendant des intervalles de temps égaux sont égales.

Remarque

La loi des aires peut être exprimée en fonction de la vitesse orthoradiale. Sachant que $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = V_r\vec{e}_\rho + V_\varphi\vec{e}_\varphi$ avec $V_\varphi = \rho\dot{\varphi}$,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi} = \frac{1}{2}\rho V_\varphi = \frac{1}{2}\rho V \cos\beta = \frac{1}{2}\rho_0 V_0 \cos\beta_0$$

où β est l'angle que forme le vecteur vitesse avec \vec{e}_φ , voir figure 6.2

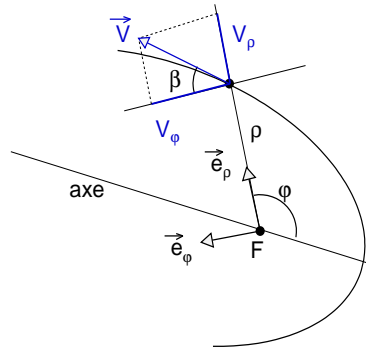


FIGURE 6.2 – Décomposition de la vitesse en composantes radiale et orthoradiale.

6.6 Equation du mouvement

On peut déterminer l'équation du mouvement de plusieurs manières.

6.6.1 PFD

La première méthode consiste à utiliser le principe fondamental de la dynamique. En effet, comme \mathcal{R} est galiléen, il suffit d'exprimer l'accélération de M et d'utiliser le PFD. En effet

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \left. \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \left. \frac{d}{dt} (\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) \right|_{\mathcal{R}} \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

et le PFD donne

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \\ -\frac{GMm}{\rho^2}\vec{e}_\rho &= m \left[(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi \right]\end{aligned}$$

en projetant sur les axes polaires, on obtient les deux équations

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 + \frac{GM}{\rho^2} = 0 \\ \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

Si l'on reprend la deuxième équation et en la multipliant par ρ , on obtient

$$\rho^2\ddot{\varphi} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0 \implies \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\|\vec{\sigma}_o(M/\mathcal{R})\|}{m}\right) = 0.$$

On note bien que cette équation ne reproduit que le fait que le moment cinétique est un vecteur constant. Aussi l'équation du mouvement se réduit à

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 + \frac{GM}{\rho^2} = 0.$$

Pour retrouver l'équation de mouvement dans le cas général d'une force centrale, il suffit de remplacer GMm par k .

6.6.2 Théorème de l'énergie mécanique

La force gravitationnelle étant conservative, l'énergie mécanique se conserve et a pour expression $E_m = E_c + E_p$ avec

$$\left. \begin{aligned} E_p &= -\frac{GMm}{\rho} \\ E_c &= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) \end{aligned} \right\} \implies E_m = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - \frac{GMm}{\rho}.$$

Comme E_m se conserve, $dE_m/dt = 0$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \dot{\rho}\ddot{\rho} + \rho\dot{\rho}\dot{\varphi}^2 + \rho^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \frac{GM}{\rho^2}\dot{\rho} &= 0 \\ \implies \dot{\rho}\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 + \frac{GM}{\rho^2}\right) + \dot{\varphi}(2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho^2\ddot{\varphi}) &= 0 \\ \implies \dot{\rho}\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 + \frac{GM}{\rho^2}\right) + \dot{\varphi}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) &= 0 \\ \implies \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 + \frac{GM}{\rho^2} &= 0 \end{aligned}$$

nous avons utilisé le fait que le moment cinétique est un vecteur constant. Ainsi en final, on aboutit à l'équation établie précédemment.

6.7 Equation de la trajectoire $\rho(\varphi)$: Formules de Binet

Dans cette paramétrisation, on utilise $\rho = \rho(\varphi)$. Ainsi, la dérivée droite par rapport au temps devient

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial\varphi} = \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

On reprend l'équation du mouvement

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 + \frac{GM}{\rho^2} = 0.$$

On peut éliminer $\dot{\varphi}$ en la substituant par son expression en fonction du moment cinétique et obtenir une équation en ρ et sa dérivée seconde par rapport au temps

$$\begin{aligned}\ddot{\rho} - \frac{\rho^4 \dot{\varphi}^2}{\rho^3} + \frac{GM}{\rho^2} &= 0 \\ \implies \ddot{\rho} - \frac{\sigma_0^2}{m^2} \frac{1}{\rho^3} + \frac{GM}{\rho^2} &= 0.\end{aligned}$$

La résolution de cette équation peut se faire de manière aisée si l'on procède au changement de variable $u = \frac{1}{\rho}$, pour éliminer ρ dans les dénominateurs, et à la substitution de la dérivée par rapport au temps par celle par rapport à φ sachant que $\dot{\varphi} = \frac{\sigma_0}{m\rho^2} = \frac{\sigma_0}{m} u^2 = Cu^2$ en posant $C = \frac{\sigma_0}{m}$.

En effet,

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u} \right) \\ &= \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{u} \right) \\ &= Cu^2 \frac{d}{du} \left(\frac{1}{u} \right) \frac{du}{d\varphi} \\ &= Cu^2 \left(-\frac{1}{u^2} \right) \frac{du}{d\varphi} \\ &= -C \frac{du}{d\varphi}\end{aligned}$$

et calculons la dérivée seconde

$$\begin{aligned}\frac{d^2\rho}{dt^2} &= -C \frac{d}{dt} \frac{du}{d\varphi} \\ &= -C \dot{\varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{du}{d\varphi} \right) \\ &= -C^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\varphi^2}\end{aligned}$$

6.7.1 Expression de la vitesse

L'expression de la vitesse en fonction de la nouvelle variable u , en substituant la dérivée par rapport au temps par celle par rapport à φ , donne

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\ &= -C \frac{du}{d\varphi} \vec{e}_\rho + Cu \vec{e}_\varphi.\end{aligned}$$

Ce qui donne pour le module de la vitesse

$$|\vec{V}(M/\mathcal{R})| = C \sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2}$$

et cette dernière relation est appelée la première relation de Binet.

$$|\vec{V}(M/\mathcal{R})| = C\sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2} \quad \text{Première Formule de Binet.}$$

6.7.2 Expression de l'accélération

On reprend l'expression de l'accélération en fonction de ρ et de ses dérivés et on procède aux changements adéquats

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi \\ &= -C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) \vec{e}_\rho + u \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi \\ &= -C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) \vec{e}_\rho \end{aligned}$$

le deuxième terme est nul car le moment cinétique est constant. Aussi l'on a

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = -C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) \vec{e}_\rho \quad \text{Deuxième formule de Binet.}$$

6.7.3 Equation du mouvement

Pour établir l'équation du mouvement $\rho = \rho(\varphi)$, soit on utilise l'équation établie précédemment en procédant au changement de variable $u = 1/\rho$ et en substituant la dérivée seconde de ρ par rapport au temps par son expression en fonction de u ; soit d'utiliser l'expression de l'accélération établie dans le paragraphe précédent et appliquer le PFD en substituant dans l'expression de \vec{F} le terme $1/\rho$ par u .

$$-GMm u^2 = -C^2 m u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) \implies \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u - \frac{GM}{C^2} = 0$$

soit

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{C^2}$$

qui est une équation usuelle, équation différentielle de second ordre à coefficients constants et avec second membre. La solution est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre, $u_{sm}(\varphi)$, et de la solution particulière, $u_{part}(\varphi)$. En effet, l'équation sans second membre

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = 0$$

a comme solution générale $u_{sm}(\varphi) = a\cos(\varphi - \varphi_0)$ où a et φ_0 sont des constantes d'intégration que l'on détermine à partir des conditions initiales.

La solution particulière est

$$u_{part} = \frac{GM}{C^2}.$$

La solution est alors égale à

$$u(\varphi) = \frac{1}{\rho} = a\cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{GM}{C^2}.$$

On peut choisir l'axe polaire de telle manière que $\varphi_0 = \varphi_{axe} = 0$ ce qui ramène l'expression précédente à

$$\rho = \frac{\frac{C^2}{GM}}{1 + a\frac{C^2}{GM}\cos(\varphi)} = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}.$$

L'équation obtenue est celle d'une conique de paramètre p et d'excentricité e qui seront fixés à partir des conditions initiales. L'origine du repère est le foyer de la conique, $\mathcal{R}(F, xyz) = \mathcal{R}(F, \rho, \varphi)$.



On rappelle que l'excentricité e fixe la nature de la conique comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} e = 0 & \rightarrow \text{la trajectoire est un cercle} \\ 0 < e < 1 & \rightarrow \text{la trajectoire est une ellipse} \\ e = 1 & \rightarrow \text{la trajectoire est une parabole} \\ e > 1 & \rightarrow \text{la trajectoire est une hyperbole} \end{array} \right.$$

Expressions de p et de e

Expression de p La valeur de p est fixée par la valeur du moment cinétique, des masses et de la constante de gravitation comme suit

$$p = \frac{C^2}{GM} = \frac{\sigma_0^2}{GMm^2}$$

sachant que σ_0 est déterminé à partir de la position initiale et de la vitesse initiale comme suit $\sigma_0 = m\rho_0 V_0 \cos\beta_0$.

Expression de e La valeur de e est fixée à partir de l'énergie mécanique initiale. En effet, nous avons établi précédemment que

$$\begin{aligned}
 E_m &= \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - \frac{GMm}{\rho} \\
 &= \frac{1}{2}m\left(C^2\left(\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{1}{\rho}\right]\right)^2 + C^2\left[\frac{1}{\rho}\right]^2\right) - GMm\left[\frac{1}{\rho}\right] \\
 &= \frac{1}{2}mC^2\left(\frac{1}{p^2}[-e\sin\varphi]^2 + \left[\frac{1 + 2e\cos\varphi + e^2\cos^2\varphi}{p^2}\right]\right) - GMm\left[\frac{1 + e\cos\varphi}{p}\right] \\
 &= \frac{mC^2}{2p^2}(1 + 2e\cos\varphi + e^2) - GMm\left[\frac{1 + e\cos\varphi}{p}\right]
 \end{aligned}$$

or

$$\frac{GM}{p} = \frac{C^2}{p^2}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 E_m &= \frac{mC^2}{2p^2}(1 + 2e\cos\varphi + e^2 - 2 - 2e\cos\varphi) \\
 &= \frac{GMm}{2p}(e^2 - 1).
 \end{aligned}$$

Comme E_m est conservée alors

$$E_m = E_0 = \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{GMm}{\rho_0} \implies e = \sqrt{1 + \frac{2pE_0}{GMm}} = \sqrt{1 + \frac{pV_0^2}{GM} - \frac{2p}{\rho_0}}$$



Ainsi la connaissance de p et de e détermine complètement la nature de la conique.

6.8 Nature de la trajectoire

Réexprimons l'équation du mouvement $\rho = \rho(\varphi)$ en coordonnées cartésiennes $\mathcal{R}(F, xyz)$. Ainsi

$$\begin{cases} \rho^2 &= x^2 + y^2 \\ \rho &= p - e\rho\cos\varphi = p - ex \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 \rho^2 = (p - ex)^2 &\implies x^2 + y^2 = p^2 - 2epx + e^2x^2 \\
 &\implies x^2(1 - e^2) + 2epx + y^2 = p^2 \\
 &\implies x^2 + 2\frac{ep}{1-e^2}x + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{1-e^2} \\
 &\implies \left(x + \frac{ep}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{1-e^2} - \frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2} \\
 &\implies \left(x + \frac{ep}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{(1-e^2)^2}
 \end{aligned}$$

Procédons au changement de variable

$$\begin{cases} X &= x + \frac{ep}{1-e^2} \quad (e \neq 1) \\ Y &= y \end{cases}$$

ce qui correspond à exprimer la trajectoire dans le référentiel $\mathcal{R}'(C, XYZ)$. L'origine C de \mathcal{R}' a pour coordonnées dans \mathcal{R} ($x_C = -ep/[1 - e^2]$, $y_C = 0$).



On verra par la suite que C est en fait le centre de la conique.

L'équation prend la forme suivante en divisant par $p^2/(1 - e^2)^2$,

$$\frac{X^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{Y^2}{\frac{p^2}{1-e^2}} = 1$$

qui n'est d'autre que l'équation d'une conique exprimée en coordonnées cartésiennes dans $\mathcal{R}'(C, XYZ)$.

Discutons la nature de la trajectoire en fonction de l'excentricité.

6.8.1 Mouvement circulaire : $e = 0$

Si le mouvement est circulaire alors l'excentricité $e = 0$ et l'équation du mouvement devient

$$X^2 + Y^2 = p^2$$

qui est l'équation d'un cercle dans $\mathcal{R}'(C, XYZ)$ de centre C et de rayon p , figure 6.3.

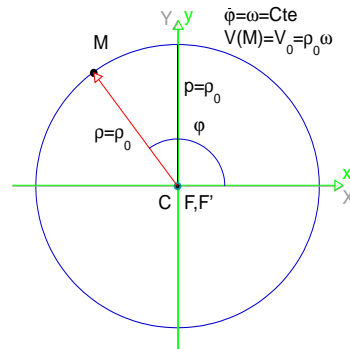


FIGURE 6.3 – *Mouvement circulaire.*



Remarques

- $e = 0$ implique que $X = x$ et $Y = y$ et donc les deux repères $\mathcal{R}(F, xyz)$ et $\mathcal{R}'(C, XYZ)$ coïncident et le centre du cercle est confondu avec les foyers F et F' .
- $e = 0$ implique aussi que $\rho = p = Cte = \rho_0$ puisque p est constante.
- La vitesse angulaire de rotation $\dot{\varphi}$ est reliée à ρ_0 par $\rho_0^2 \dot{\varphi} = C$, ce qui implique que $\dot{\varphi} = (Cte) = \omega$.
- La vitesse V est orthoradiale (\perp à \vec{e}_φ) puisque la trajectoire est circulaire. la vitesse est constante car $V = \rho \dot{\varphi} = \rho_0 \omega = V_0$. Le mouvement de rotation est uniforme.
- $C = \sigma_0/m = \rho_0^2 \omega$. Or

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{C^2}{GM} = \frac{\rho_0^4 \omega^2}{GM} \\ p &= \rho_0 \end{aligned} \right\} \implies \rho_0 V_0^2 = GM.$$



En conclusion : Le mouvement est circulaire uniforme vérifiant $\rho_0 V_0^2 = GM$ et le centre du cercle est confondu avec les foyers.

6.8.2 Mouvement elliptique : $0 < e < 1$

Si l'excentricité est comprise strictement entre 0 et 1, et c'est le cas le plus fréquent en astronomie et pour les satellites artificiels, la trajectoire est une ellipse. L'équation devient alors

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{p}{1-e^2} && CX : \text{le demi-grand axe } (a > b) \\ b &= \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} && CY \text{ le demi-petit axe} \end{aligned} \right.$$



Dans $\mathcal{R}(C, XYZ)$ c'est une ellipse de centre C et de grand axe a et de petit axe b . Notons que les coordonnées polaires sont définies dans le repère initial $\mathcal{R}(F, xyz)$, voir figure ?? .

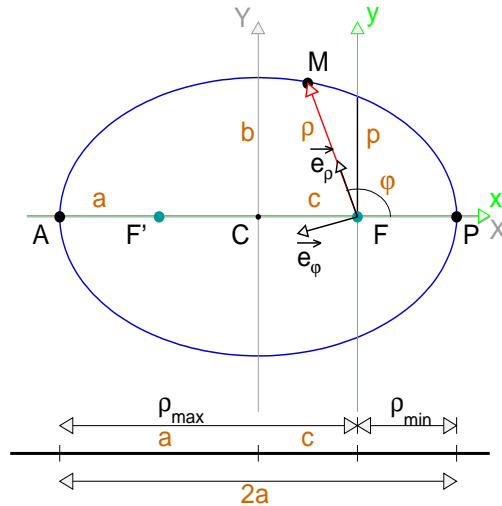


FIGURE 6.4 – *Mouvement elliptique.*

Relation entre les paramètres géométriques de l'ellipse

Reprenons le repère $\mathcal{R}(F, xyz)$ dont l'origine est le foyer F qui est à une distance c du centre C de l'ellipse. La position de M est repérée par $\overrightarrow{FM} = \rho \vec{e}_\rho$ avec $\rho = p/(1 + e \cos \varphi)$, voir figure 6.4



Notons que nous avons pris l'axe polaire comme origine des angles, $\varphi_{axe} = 0$, sinon l'équation à utiliser est

$$\rho = p / [1 + e \cos(\varphi - \varphi_{axe})]$$

Avec ces notations, le minimum de ρ , ρ_{min} , est à $\varphi = 0$. Il est appelé le périastre.



Dans le cas du mouvement autour de la terre, le périastre est appelé périgée. Quand le mouvement est autour du soleil, il est appelé périhélie.

Quant au maximum de ρ , ρ_{max} , il est à $\varphi = \pi$. Il est appelé apoastre.



Dans le cas du mouvement autour de la terre, l'apoastre est appelé apogée.
 Quand le mouvement est autour du soleil, il est appelé aphélie.

Retrouvons quelques relations géométriques utiles concernant les expressions des paramètres de l'ellipse a , b , c , ρ_{min} et ρ_{max} en fonction de p et de e .

Partons de la relation de $\rho = \rho(\varphi)$:

$$\begin{aligned} \rho_{min} &= \frac{p}{1+e} \implies \left\{ \begin{array}{l} p = 2 \frac{\rho_{max}\rho_{min}}{\rho_{max}+\rho_{min}} \\ e = \frac{\rho_{max}-\rho_{min}}{\rho_{max}+\rho_{min}} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} a = \rho_{min} + c \\ a = \rho_{max} - c \end{array} \implies \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\rho_{max}+\rho_{min}}{2} \\ c = \frac{\rho_{max}-\rho_{min}}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Or $\rho_{max} + \rho_{min} = 2a$ ce qui implique que $a = p/(1 - e^2)$.

Quant au centre de l'ellipse, sa distance au foyer peut s'exprimer comme

$$c = a - \rho_{min} = a - \frac{p}{1+e} = a - a \frac{1-e^2}{1+e} = a - a(1-e) \implies c = ea.$$

L'une des propriétés de l'ellipse est que

$$|FM| + |F'M| = 2a \implies |FB| = a$$

d'où le petit axe b vérifie $a^2 = b^2 + c^2$. En remplaçant c par son expression on obtient $b = a\sqrt{1 - e^2}$. Récapitulons les résultats que l'on vient d'établir

$$\begin{aligned} \rho_{min} &= p/(1+e) \\ \rho_{max} &= p/(1-e) \\ a &= p/(1-e^2) \\ b &= p/\sqrt{1-e^2} \\ c &= ep/(1-e^2) \end{aligned}$$

Loi des aires et paramètres de l'ellipse

On a établi précédemment que $dS = (C/2)dt$ que l'on peut intégrer. En prenant la constante d'intégration nulle, nous obtenons

$$S(t) = \frac{C}{2}t = \frac{\sigma_0}{2m}t.$$



Définition

On appelle la période sidérale, T , l'intervalle de temps qui sépare deux passages successifs de M devant une étoile fixe

La surface de l'ellipse balayée lors d'une période sidérale T , sachant que la surface d'une ellipse est égale à πab , est

$$\pi ab = \frac{C}{2}T \implies \Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{C}{ab}.$$



Parfois la loi des aires de l'ellipse est mise sous la forme

$$S(t) = \pi ab \frac{t}{T}.$$

6.8.3 Mouvement parabolique : $e = 1$

Lorsque l'excentricité est égale à l'unité, $\rho_{min} = \frac{p}{2}$ qui est la distance entre le sommet de la parabole et le foyer F . De même, l'équation cartésienne dans $\mathcal{R}(F, xyz)$ est donnée par

$$y^2 + 2px = p^2.$$



Ce mouvement ne représente pas un grand intérêt physique.

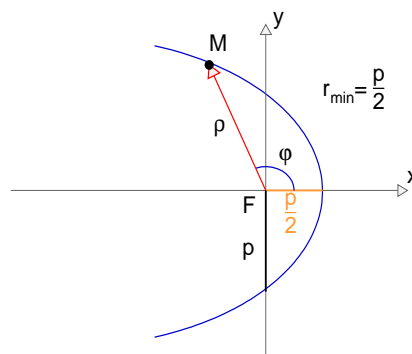


FIGURE 6.5 – *Mouvement parabolique.*

6.8.4 Mouvement hyperbolique : $e > 1$

L'équation du mouvement cartésienne dans le repère $\mathcal{R}'(C, XYZ)$ lorsque $e > 1$ est

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = \frac{p}{(e^2-1)} \\ b = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}} \end{cases}$$

et d'asymptotes d'équations $Y = \pm \frac{a}{b} X$.

Revenons au repère $\mathcal{R}(F, xyz)$ et calculons les différents paramètres ρ_{min} et c en fonction de e et de p ; les expressions de a et b étant déjà établies en fonction de ces deux paramètres.

Pour $\rho_{min} = |FP|$, voir figure ci-contre, on a

$$\rho_{min} = \rho(\varphi = 0) = \frac{p}{1+e}$$

Quant à $c = |FC| = |FP| + |PC|$, ce qui donne

$$\begin{aligned} c &= \rho_{min} + a = \frac{p}{e+1} + \frac{p}{e^2-1} \\ &= \frac{p + p(e-1)}{e^2-1} = \frac{pe}{e^2-1}. \end{aligned}$$

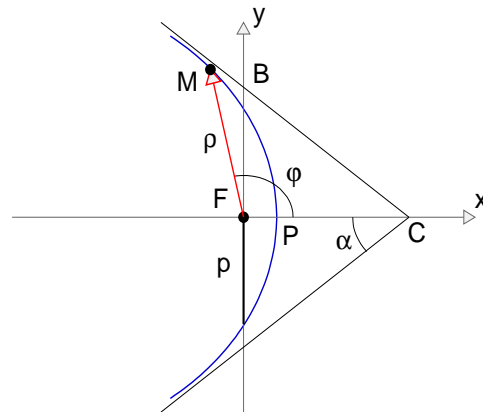


FIGURE 6.6 – *Mouvement hyperbolique.*

Les asymptotes sont repérées par l'angle α tel que

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{c}{\sqrt{c^2 + b^2}} \\ &= \frac{\frac{ep}{e^2-1}}{\sqrt{\frac{e^2p^2}{(e^2-1)^2} + \frac{e^2p^2}{(e^2-1)}}} \\ &= \frac{\frac{1}{e^2-1}}{\sqrt{\frac{e^2}{e^2-1}}} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

6.9 Retour aux lois de Kepler

Il faut signaler que ces lois ont été déduites à partir d'observations expérimentales à la fin du XV^{ème} siècle et ce à une époque où ni la loi de la gravitation ni les lois

de la dynamique ne sont encore découvertes. Ce qui confère un caractère important aux lois de Kepler. Ces lois permettent de déduire nombre de propriétés sur les orbites des planètes sans disposer de la solution mathématique de la trajectoire.

6.9.1 Première loi de Kepler : loi des orbites

Enoncé

Les planètes du système solaire décrivent des orbites elliptiques dont le soleil occupe l'un de ces foyers

La conséquence que l'on peut déduire est que la force qui s'exerce entre le soleil et la planète est forcément portée par l'axe soleil-planète, c'est donc une force centrale.

6.9.2 Deuxième loi de Kepler : loi des aires

Notons respectivement par S le soleil et par M une position quelconque d'une planète sur son orbite.

Enoncé de la loi des aires

Les aires balayées par \overrightarrow{SM} pendant deux intervalles de temps égaux sont égales.

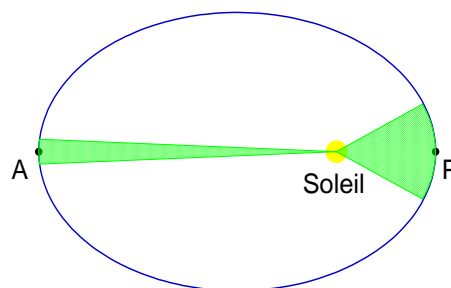


FIGURE 6.7 – les deux surfaces ont la même aire.



Cette loi nous permet de déduire que la vitesse de la planète est d'autant plus grande que celle-ci se rapproche du soleil.

En effet, l'arc parcouru à la préhélie (P) est plus grand que celui parcouru à l'aphélie (A); comme les deux arcs sont parcourus dans le même intervalle de temps, alors la vitesse à la préhélie est plus grande, voir figure 6.7

6.9.3 Troisième loi de Kepler : loi des périodes

Enoncé

Le carré de la période sidérale T d'une planète est directement proportionnel au cube du demi-grand axe de l'orbite elliptique de la planète

En reprenant la loi des aires exprimée en fonction de la période sidérale, d'une part, et en fonction de C , d'autre part, on en déduit que

$$\pi ab \frac{1}{T} = \frac{C}{2}$$

sachant que $p = C^2/GM = b^2/a$, on obtient

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{C^2} = 4\pi^2 a^2 b^2 \frac{GM}{p} = 4\pi^2 a^2 b^2 GM \frac{a}{b^2} \\ &= 4\pi^2 GM a^3 \end{aligned}$$

ce qui démontre bien la troisième loi de Kepler.



Rappelons que Kepler a établi ces lois à partir de l'analyse de mesures!

6.10 Nature des orbites et conditions initiales

Nous avons établi les relations entre les paramètres de la conique et les conditions initiales. Nous allons voir dans ce paragraphe, le lien entre les conditions initiales que sont ρ_0 , V_0 et β_0 , d'une part, et la nature de la trajectoire ou orbite, d'autre part.

Rappelons que nous avons adopté l'axe polaire comme origine de φ , c'est à dire $\varphi_0 = 0$.

Toutefois, dans le cas général, l'axe de l'orbite ne coïncide pas avec l'axe polaire. Notons cet angle par φ_{axe} , voir figure 6.8. Aussi, à partir des conditions initiales, il faut déterminer et fixer e , p et φ_{axe} . Notons que l'angle β est celui que fait le vecteur vitesse avec \vec{e}_φ .

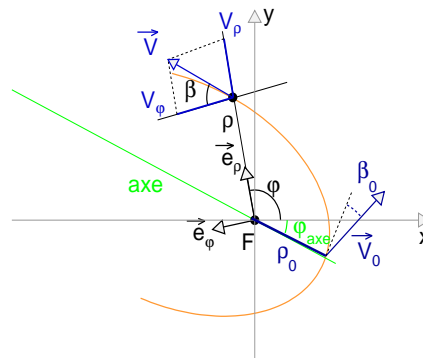


FIGURE 6.8 – Cas général, l'axe de l'orbite ne coïncide pas avec l'axe polaire.

6.10.1 Relation entre β et φ

A partir de la définition de β , nous avons

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}\beta &= \frac{V_\rho}{V_\varphi} \\
 &= \frac{\dot{\rho}}{\rho\dot{\varphi}} = \frac{1}{\rho} \left| \frac{d\rho}{d\varphi} \right| \\
 &= \frac{|1 + e\cos\varphi|}{p} \frac{pe|\sin\varphi|}{(1 + e\cos\varphi)^2} \\
 &= \frac{e|\sin\varphi|}{|1 + e\cos\varphi|}
 \end{aligned}$$



Nous avons finalement

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{e|\sin\varphi|}{|1 + e\cos\varphi|}.$$

6.10.2 Conditions initiales et paramètres de la conique

Nous avons déjà établi les relations entre p , e et les conditions initiales. Nous allons le refaire cette fois-ci en fonction du rapport entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle à l'état initial, ξ , défini par

$$\xi = \frac{E_{0c}}{|E_{0p}|} = \frac{\rho_0 V_0^2}{2GM}.$$

Expression de p

On sait que $C = \rho_0 V_0 \cos \beta_0$ et $p = C^2 / GM$, ce qui donne

$$p = \frac{\rho_0^2 V_0^2 \cos^2 \beta_0}{GM} = 2\xi \rho_0 \cos^2 \beta_0.$$

Expression de e et φ_{axe}

Nous avons

$$\begin{cases} \rho_0 = \frac{p}{1 + e \cos \varphi_{axe}} \\ \operatorname{tg} \beta_0 = \frac{\rho_0}{p} e \sin \varphi_{axe} \end{cases} \implies \begin{cases} e \cos \varphi_{axe} = \frac{p}{\rho_0} - 1 \\ e \sin \varphi_{axe} = \frac{p}{\rho_0} \operatorname{tg} \beta_0 \end{cases} \implies \operatorname{tg} \varphi_{axe} = \frac{\sin(2\beta_0)}{2 \cos^2 \beta_0 - \frac{GM}{2\rho_0 V_0^2}} = \frac{\sin(2\beta_0)}{2 \cos^2 \beta_0 - \frac{1}{\xi}}$$

Quant à l'excentricité, on reprend l'expression que nous avons établi en fonction de l'énergie mécanique

$$\begin{aligned} e^2 &= 1 + \frac{2pE_{0m}}{GMm} \\ &= 1 + \frac{2p}{GMm} (E_{0c} - |E_{0p}|) \\ &= 1 + \frac{2p}{GMm} |E_{0p}| (1 - \xi) \\ &= 1 + \frac{2}{GMm} 2\xi \rho_0 \cos^2 \beta_0 \frac{GMm}{\rho_0} (1 - \xi) \\ &= 1 + 4\xi(1 - \xi) \cos^2 \beta_0 \end{aligned}$$



Récapitulons les résultats établis

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{E_{0c}}{|E_{0p}|} = \frac{\rho_0 V_0^2}{2GM} \\ p &= 2\xi \rho_0 \cos^2 \beta_0 \\ \operatorname{tg} \varphi_{axe} &= \frac{\sin(2\beta_0)}{2 \cos^2 \beta_0 - \frac{1}{\xi}} \\ e^2 &= 1 + 4\xi(\xi - 1) \cos^2 \beta_0 \end{aligned}$$

6.11 Satellites terrestres

Nous étudions le mouvement des satellites terrestres dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}(O, xyz)$, que l'on suppose galiléen. On ne considère que l'effet de l'attraction terrestre

et l'on néglige celle des autres astres. Soient M_T et R_T respectivement la masse et le rayon de la terre. Soit m la masse du satellite telle que $m \ll M_T$. On utilise l'approximation consistant à considérer la forme de la terre sphérique ce qui nous permet de considérer que l'effet de l'attraction terrestre est isotrope, indépendant de φ .



┃ Rappelons que la forme de la terre est aplatie aux pôles.

Avec ces considérations, l'attraction de la terre sur le satellite peut se mettre sous la forme

$$\vec{F} = -\frac{GmM_T}{\rho^2}\vec{e}_\rho.$$

et l'on peut tout simplement appliquer tous les résultats de ce chapitre.

6.11.1 Lancement d'un satellite $\vec{V}_0 \perp \vec{\rho}_0$

A la lumière des résultats établis dans le paragraphe précédent, liant les conditions initiales aux paramètres de l'orbite, nous allons analyser l'effet des conditions initiales sur le lancement d'un satellite terrestre.

Pour faciliter cette analyse, représentons l'excentricité e de la conique en fonction du rapport entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du satellite

$$e = \sqrt{1 + 4\xi(\xi - 1)\cos^2\beta_0}$$

en prenant β_0 comme paramètre, figure 6.9. Nous nous focaliserons ensuite sur le cas $\beta_0 = 0$ qui nous intéresse.

Analyse de l'orbite du satellite

Etablissons la vitesse à laquelle le satellite ne retombe pas sur son point de lancement et gravite autour de la terre dans une orbite.

Le satellite ne doit pas chuter sur son point de lancement, ce qui impose que $p \geq R_T$ et

$$2\xi\rho_0 \geq R_T \implies \rho_0^2 V_0^2 \geq GM_T R_T$$

en terme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle

$$\frac{1}{2}mV_0^2 \geq \frac{1}{2}\frac{GmM_T}{\rho_0}\frac{R_T}{\rho_0} \implies E_{0c} \geq \frac{1}{2}E_{0p}\frac{R_T}{\rho_0}.$$

Supposons que cette condition est remplie. La figure ci-contre présente les variations de l'excentricité en fonction de ξ . On note

- que e présente un minimum à $\xi = 1/2 \forall \beta_0 \in [0, \pi/2[$ et seule la valeur $\beta_0 = 0$ donne un minimum à $e = 0$ et donc *une orbite circulaire n'est possible que pour $\beta_0 = 0$.*
- $0 \leq e < 1$ pour $\xi \in [0, 1[$. C'est à dire que l'orbite ne peut être circulaire ou elliptique que dans cette région de ξ .
- $e = 1$ pour $\xi = 1 \forall \beta_0$. L'orbite parabolique ne dépend pas de la direction de \vec{V}_0 .
- pour $\xi \geq 1, e \geq 1 \forall \beta_0$ et donc l'orbite est une parabole ou une hyperbole quelque soit la valeur de β_0 .

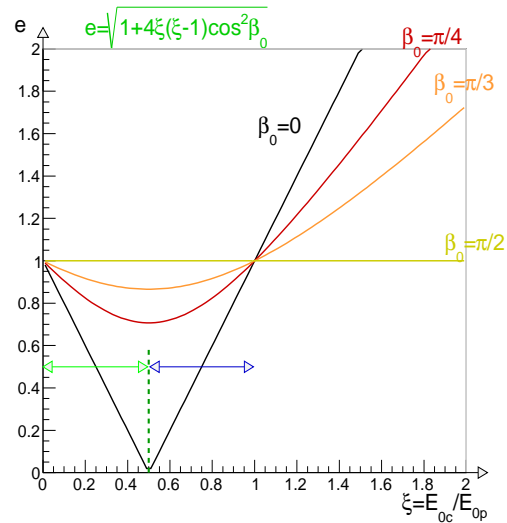


FIGURE 6.9 – Variation de l'excentricité en fonction de $\xi = E_{0c}/E_{0p}$.



Revenons au cas qui nous intéresse $\beta_0 = 0$. On peut noter que

$$\left. \begin{array}{l} 0 < \xi < \frac{1}{2} \\ 0 < \rho_0 V_0^2 < GM_T \\ \xi = \frac{1}{2} \\ \rho_0 V_0^2 = GM_T \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 < e < 1 \\ e = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{orbite elliptique : la terre occupe } F'. \\ \text{orbite circulaire : la terre occupe } C \text{ et } (C = F = \dots) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} < \xi < 1 \\ \frac{GM_T}{2} < \rho_0 V_0^2 < GM_T \\ \xi = 1 \\ \rho_0 V_0^2 = GM_T \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 < e < 1 \\ e = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{orbite elliptique : la terre occupe } F. \\ \text{orbite parabolique : le satellite est libéré.} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi > 1 \\ \rho_0 V_0^2 > GM_T \end{array} \right\} \Rightarrow e > 1 \quad \text{orbite hyperbolique : le satellite est libéré.}$$

La figure 6.10 illustre les différentes orbites que peut occuper le satellite selon le rapport entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle ξ .

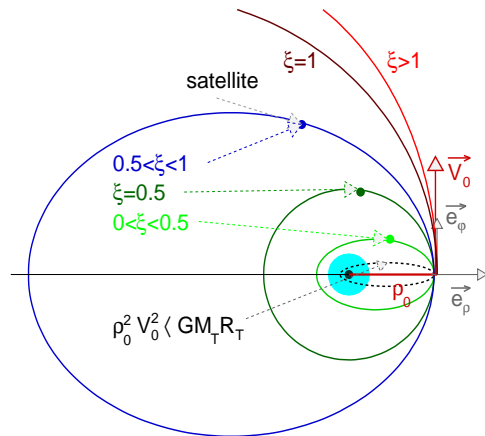


FIGURE 6.10 – Orbits du satellite selon le rapport $\xi = \frac{E_{0c}}{E_{0p}}$.

Vitesse nécessaire pour mettre un satellite sur une orbite circulaire

Rappelons qu'une orbite circulaire n'est possible que pour $\beta_0 = 0$. En effet, prenons $\beta_0 \neq 0$, et vérifions si l'équation de e^2 en fonction de ξ a une solution nulle, ce qui donne

$$1 + 4\xi(\xi - 1)\cos^2\beta_0 = 0 \implies \xi^2 - \xi + \frac{1}{4\cos^2\beta_0} = 0$$

dont le discriminant est $\Delta = 1 - 1/\cos^2\beta_0 < 0$, par conséquent l'équation n'a pas de solution réelle.



On en conclut que seule $\beta_0 = 0$ permet d'avoir une orbite circulaire.

L'équation de l'excentricité e donne

$$e^2 = 0 \implies \xi^2 - \xi + \frac{1}{4} = 0$$

dont le discriminant est $\Delta = 0$, ainsi l'équation a une racine double et seule la racine positive est une solution physique. D'où

$$e^2 = 0 \implies \xi = \frac{1}{2} \implies V_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{\rho_0}}$$

Sachant que $g_0 = GM_T/R_T^2 \simeq 9.81\text{m.s}^{-2}$ et en notant la vitesse à communiquer au satellite par v_c , on a

$$v_c = \sqrt{g_0} \frac{R_T}{\sqrt{\rho_0}} \simeq 9.81 \frac{R_T}{\sqrt{\rho_0}}.$$

On pose pour la suite $\rho_0 = R_T + h$, h étant l'altitude à laquelle on lance le satellite.



On voit bien que la vitesse initiale à communiquer au satellite est d'autant plus faible que l'altitude de lancement est haute.

A la surface terrestre, $h = 0$, la vitesse à communiquer au satellite est la plus grande et égale à

$$v_c = \sqrt{g_0 R_T} \simeq 7.9 \text{ km s}^{-1}.$$



Rappelons que nous avons établi auparavant que la vitesse de révolution d'une orbite circulaire est orthoradiale et constante, donc elle est égale à la vitesse initiale V_0 . La période de révolution est égale à

$$T = \frac{2\pi R_T}{v_c} \simeq 84 \text{ min.}$$

Vitesse de libération parabolique

Calculons la vitesse à communiquer à un satellite pour le mettre sur une orbite parabolique, v_1 , dite vitesse de libération.

On reprend l'équation de $e^2=1$, ce qui nous donne

$$1 + 4\xi(\xi - 1) = 1 \implies \xi = 1 \implies v_1 = \sqrt{\frac{2GM_T}{\rho_0}} \simeq \sqrt{2g_0} \frac{R_T}{\sqrt{\rho_0}}$$

Si on choisit le lancement à la surface de la terre, il faut

$$v_1 = \sqrt{2g_0 R_T} = \sqrt{2} v_c = 11.2 \text{ km s}^{-1}.$$

Oscillateur harmonique

7.1 Introduction

Le modèle de l'oscillateur harmonique revêt une importance particulière. Il décrit le mouvement de nombre de systèmes, mécaniques et électriques, soumis à des forces conservatives au voisinage d'une position d'équilibre stable. Les résultats de ce modèle peuvent être utiles et appliqués à un problème où un point matériel dont la dynamique est régie par la même équation différentielle.

Nous allons aborder dans ce chapitre l'oscillateur harmonique à un seul degré de liberté, sauf mention contraire, et ce dans les configurations suivantes :

- Non amorti et libre : le système est soumis à la seule force conservative ;
- Amorti et libre : le système est soumis, en plus de la force conservative, à une force dissipative ou force de frottement ;

Nous étudierons en détail les régimes afférents à ce dernier cas.

7.2 Oscillateur harmonique à une seule dimension libre non amorti

7.2.1 Forme canonique de l'équation différentielle



Définition

On appelle un oscillateur harmonique à un seul degré de liberté x tout système physique dont la description dépend d'un seul paramètre x vérifiant l'équation différentielle linéaire

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{où } \omega_0 \text{ est la pulsation propre.}$$



Exemple

• Le mouvement d'une masse m soumise à la seule force de rappel par un ressort de constante de raideur k , l'élongation étant décrite par x , est régi par l'équation

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

où $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

• L'évolution de la charge q d'un condensateur de capacité C monté en série avec une inductance L et une résistance $R = 0$, en l'absence de toute excitation externe, est décrite par l'équation

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Aussi la pulsation propre de la charge q est égale à $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

7.2.2 Description du mouvement

La solution générale de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique est

$$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

où X_m est l'amplitude et φ la phase à l'origine des temps et $T_0 = 2\pi/\omega_0$ la période propre de l'oscillateur harmonique.

X_m et φ sont déterminés à partir des conditions initiales

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 = X_m \cos \varphi \\ \dot{x}(t=0) = v_0 = X_m \omega_0 \sin \varphi \end{cases} \implies \begin{cases} X_m = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \\ \tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}. \end{cases}$$



Remarque

La solution peut s'écrire aussi sous la forme

$$\begin{aligned} x &= X_m \cos \varphi \cos(\omega_0 t) - X_m \sin \varphi \sin(\omega_0 t) \\ &= A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

où l'on peut identifier $A = X_m \cos \varphi = x_0$ et $B = -X_m \sin \varphi = \frac{v_0}{\omega_0}$ ce qui donne finalement

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t).$$

7.2.3 Energies de l'oscillateur harmonique

Etant donnée que la solution générale de l'équation différentielle est de la forme $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ et de période T_0 , toutes les grandeurs décrivant le mouvement, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle entre autres, sont également périodiques et de période T_0 .

Energie cinétique :

L'énergie cinétique à l'instant t étant égale à $E_c(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$, sa valeur moyenne est donnée par

$$\begin{aligned} \langle E_c \rangle &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} E_c(t) dt \\ &= \frac{m \omega_0^2 X_m^2}{2T_0} \int_0^{T_0} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) dt \\ &= \frac{m \omega_0^2 X_m^2}{2T_0} \int_0^{T_0} (1 - \cos^2(\omega_0 t + \varphi)) dt \\ &= \frac{m \omega_0^2 X_m^2}{2T_0} \left[T_0 - \int_0^{T_0} \left(\frac{\cos 2(\omega_0 t + \varphi) - 1}{2} \right) dt \right] \\ &= \frac{m \omega_0^2 X_m^2}{4}. \end{aligned}$$

L'énergie cinétique moyenne de l'oscillateur harmonique est finalement égale à

$$\langle E_c \rangle = \frac{m \omega_0^2 X_m^2}{4}.$$

Energie potentielle

**Définition**

L'oscillateur harmonique à un degré de liberté x évolue dans un puits de potentiel parabolique dont l'énergie potentielle est égale à

$$E_p(x) = E_p(0) + \frac{1}{2}kx^2.$$



Si la force est conservative et dérive d'un potentiel $U(x)$, comme l'on considère en général le mouvement autour d'une position d'équilibre stable x_0 , alors $U(x)$ peut s'écrire comme suit, en utilisant un développement limité à l'ordre 2

$$U(x) = U(x_0) + (x - x_0) \left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x=x_0} + \frac{1}{2!} (x - x_0)^2 \left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} + \mathcal{O}(x^3).$$

Comme x_0 est un point d'équilibre, alors $\left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = 0$ ce qui permet d'écrire

$$U(x) \simeq U(x_0) + \frac{1}{2!} (x - x_0)^2 \left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0}$$

qui n'est d'autre que l'expression de E_p en prenant $x_0 = 0$ et $k = \left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0}$.

On prend dans la suite de ce chapitre $E_p(0) = 0$. Calculons l'énergie potentielle moyenne de l'oscillateur harmonique

$$\begin{aligned} \langle E_p \rangle &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} E_p(t) dt \\ &= \frac{kX_m^2}{2T_0} \int_0^{T_0} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt \\ &= \frac{m\omega_0^2 X_m^2}{2T_0} \int_0^{T_0} \frac{1}{2} (\cos 2(\omega_0 t + \varphi) + 1) dt \\ &= \frac{m\omega_0^2 X_m^2}{2T_0} T_0 \\ &= \frac{m\omega_0^2 X_m^2}{4}. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé la relation $k = m\omega_0^2$. L'énergie potentielle moyenne de l'oscillateur

harmonique est donnée par

$$\langle E_p \rangle = \frac{m\omega_0^2 X_m^2}{4} = \langle E_c \rangle$$

Energie mécanique

L'énergie mécanique E_m de l'oscillateur harmonique à un instant t est donnée par

$$\begin{aligned} E_m &= E_c(t) + E_p(t) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}mX_m^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kX_m^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

or $\omega_0^2 = k/m$, ce qui donne

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}mX_m^2\omega_0^2 \left(\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \right) \\ &= \frac{1}{2}mX_m^2\omega_0^2. \end{aligned}$$



Remarques

- L'énergie mécanique est indépendante du temps. Ce qui était attendu étant donnée que la force à laquelle est soumis l'oscillateur harmonique est conservative.
- On note que

$$\langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle = \frac{1}{2}E_m.$$

ce qui montre qu'en moyenne l'énergie mécanique est répartie de manière égale entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

- Rappelons qu'au cours du temps, comme nous l'avons vu précédemment, l'énergie potentielle varie et se transforme en énergie cinétique et vice-versa telle qu'à tout instant la somme est égale à l'énergie mécanique dont la valeur est constante.

7.3 Oscillateur à une dimension libre amorti

L'amortissement de l'oscillateur est dû à la présence d'une force dissipative. La description de cette dernière par une force de frottement fluide de la forme $-h\dot{x}$, h étant le coefficient de frottement fluide, permet d'écrire l'équation différentielle du mouvement comme suit

$$-h\dot{x} - kx = m\ddot{x} \implies \ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

avec $\tau = 1/h$.

**Définition**

On définit le coefficient de qualité Q par

$$Q = \tau\omega_0.$$

L'équation différentielle canonique de l'oscillateur amorti libre peut se mettre ainsi sous la forme

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

**Remarques**

- Q est sans unité.
- Le sens physique du coefficient de qualité Q est d'apprécier l'effet relatif de l'amortissement sur le mouvement de l'oscillateur. Si $Q \rightarrow +\infty$, l'amortissement devient négligeable.
- Tout système physique évoluant selon l'équation différentielle précédente peut être traité comme un oscillateur libre amorti.
- Multiplions l'équation différentielle canonique par $m\dot{x}$,

$$\begin{aligned} m\dot{x}\ddot{x} + m\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}^2 + m\dot{x}\omega_0^2 x &= 0 \\ \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) &= -\frac{m\omega_0}{Q}\dot{x}^2 < 0 \\ \implies \frac{dE_m}{dt} &< 0. \end{aligned}$$

L'énergie mécanique de l'oscillateur diminue avec le temps. Ce qui est attendu à cause de la force dissipative.

7.3.1 Description du mouvement

L'équation canonique de l'oscillateur libre amorti est une équation différentielle de second ordre à coefficients constants dont l'équation caractéristique est donnée par

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0.$$

On pose $2\alpha = \omega_0/Q$, l'équation caractéristique devient alors $r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0$ ce qui permet d'écrire le discriminant réduit comme suit

$$\Delta' = \alpha^2 - \omega_0^2.$$

La nature de la solution de l'équation différentielle, et par conséquent le régime du mouvement, dépend de Δ' que l'on réexprime sous la forme

$$\Delta' = \frac{\omega_0^2}{4Q^2} - \omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right).$$

Nous allons étudier le signe de Δ' , et donc définir le régime du mouvement, en utilisant Q comme paramètre.

Régime apériodique

Si $\Delta' > 0 \implies Q < 1/2$, l'équation caractéristique possède deux solutions réelles distinctes

$$r_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\Delta'} = -\frac{\omega_0}{2Q} \left[1 \mp \sqrt{1 - 4Q^2} \right].$$

L'équation du mouvement est ainsi donnée par

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \left(Ae^{\frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1-4Q^2} t} + Be^{-\frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1-4Q^2} t} \right).$$

A et B sont déterminés à partir des conditions initiales x_0 et v_0

$$\begin{cases} A + B = x_0 \\ Ar_1 + Br_2 = v_0 \end{cases} \implies \begin{cases} B = x_0 - A \\ A(r_1 - r_2) + x_0 r_2 = v_0 \end{cases} \implies \begin{cases} B = x_0 - A \\ A = \frac{v_0 - x_0 r_2}{r_1 - r_2} \end{cases}$$



Remarque

Notons bien que $Q < 1/2 \implies \sqrt{1 - 4Q^2} < 1 \implies 1 \mp \sqrt{1 - 4Q^2} > 0$ et par conséquent $r_{1,2} < 0$. Aussi lorsque $t \rightarrow +\infty$, $x(t) \rightarrow 0$. $x(t)$ a tendance à décroître plus rapidement vers 0 pour des grandes valeurs de Q .

La figure 7.1 illustre l'évolution de $x(t)$ en fonction du temps pour quelques valeurs de Q .

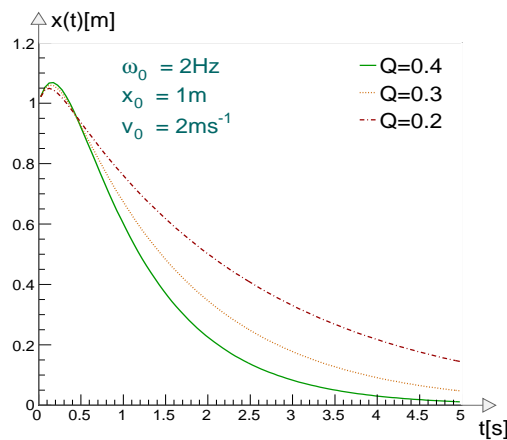


FIGURE 7.1 – Evolution temporelle de x en régime apériodique pour différentes valeurs de Q .

Régime critique

Dans le cas où $\Delta' = 0$, ce qui correspond à $Q = \frac{1}{2}$, l'équation caractéristique a une racine réelle double

$$r_{1,2} = -\omega_0$$

et la solution générale de l'équation différentielle est

$$x(t) = (A + Bt) e^{-\omega_0 t}.$$

A et B sont déterminés à partir des conditions initiales comme suit

$$\begin{cases} x_0 = A \\ v_0 = B - \omega_0 A \end{cases} \implies \begin{cases} A = x_0 \\ B = v_0 + \omega_0 x_0. \end{cases}$$

La figure 7.2 montre l'évolution temporelle de x .

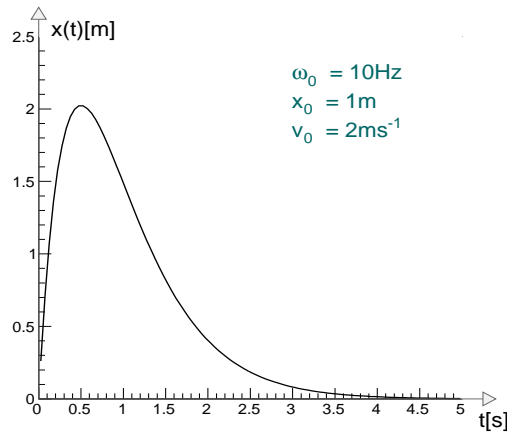


FIGURE 7.2 – Evolution de $x(t)$ en régime critique.

Régime pseudo-périodique

Le régime pseudo-périodique a lieu lorsque $\Delta' < 0 \implies Q > 1/2$. On peut écrire ainsi

$$\begin{aligned} \Delta' &= \omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right) = -\omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right) \\ &= -i^2 \Omega^2 \end{aligned}$$

où $\Omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right) > 0$. L'équation caractéristique a deux racines complexes distinctes

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\Omega.$$

La solution générale de l'équation différentielle dans ce cas se met sous la forme

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \\ &= e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \left(Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t} \right) = Ae^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \cos(\Omega t + \varphi) \end{aligned}$$

A et φ sont déterminés à partir des conditions initiales. On pose $X_m = Ae^{-\frac{\omega_0}{2Q} t}$.



C'est un mouvement sinusoïdal dont l'amplitude varie avec le temps et tend vers 0 lorsque t devient grand. C'est pour cette raison que le régime est dit pseudo-périodique. La pseudo-période des oscillations est égale à

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \\ &= \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \end{aligned}$$

T_0 étant la période propre de l'oscillateur.

Les constantes d'intégration de la solution A et φ sont déterminées comme suit

$$\begin{cases} x_0 = A \cos \varphi \\ v_0 = -\Omega A \sin \varphi \end{cases} \implies \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\Omega^2}} \\ \tan \varphi = -\frac{v_0}{\Omega x_0} \end{cases}$$

La figure 7.3 montre l'évolution temporelle de $x(t)$ dans le cas du régime pseudo-périodique.

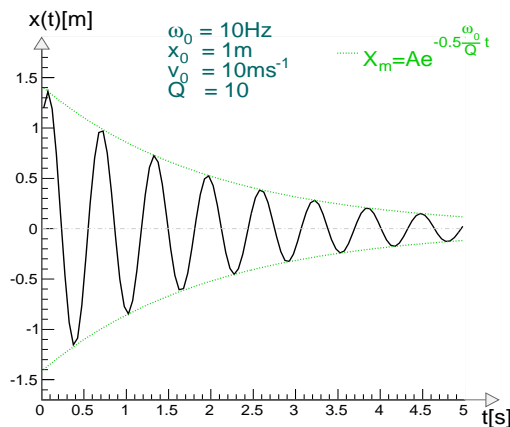


FIGURE 7.3 – Evolution de $x(t)$ en régime pseudo-périodique.

Décrement logarithmique

**Définition**

Le décrement logarithmique δ est défini par

$$\delta = \frac{\omega_0 T}{2Q} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

L'expression du décrement logarithmique peut être obtenue d'une autre manière. En effet, calculons le rapport entre $x(t)$ et $x(t + nT)$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{x(t)}{x(t + nT)} &= \frac{Ae^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\Omega t + \varphi)}{Ae^{-\frac{\omega_0}{2Q}(t+nT)} \cos(\Omega(t + nT) + \varphi)} \\ &= \frac{x(t)}{e^{-\frac{\omega_0}{2Q}nT} x(t)} = e^{\frac{\omega_0}{2Q}nT} \implies \frac{\omega_0}{2Q}nT = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t + nT)}\right). \end{aligned}$$



Le décrement logarithmique peut se calculer graphiquement à partir du rapport entre les valeurs de $x(t)$ des deux pics successifs des oscillations

$$\delta = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t + T)}\right).$$

Table des matières

1	Rappels et compléments mathématiques	3
1.1	Introduction	3
1.2	Notions de vecteurs	4
1.3	Systèmes de coordonnées	8
1.3.1	système des coordonnées cartésiennes	8
1.3.2	Système des coordonnées cylindriques	9
1.3.3	système des coordonnées sphériques	12
1.4	Différentielle et dérivée d'un vecteur	16
1.4.1	Différentielle d'un vecteur unitaire	16
2	Cinématique du point matériel	19
2.1	Introduction	19
2.2	Vitesse	20
2.2.1	Coordonnées cartésiennes	20
2.2.2	Coordonnées cylindriques	21
2.2.3	Coordonnées sphériques	22
2.2.4	Coordonnées curvilignes	22
2.3	Accélération	24
2.3.1	Coordonnées cartésiennes	24
2.3.2	Coordonnées cylindriques	24
2.3.3	Coordonnées sphériques	25
2.3.4	Coordonnées curvilignes	26
2.4	Changement de référentiel	27
2.4.1	Composition des vitesses	28
2.4.2	Composition des accélérations	29

3	Dynamique du point matériel	35
3.1	Introduction	35
3.2	Masse et forces	35
3.2.1	Masse	35
3.2.2	Forces	36
3.3	Quantité de mouvement	39
3.4	Principe fondamental de la dynamique : PFD	40
3.5	Principe de l'action et de la réaction	40
3.6	Les lois de Newton	41
3.6.1	Première loi de Newton : Principe d'inertie	41
3.6.2	Deuxième loi de Newton	42
3.6.3	Troisième loi de Newton	42
3.7	Référentiels Galiléens	43
3.8	Référentiels non galiléens	43
3.8.1	Expression du PFD	44
3.9	Equilibre d'un point matériel dans un référentiel \mathcal{R}	45
3.10	Application du PFD	46
4	Théorèmes généraux de la dynamique du point matériel	49
4.1	Introduction	49
4.2	Moments et théorème du moment cinétique	49
4.2.1	Moment d'une force par rapport à un point O	49
4.2.2	Moment d'une force par rapport à un axe (Δ)	50
4.2.3	Moment cinétique	50
4.2.4	Moment cinétique par rapport à un axe Δ	51
4.3	Théorème du moment cinétique	51
4.3.1	Cas d'un référentiel galiléen	51
4.3.2	Cas d'un référentiel non galiléen	53
4.3.3	Exemple d'application du théorème du moment cinétique	53
4.4	Travail et Puissance d'une Force. Théorème de l'énergie cinétique	55
4.4.1	Travail d'une force	55
4.4.2	Quelques exemples	56
4.4.3	Puissance	57
4.4.4	Energie cinétique	58
4.4.5	Théorème de l'énergie cinétique	58
4.4.6	Forces conservatives	59
4.4.7	Forces non conservatives : forces dissipatives	60
4.4.8	Forces conservatives et énergie potentielle	61
4.4.9	Expression du travail dans le cas général	62
4.4.10	Energie mécanique	63
4.4.11	Théorème de l'énergie mécanique	63
4.4.12	Cas de forces conservatives : Conservation de l'énergie mécanique	64
4.4.13	Equilibre d'un point et conditions de stabilité	65

5	Système de deux points matériels	69
5.1	Introduction	69
5.2	Loi de conservation de la quantité de mouvement	70
5.3	Etude du choc dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R}	71
5.3.1	Choc élastique	72
5.3.2	Choc inélastique	75
5.4	Etude du choc dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}_G	77
5.4.1	Centre de masse	77
5.4.2	Référentiel du centre de masse \mathcal{R}_G	77
6	Mouvement à force centrale	83
6.1	Introduction	83
6.2	Définition	83
6.3	Champ Newtonien	84
6.3.1	Exemples	84
6.4	Force centrale et théorème du moment cinétique	85
6.4.1	Théorème du moment cinétique	85
6.5	Loi des aires	86
6.6	Equation du mouvement	87
6.6.1	PFD	87
6.6.2	Théorème de l'énergie mécanique	88
6.7	Equation de la trajectoire $\rho(\varphi)$: Formules de Binet	88
6.7.1	Expression de la vitesse	89
6.7.2	Expression de l'accélération	90
6.7.3	Equation du mouvement	90
6.8	Nature de la trajectoire	92
6.8.1	Mouvement circulaire : $e = 0$	93
6.8.2	Mouvement elliptique : $0 < e < 1$	94
6.8.3	Mouvement parabolique : $e = 1$	97
6.8.4	Mouvement hyperbolique : $e > 1$	98
6.9	Retour aux lois de Kepler	98
6.9.1	Première loi de Kepler : loi des orbites	99
6.9.2	Deuxième loi de Kepler : loi des aires	99
6.9.3	Troisième loi de Kepler : loi des périodes	100
6.10	Nature des orbites et conditions initiales	100
6.10.1	Relation entre β et φ	101
6.10.2	Conditions initiales et paramètres de la conique	101
6.11	Satellites terrestres	102
6.11.1	Lancement d'un satellite $\vec{V}_0 \perp \vec{\rho}_0$	103
7	Oscillateur harmonique	107
7.1	Introduction	107
7.2	Oscillateur harmonique à une seule dimension libre non amorti	108
7.2.1	Forme canonique de l'équation différentielle	108

TABLE DES MATIÈRES

7.2.2	Description du mouvement	108
7.2.3	Energies de l'oscillateur harmonique	109
7.3	Oscillateur à une dimension libre amorti	111
7.3.1	Description du mouvement	112

Table des figures

1.1	<i>Représentation d'un point M dans un repère $\mathcal{R}(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, figure à gauche, et celle d'un vecteur, figure à droite.</i>	4
1.2	<i>Coordonnées cartésiennes de M dans \mathcal{R}_0.</i>	9
1.3	<i>Coordonnées cylindriques de M dans \mathcal{R}_0.</i>	10
1.4	<i>Coordonnées sphériques de M dans \mathcal{R}_0.</i>	13
1.5	<i>Rotation d'un vecteur unitaire.</i>	17
2.1	<i>Coordonnées curvilignes</i>	23
3.1	<i>Force attractive entre deux charges électriques de même signes.</i>	37
3.2	<i>Figure de gauche : Force gravitationnelle s'exerçant entre deux masses m_1 et m_2. Figure de droite : Force de frottement solide.</i>	39
3.3	<i>Point matériel M en rotation uniforme autour de Oz.</i>	48
4.1	<i>Pendule simple.</i>	53
4.2	<i>Travail moteur : $0 < \alpha < \pi/2$, figure de gauche, et travail resistif : $\pi/2 < \alpha < \pi$, figure de droite</i>	56
4.3	<i>Point matériel M soumis à une force de rappel. Le ressort est étiré, courbe de gauche, et comprimé, courbe de droite.</i>	57
4.4	<i>Exemples de positions d'équilibre : stable, instable et metastable.</i>	67
5.1	<i>Choc entre deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 ayant respectivement les vitesses initiales \vec{V}_1 et \vec{V}_2.</i>	70
5.2	<i>Choc direct entre deux points matériels M_1 et M_2.</i>	73
5.3	<i>Choc entre deux points matériels M_1 et M_2 où M_2 est immobile dans \mathcal{R}.</i>	74
5.4	<i>Choc totalement inélastique ou mou entre deux points matériels M_1 et M_2 où M_2 est immobile dans \mathcal{R}.</i>	76
5.5	<i>Choc dans \mathcal{R}_G entre deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 ayant respectivement les vitesses initiales \vec{v}_1 et \vec{v}_2.</i>	78

5.6	<i>Choc dans \mathcal{R}_G entre deux points matériels M_1 et M_2. M_2 est au repos dans \mathcal{R}..</i>	81
6.1	<i>Surface élémentaire engendrée par un déplacement élémentaire de M.</i>	86
6.2	<i>Décomposition de la vitesse en composantes radiale et orthoradiale.</i>	87
6.3	<i>Mouvement circulaire.</i>	94
6.4	<i>Mouvement elliptique.</i>	95
6.5	<i>Mouvement parabolique.</i>	97
6.6	<i>Mouvement hyperbolique.</i>	98
6.7	<i>les deux surfaces ont la même aire.</i>	99
6.8	<i>Cas général, l'axe de l'orbite ne coïncide pas avec l'axe polaire.</i>	101
6.9	<i>Variation de l'excentricité en fonction de $\xi = E_{0c}/E_{0p}$.</i>	104
6.10	<i>Orbites du satellite selon le rapport $\xi = \frac{E_{0c}}{E_{0p}}$.</i>	105
7.1	<i>Evolution temporelle de x en régime aperiodique pour différentes valeurs de Q.</i>	113
7.2	<i>Evolution de $x(t)$ en régime critique.</i>	114
7.3	<i>Evolution de $x(t)$ en régime pseudo-périodique.</i>	115