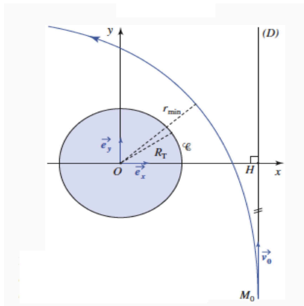
Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2015/2016

Module de Mécanique du Point Matériel
Corrigé de la série N° 4
Filières SMA

Exercice 1 : Distance minimale d'approche d'un météore

Un météore de masse m, négligeable devant la masse de la Terre m_T, arrive de l'infini avec la vitesse $\vec{v}_0$ par rapport au centre de la Terre. Son paramètre d'impact [a] $OH = b$, voir figure ci-contre. On cherche à calculer la distance minimale d'approche du météore de la Terre.
On travaille dans le référentiel géocentrique, que l'on considère galiléen.



a. Distance séparant la direction du comète de celle qui lui est parrallèle et passe par le centre de la Terre, notée b.

1. Soit $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ la base polaire. Alors la force gravitationnelle à laquelle est soumis le météore est donnée par

$$\vec{F} = -\frac{Gmm_T}{r^2}\vec{e}_r.$$

Aussi,

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = -r\vec{e}_r \wedge \frac{Gmm_T}{r^2}\vec{e}_r = \vec{0} \Longrightarrow \vec{\sigma}_O \text{ est constant.}$$

La force gravitationnelle dérivé du potentiel E_p comme suit

$$dE_p = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{Gmm_T}{r^2} \Longrightarrow E_p = -\frac{Gmm_T}{r} + K$$

comme $\lim_{r\to\infty} E_p(r) = 0 \Longrightarrow K = 0$. Ainsi $\vec{F}$ est conservative et donc l'énergie mécanique est conservée.
Au point M_0, voir figure, $\vec{\sigma}_0 = \overrightarrow{OM}_0 \wedge m\vec{v}_0 = m\left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}\right) \wedge \vec{v}_0 = mv_0 b\vec{k}$. Quant à l'énergie mécanique $E_{m0} = \frac{1}{2}mv_0^2$.

2. On rappelle que les paramètres de la conique sont donnés dans ce cas par

$$p = \frac{\sigma_0^2}{Gm_T m^2} \quad \text{et} \quad e = \sqrt{1 + \frac{\sigma_0^2}{G^2 m_T^2 m^2}v_0^2} > 1$$

et donc la trajectoire est une branche d'hyperbole dont la Terre occupe l'un des foyers et le sommet correspond à la distance minimale d'approche du météore.

3. Au point $r = r_{min}$, ce qui correspond au sommet de l'hyperbole, la vitesse $\vec{v}$ est orthoradiale et donc $\vec{v}_{min} = r_{min}\dot{\theta}\vec{e}_\theta = (\sigma_0/mr_{min})\vec{e}_\theta = (bv_0/r_{min})\vec{e}_\theta$. l'énergie mécanique est ainsi égale à

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\frac{mb^2v_0^2}{r_{min}^2} - \frac{Gmm_T}{r_{min}}.$$

Comme l'énergie mécanique est conservée, alors

$$\begin{aligned} E_m &= E_{m0} \\ \Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{mb^2v_0^2}{r_{min}^2} - \frac{Gmm_T}{r_{min}} &= \frac{1}{2}mv_0^2 \\ \Longrightarrow r_{min}^2 + 2\frac{Gm_T}{v_0^2}r_{min} - b^2 &= 0 \end{aligned}$$

dont le descriminiant réduir $\Delta' = G^2m_T^2/v_0^4 + b^2 > 0 \Longrightarrow$deux solutions réelles mais comme $r_{min} \geq 0$, c'est un module, alors la solution est

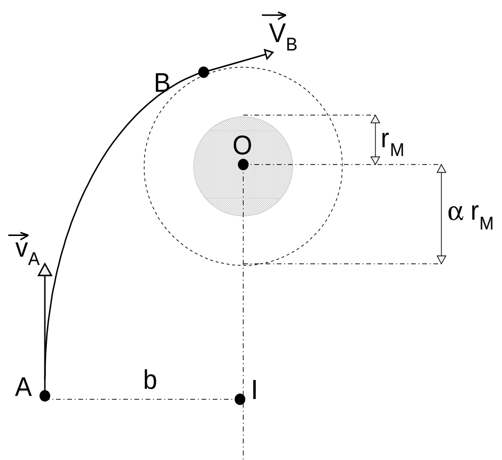
$$r_{min} = -\frac{Gm_T}{v_0^2} + \sqrt{\frac{G^2m_T^2}{v_0^4} + b^2}.$$

4. Pour que le météore ne se crache pas sur la terre il suffit que $r_{min} > R_T$, alors le paramètre d'impact minimal correspondant est

$$\begin{aligned} -\frac{Gm_T}{v_0^2} + \sqrt{\frac{G^2m_T^2}{v_0^4} + b_{min}^2} &> R_T \\ \Longrightarrow b_{min} &> R_T\sqrt{1 + 2\frac{G^2m_T^2}{R_Tv_0^2}}. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2

On se propose d'étudier la mise en orbite autour de Mars d'une sonde S de masse m_S. La sonde est soumise à l'effet de l'attraction gravitationnelle de Mars. Le référentiel lié à Mars peut être considéré comme un référentiel galiléen. La vitesse de la sonde au point de lancement A est $\vec{V}_A$ et présente un "paramètre d'impact" b, voir figure ci-après.



Les résultats des exercices précédents peuvent être utilisés sans démonstration.

1. L'effet de l'attraction gravitationnelle de Mars sur la sonde en A est négligeable alors l'énergie potentielle en ce point peut être considérée nulle. L'énergie mécanique est alors $E_m = \frac{1}{2}mV_A^2$. Comme l'énergie mécanique de la sonde est positive ce qui implique que $e > 1$, alors la trajectoire est une branche d'hyperbole dont le sommet est le point pour lequel la vitesse est orthoradiale (B) et le foyer est O.

2. La constante des aires C est calculée à partir du moment cinétique de S par rapport à O en A :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_O &= \overrightarrow{OA} \wedge m_S \vec{V}_A \\ &= \left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}\right) \wedge m_S \vec{V}_A \\ &= \overrightarrow{OI} \wedge m_S \vec{V}_A \Longrightarrow |\vec{\sigma}_O| = m_S b V_A \Longrightarrow C = \frac{|\vec{\sigma}_O|}{m_S} = bV_A.\end{aligned}$$

3. Le moment cinétique est conservé car la force est centrale. Ainsi le moment cinétique de la sonde S en B, sachant que $\vec{V}_B \perp \overrightarrow{OB}$, puisque la trajectoire de la sonde en B est tangente au cercle,

$$|\vec{\sigma}_O| = m_S \alpha r_M V_B = m_S C = m_S b V_A \Longrightarrow V_B = \frac{bV_A}{\alpha r_M}.$$

4. L'énergie mécanique en B est égale à

$$\begin{aligned}E_m(B) &= \frac{1}{2} m_S V_B^2 - \frac{G M_M m_S}{\alpha r_M} = E_m(A) = \frac{1}{2} m_S V_A^2 \\ \Longrightarrow \quad & V_B = \sqrt{V_A^2 + \frac{2GM_M}{\alpha r_M}} \\ \text{or} \quad & b = \frac{\alpha r_M}{V_A} V_B = \alpha r_M \sqrt{1 + \frac{2GM_M}{\alpha r_M V_A^2}}\end{aligned}$$

Pour que la sonde atterisse sur la surface de Mars, la valeur b_o du paramètre d'impact est celle qui correspond à $\alpha = 1$, ce qui donne

$$b_o = r_M \sqrt{1 + \frac{2GM_M}{\alpha r_M V_A^2}}.$$

5. La trajectoire est circulaire de rayon αr_M alors en appliquant le PFD, nous obtenons $GmM_M/(\alpha r_M)^2 = mV_{orb}^2/(\alpha r_M)$ ce qui donne

$$V_{orb} = \sqrt{\frac{GM_M}{\alpha r_M}}.$$

6. Pour faire passer la sonde sur l'orbite circulaire de rayon αr_M, la variation de vitesse à communiquer à la sonde est

$$\Delta V = V_{orb} - V_B = \sqrt{\frac{GM_M}{\alpha r_M}} - \frac{bV_A}{\alpha r_M}.$$