Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

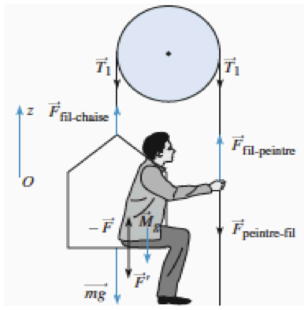
Année Universitaire 2015/2016

Module de Mécanique du Point Matériel
Corrigé de la série N° 3
Filières SMA

Corrigé 1 : Peintre de façade de batiment

Un peintre en bâtiment de masse $M = 90$Kg est assis sur une chaise, de masse $m = 15$kg, suspendue à une corde inextensible reliée à une poulie parfaite [a], voir figure ci-contre. Le peintre exerce une force de 680N sur la corde pour faire monter la chaise le long de la façade du batiment.

[a] Les tensions de la corde de part et d'autre de la poulie sont égales en module.



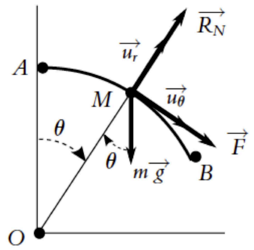
On considère le système (S) formé par le peintre et la chaise et que l'on peut considérer comme un point matériel de masse $M + m$. Le mouvement a lieu dans le plan Oxz et Oz est la verticale ascendante.
La figure illustre les différentes forces mises en jeu. Le repère lié à la surface de la terre peut être considéré comme galiléen, que l'on note $\mathcal{R}(O, xyz)$, muni de la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. La position de (S) est repérée par $\overrightarrow{OS} = z\vec{k} \longrightarrow \vec{\gamma}(S/\mathcal{R}) = \ddot{z}\vec{k}$. Les froces appliquées à $(S = Peintre + Chaise)$, sont $\vec{F}_{fil-chaise} + \vec{F}_{fil_peintre} + m\vec{g} + M\vec{g}$ et le PFD donne
$$\begin{aligned}(M+m)\vec{\gamma} &= (M+m)\ddot{z}\vec{k} = \vec{F}_{fil-chaise} + \vec{F}_{fil_peintre} + m\vec{g} + M\vec{g} \\ &= 2T_1 - (M+m)g \Longrightarrow \gamma = \frac{2T_1}{M+m} - g = \frac{680}{105} - 9.81 = 3.14ms^{-2}\end{aligned}$$
On constate que l'accélération est positive et donc le système monte bien.

2. Le peintre et la chaise sont animée de la même accélération égale à $\vec{\gamma}$. Notons par $\vec{F}$ la force exercée par le peintre sur la chaise. Appliquons le PFD à la chaise seule :
$$\begin{aligned}m\gamma\vec{k} &= -mg\vec{k} + T_1\vec{k} + \vec{F} \\ \Longrightarrow \vec{F} &= m\left(\gamma + g - T_1\right)\vec{k} \\ &= m\left(\frac{2T_1}{M+m} - T_1\right)\vec{k} = \frac{m-M}{m+M}T_1\vec{k} \Longrightarrow F = \frac{75}{105} \times 680 = -485N.\end{aligned}$$
Cette force se dirige bien vers le bas et donc bien exercée par le peintre sur la chaise.
C'est l'équivalent d'une masse de $485/9.81 = 49.4kg$.
3. Soit m_p la masse de la peinture que le peintre peut faire monter, alors l'accélération de la chaise devient
$$m\gamma\vec{k} = -(m+m_p)g\vec{k} + T_1\vec{k} - \frac{M-m}{m+M}T_1\vec{k}$$
La chaise peut monter si $\gamma > 0$ ce qui implique
$$m_p < \frac{1}{g}\frac{2m}{M+m}T_1 - m = 4.8kg$$

Exercice 2 : Décollage d'un véhicule

Une voiture assimilée à un point matériel M de masse $m = 1000\,kg$ commence une descente en A à la vitesse $v_A = 125\,km\,h^{-1}$, voir figure ci-contre. La forme de la descente de A à B est un arc de cercle de rayon $R = 130\,m$ et d'angle d'ouverture $\alpha = 15^o$.



On suppose que la force motrice de la voiture est constante et tangente à la route tout au long de la descente et de valeur algébrique $\overline{F}$. Elle est positive lors d'une accélération et négative dans le cas d'un freinage. On néglige les frottements sur la route.

1. Le vecteur position est donné par $\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r$, entre les points A et B, ce qui implique que

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) \;=\; R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

et l'accélération s'écrit comme suit

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) \;=\; -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

Avant de déterminer les équations du mouvement, nous établissons le bilan des forces appliquées, en négligeant les forces de frottement, à la voiture considérée comme un point matériel. Aussi, nous avons

— $\vec{F} = \overline{F}\vec{u}_\theta$: force motrice de la voiture constante et portée par $\vec{u}_\theta$ étant donné qu'elle est parallèle à la route ;

— $m\vec{g} = mg\,(-\cos\theta\vec{u}_r + \sin\theta\vec{u}_\theta)$: Poids de la voiture ;

— $\vec{R} = R_N\vec{u}_r$.

Le PFD, sachant que le référentiel utilisé peut être considéré galiléen, donne ainsi

$$\begin{aligned} -mR\dot{\theta}^2\vec{u}_r + mR\ddot{\theta}\vec{u}_\theta &= \vec{F} + m\vec{g} + R_N\vec{u}_r \\ &= (-mg\cos\theta + R_N)\vec{u}_r + (\overline{F} + mg\sin\theta)\vec{u}_\theta \end{aligned}$$

En projetant sur $\vec{u}_\theta$ et en multipliant par $\dot{\theta}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} mR\dot{\theta}\ddot{\theta} &= (\overline{F} + mg\sin\theta)\dot{\theta} \\ \Longrightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 &= \frac{1}{mR}\overline{F}\theta - \frac{g}{R}\cos\theta + Cst \end{aligned}$$

la constante est déterminée à partir des conditions initiales, $\theta = 0$ et $\|\vec{v}_A\| = v_A = R\dot{\theta}_0 \Longrightarrow \dot{\theta}_0 = v_A/R$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\dot{\theta}_0^2 &= -\frac{g}{R} + Cst = \frac{1}{2}\frac{v_A^2}{R^2} \\ \Longrightarrow Cst &= \frac{1}{2}\frac{v_A^2}{R^2} + \frac{g}{R}. \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \;=\; \frac{1}{mR}\overline{F}\theta + \frac{g}{R}(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}\frac{v_A^2}{R^2}.$$

2. L'expression de la composante normale de la réaction est donnée par

$$\begin{aligned} R_N &= mg\cos\theta - 2\overline{F}\theta - 2mg(1-\cos\theta) - m\frac{v_A^2}{R} \\ &= mg(3\cos\theta - 2) - 2\overline{F}\theta - m\frac{v_A^2}{R}. \end{aligned}$$

3. **a-** La voiture quitterait le sol s'il n'y a plus contact, c'est à dire que $R_N = 0$. Notons par θ_d cet angle. Nous avons donc

$$3\cos\theta_d - 2 - \frac{2}{mg}\overline{F}\theta_d - \frac{v_A^2}{gR}$$

b- Si le conducteur coupe le moteur, c'est à dire que $\overline{F} = 0$, ce qui implique que

$$\theta_d = \arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{v_A^2}{3R}\right) = 10.85°$$

$\theta_d < \alpha$ et donc la voiture quitte le sol si le conducteur coupe le moteur.

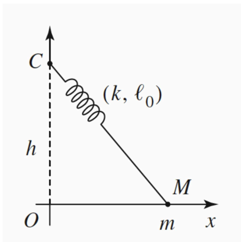
c- L'expression de $\overline{F}$ est donnée par

$$\overline{F} = \frac{1}{2\theta_d}\left[mg(3\cos\theta_d - 2) - m\frac{v_A^2}{R}\right].$$

Pour que la voiture ne quitte pas le sol, il suffit que $\theta_d = \alpha \Longrightarrow \overline{F} = -909N$. Il faut donc freiner !

Corrigé 3 : Un oscillateur anharmonique

On dispose d'un ressort élastique de raideur k, de longueur au repos l_0 et de masse négligeable. L'une des extrémités de ce ressort est reliée à un point C et l'autre à un anneau de masse m, coullisant sans frottement sur un axe Ox, voir figure ci-contre. La hauteur h au point C peut être réglée à volonté.



1. **a-** Si $l_0 < h$, alors le ressort est tendu quelque soit la position de M sur l'axe Ox. La résultante des forces est toujours dirigée vers O et donc M sera animé d'un mouvement d'oscillation autour de O. A chaque fois que la position de M est écartée de O, la résultante des forces tend à faire revenir M vers O. D'où la position O est une position d'équilibre stable.

b- Si $l_0 > h$, quand la position de M est en O, le ressort est comprimé. Si M est décalé de O la résultante des forces a tendance à l'éloigner et donc O est une position d'équilibre stable. Quand M s'éloigne de O de part et d'autre, M passe par un où le ressort est au repos donné par $x_\pm = \pm\sqrt{l^2 - d^2}$.

2. Les forces appliquées à M sont $\vec{P}$, le poids de M, et la réaction normale $\vec{R}_N$, absence de frottements, perpendiculaires au déplacement et donc ne travaillent pas. La seule force qui travaille est la force de rappel. Notons $\theta = (\widehat{\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CO}})$. Soit $\vec{u} = \sin\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{j}$. La position de M est $\overrightarrow{OM} = l\vec{u} - h\vec{j} \Longrightarrow d\overrightarrow{OM} = dl\vec{u}$ L'énergie potentielle est donnée par

$$\begin{aligned} dE_p &= -\vec{F}\cdot \\ &= k(l-l_0)\vec{u}\cdot dl\vec{u} \\ &= k(l-l_0)dl \Longrightarrow E_p = \frac{k}{2}(l-l_0)^2 + Cst(=0). \end{aligned}$$

En remplaçant l'expression précédente en fonction x, nous obtenons

$$E_p = \frac{k}{2}\left(\sqrt{x^2-h^2}-l_0\right)^2 = \frac{kl_0^2}{2}\left(\sqrt{\frac{x^2}{l_0^2}+\frac{h^2}{l_0^2}}-1\right)^2 = \frac{kl_0^2}{2}\left(\sqrt{X^2+u^2}-1\right)^2.$$

Etudions le comportement de $f(X) = \left(\sqrt{X^2+u^2}-1\right)^2$.
Calculons les expressions de $f'(X)$ et $f''(X)$:

$$f'(X) = \frac{2X}{\sqrt{X^2+u^2}}\left(\sqrt{X^2+u^2}-1\right).$$

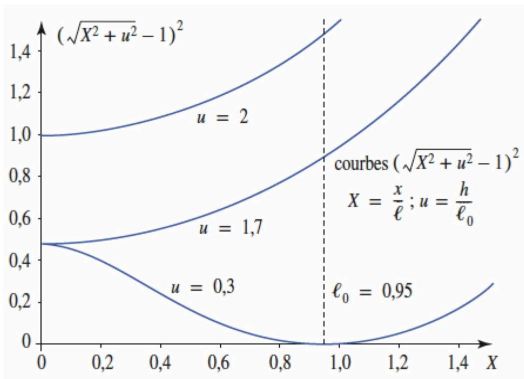
et

$$f''(X) = 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{X^2+u^2}}\right)+2X\left(\frac{X}{(X^2+u^2)^{3/2}}\right).$$

On voit bien que

$$f'(X)=0 \Longrightarrow \begin{cases} X = 0 \quad \forall u \\ X^2+u^2 = 1 \Longrightarrow X = \pm\sqrt{1-u^2} \text{ si } u \leq 1 \text{ et donc } h < l_0. \end{cases}$$

$u > 1 \Longrightarrow h > l_0$ **:**
un seul extremum $X = 0$ et comme $f''(X=0) = 2(1-1/u) > 0$ et donc c'est un minimum $\Longrightarrow$ Position d'équilibre stable.
$u \leq 1 \Longrightarrow h \leq l_0$ **:**
trois extremums $X = 0$ et $X = \pm\sqrt{1-u^2}$. Comme $f''(X=0) < 0$, donc $X = 0$ est un maximum et donc une position d'équilibre instable. Alors que $f''(X = \pm\sqrt{1-u^2}) > 0$ et donc sont des minimums. Alors ces deux dernières positions sont des positions d'équilibre stables.
La figure ci-après illustre le graphique de $f(X)$ pour quelques valeurs de u, et qui confirme ce que l'on vient de conclure :



Corrigé 4 : Interaction entre particules chargées

On considère deux particules A(fixe) et B(mobile) de charges respectives q_A et q_B. On rappelle que la force de Coulomb est $\vec{F}_{B/A} = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^3}$. On néglige les poids des deux particules devant la force de Coulomb. Comme la particule A est fixe on peut prendre sa position comme origine et noter $\overrightarrow{AB} = \vec{r}$. Soit $\vec{u}_r$ le vecteur unitaire portant $\vec{r}$.

1. Calculons l'énergie potentielle dont dérive $\vec{F}_{B/A}$

$$\begin{aligned} dE_p &= -\vec{F}_{B/A}\cdot d\overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{u}_r}{r^2}\cdot(dr\vec{u}_r + rd\vec{u}_r) \\ &= -\frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2} \Longrightarrow E_p = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} + Cst(=0). \end{aligned}$$

2. Les deux charges sont de même signe et donc la force est répulsive. Pour établir l'expression de la distance minimale d'approche, comme la seule force qui travaille dérive d'un potentiel, il suffit d'utiliser le théorème de l'énergie cinétique. Si l'on suppose que la distance initiale est d_0 et soit $\|\overrightarrow{AB}\| = d_{min}$ la distance minimale d'approche, à cette distance, l'énergie cinétique de B est nulle et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 &= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{d_{min}} - \frac{1}{d_0}\right) \\ \Longrightarrow d_{min} &= \left(\frac{1}{d_0} + \frac{2\pi\epsilon_0 m v_0^2}{q^2}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

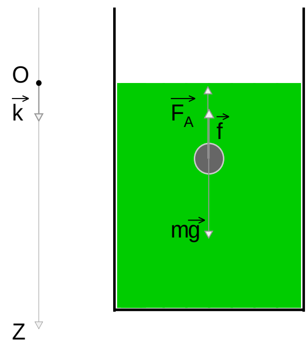
   On peut utiliser le théorème de l'énergie mécanique également.

3. Soit d_0 la distance entre les charges à l'instant initial. Comme les charges sont de signe opposé, la force est attractive. Pour que B s'échappe de A, il faut la lancer dans le sens croissant de r. Soit v_{min} la vitesse minimale à donner à B. Comme la force est attractive, la vitesse de B diminue au fur et à mesure que B s'éloigne jusqu'à ce qu'elle s'annulle. Pour que B s'échappe, la vitesse de B doit s'annuler à l'infini.
   On peut soit utiliser le théorème de l'énergie cinétique soit celui de l'énergie mécanique :

$$-\frac{1}{2}mv_{min}^2 = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{d_0} \Longrightarrow v_{min} = \sqrt{\frac{q^2}{2m\pi\epsilon_0 d_0}}.$$

Corrigé de l'exercice 5

Une bille sphérique de rayon a et de masse volumique ρ_B tombe dans un tube vertical contenant un liquide de masse volumique ρ_L, voir figure ci-après.



Soit $V_B = \frac{4\pi a^3}{3}$ le volume de la bille et $m = \rho_B V_B = \frac{4\pi\rho_B a^3}{3}$ sa masse.

(a) Comme indiqué dans la figure ci-dessus, les forces appliquées sont

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \vec{f} &=& -6a\pi\eta\vec{v} & \text{force de frottement visqueux;} \\ \vec{F}_A &=& -\rho_L V_B g\vec{k} & \text{poussée d'Archimède;} \\ \vec{P} &=& +mg\vec{k}. & \text{poids.} \end{array} \right.$$

(b) Pour établir l'équation différentielle, il suffit d'appliquer le PFD en considérant la bille comme un point matériel. Comme $\overrightarrow{OM} = z\vec{k} \Longrightarrow \gamma = \ddot{z}\vec{k}$, et le PFD donne

$$\begin{aligned} \vec{f} + \vec{F}_A + m\vec{g} &= m\ddot{z}\vec{k} \\ -6a\pi\eta\dot{z}\vec{k} - \rho_L V_B g\vec{k} + mg\vec{k} &= m\ddot{z}\vec{k} \end{aligned}$$

sachant que $v = \dot{z}$ et en projetant le PFD sur $\vec{k}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\ddot{z} + \frac{6a\pi\eta}{m}\dot{z} &= \left(1 - \frac{\rho_L V_B}{m}\right) g \\
\frac{dv}{dt} + \frac{9\eta}{2\rho_B a^2} v &= \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_B}\right) g \Longrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \kappa \text{ avec } \tau^{-1} = \frac{9\eta}{2\rho_B a^2} \text{ et } \kappa = \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_B}\right) g
\end{aligned}$$

Sachant que la dimension de $[\eta] = [kg][m^{-1}][s^{-1}]$, les dimensions de τ et de κ sont respectivement

$$[\tau] = \frac{[\rho_B][a^2]}{[\eta]} = \frac{\frac{[kg]}{[m^3]}[m^2]}{[kg][m^{-1}][s^{-1}]} = [s]$$

et

$$[\kappa] = [g] = [m][s^{-2}]$$

ainsi τ est identifié à un temps, appelée la constante du temps, et κ à une accélération.

(c) Résolvons l'équation précédente

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \kappa$$

c'est une équation du premier ordre à coefficient constant. La solution totale est la somme de la solution sans second membre v_{ssm} et d'une solution particulière v_p. Aussi,

$$\frac{dv_{ssm}}{dt} + \frac{v_{ssm}}{\tau} = 0 \Longrightarrow v_{ssm} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

et la solution particulière est $v_p = \kappa\tau$. Ce qui donne

$$v = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \kappa\tau$$

où A est détérminée à partir de la vitesse initiale $v(t = 0) = 0 \Longrightarrow A = -\kappa\tau$. La solution est alors

$$v(t) = \kappa\tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

On remarque que lorsque $t \to +\infty$, la vitesse tend vers une valeur limite v_l. On distingue ainsi deux régimes :

— le régime transitoire où la vitesse varie avec le temps et son expression est celle établie ci-dessus ;

— le régime permanent où la vitesse a atteint une valeur qui ne varie plus avec le temps et dont l'expression est calculée à la question suivante.

(d) La vitesse limite v_l, vitesse atteinte en régime permanent, est obtenue comme suit

$$v_l = \lim_{t\to+\infty} v(t) = \kappa\tau = \frac{2a^2}{9\eta}\left(\rho_B - \rho_L\right) g.$$

Application numérique

$a = 0.5\ 10^{-2}$mm$= 0.5\ 10^{-5}$m et $\rho_B = 2$g cm$^{-3} = 2\ 10^3$kg m^{-3}

$$v_l = \frac{2(0.5\ 10^{-5})^2}{9 \times 1.8\ 10^{-5}} \times 2\ 10^3 \times 9.81 = 0.61\text{cm s}^{-1}$$