Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2014/2015

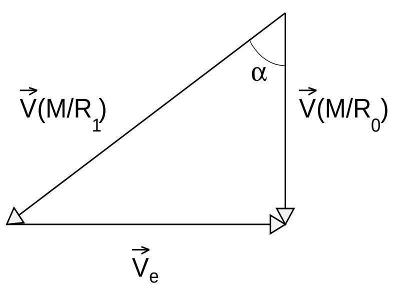
Module de Mécanique du Point Matériel
Eléments du Corrigé de la Série N° 2
Filières SMA/SMC/SMP

# Corrigé 1 : Flocons de neige

$\mathcal{R}_0$ : lié au sol $\Longrightarrow$ référentiel absolu ;
$\mathcal{R}_1$ : lié à la voiture $\Longrightarrow$ référentiel relatif dont $\|\vec{V}_e\| = 110$ km h $^{-1}$ ;
On note le flocon par $M$. Alors la loi de composition des vitesses, voir figure ci-contre, donne

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) + \vec{V}_e$$

avec $(\widehat{\vec{V}(M/\mathcal{R}_0), \vec{V}_e}) = \pi/2$ et $(\widehat{\vec{V}(M/\mathcal{R}_1), \vec{V}(M/\mathcal{R}_0)}) = \alpha = 80°$.




— Vitesse du flocon par rapport au sol $= \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\|$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\|\vec{V}_e\|}{\|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\|} \Longrightarrow \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\| = \frac{\|\vec{V}_e\|}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{110}{\mathrm{tg}\frac{80\times\pi}{180}} = 19.4 \text{ km h}^{-1}$$

— Vitesse du flocon par rapport à la voiture $= \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)\|$ :

**1ère approche :** on utilise la relation de Pythagore :

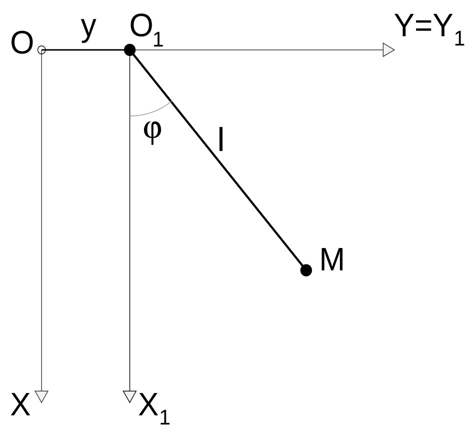
$$\begin{aligned} \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)\|^2 &= \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\|^2 + \|\vec{V}_e\|^2 \\ \Longrightarrow \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)\| &= \sqrt{\|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\|^2 + \|\vec{V}_e\|^2} \\ &= 111.7 \text{ km h}^{-1}. \end{aligned}$$

**$2^{\text{ème}}$ approche :**

$$\begin{aligned}
\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\cdot\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) &= \vec{V}(M/\mathcal{R}_1)\cdot\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)+\vec{V}_e\cdot\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\\
\Longrightarrow \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\|^2 &= \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)\|\|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\|\cos\alpha\\
\Longrightarrow \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)\| &= \frac{\|\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\|}{\cos\alpha}\\
&= 111.7 \text{ km h }^{-1}
\end{aligned}$$

## Corrigé 2 : Pendule en mouvement

On considère un point matériel $M$ suspendu à un fil inextensible de longueur $l$. Le point de suspension $O_1$ du pendule ainsi formé est en mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}(O, XYZ)$ le long de l'axe $OY$. La position de $O_1$ est repérée par $y$. Le mouvement de $M$ a lieu dans le plan $OXY$, voir figure ci-contre. Soit $\mathcal{R}_1(O_1, X_1Y_1Z_1)$ le référentiel d'origine $O_1$ et dont les axes restent constamment parallèles à ceux de $\mathcal{R}$.




**Les expressions finales des grandeurs vectorielles doivent être établies dans la base cartésienne $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ associée à $\mathcal{R}$.**

1. La vitesse de $M$ dans $\mathcal{R}_1$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O_1M} &= l\left(\cos\varphi\vec{i}+\sin\varphi\vec{j}\right)\\
\Longrightarrow \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) &= \left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_1M}\right|_{\mathcal{R}_1} = l\dot{\varphi}\left(-\sin\varphi\vec{i}+\cos\varphi\vec{j}\right)
\end{aligned}$$

   et celle de l'accélération de $M$ dans $\mathcal{R}_1$ s'exprime comme suit

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) &= \left.\frac{d}{dt}\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)\right|_{\mathcal{R}_1}\\
&= -l\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi+\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)\vec{i}+l\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi-\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)\vec{j}
\end{aligned}$$

2. $\mathcal{R}_1$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}$, d'où $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})=\vec{0}$ et la vitesse d'entrainement est donnée par

$$\vec{V}_e = \left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{OO_1}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{y}\vec{j}.$$

   L'accélération d'entrainement est

$$\vec{\gamma}_e = \left.\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OO_1}\right|_{\mathcal{R}} = \ddot{y}\vec{j}$$

et celle de Coriolis est nulle puisque $\mathcal{R}_1$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}$.

3. La vitesse de $M$ dans $\mathcal{R}$ est donnée par

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) \;=\; \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) + \vec{V}_e = -l\dot{\varphi}\sin\varphi\vec{i} + (l\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{y})\,\vec{j}.$$

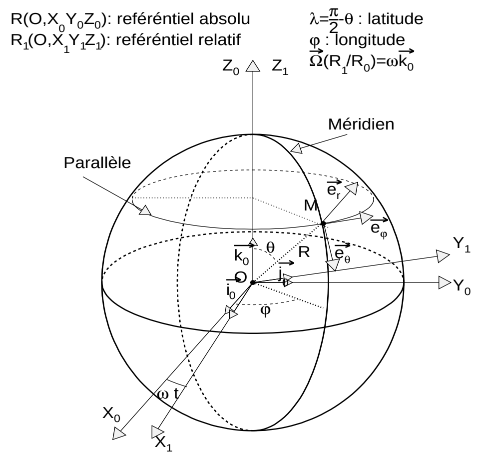
L'accélération de $M$ dans $\mathcal{R}$ est égale à

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= \left.\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OO_1}\right|_{\mathcal{R}} + \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1)\\ &= -l\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)\vec{i} + \left[\ddot{y} + l\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)\right]\vec{j}\end{aligned}$$

## Corrigé 3 : Attachez vos ceintures ...

On se propose dans cet exercice d'étudier le mouvement du vol d'un avion parcourant une ligne rejoignant deux villes se trouvant sur le même méridien On suppose que l'avion effectue le vol à une hauteur $h$ et à une longitude $\varphi_0$ et ce à une vitesse $v$ constante par rapport à la surface terrestre.
Soit $\mathcal{R}_0(OX_0Y_0Z_0)$ le repère géocentrique et $\mathcal{R}_1(OX_1Y_1Z_1)$ le repère lié à la terre. L'avion est considéré comme un point matériel, que l'on notera $M$, repéré dans $\mathcal{R}_1$ par les angles $\theta$ et $\varphi$, voir figure ci-contre. Soit $R$ le rayon du globe terrestre et $\omega$ sa vitesse angulaire de rotation.

**Exprimer tous les résultats dans la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.**




On pose $R_M = R + h$. Nous avons $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \omega\vec{k}$.

1. Nous avons $\overrightarrow{OM} = R_M\vec{e}_r$, sachant que $\varphi = \varphi_0$, alors

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_1) \;=\; \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} = R_M\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Longrightarrow \|\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)\|^2 = v^2 = R_M^2\dot{\theta}^2$$

comme $v$ est constante alors $\dot{\theta}$ est constante.

2.
$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_{\mathcal{R}_1} = -R_M\dot{\theta}^2\vec{e}_r.$$

3. Le vecteur rotation
$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \omega\vec{k}.$$

4. — $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ :

$$\begin{aligned}\vec{V}_e &= \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM} = \omega\vec{k} \wedge R_M\vec{e}_r \\ &= R_M\omega\sin\theta\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

ce qui implique
$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) + \vec{V}_e = R_M\left(\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \omega\sin\theta\vec{e}_\varphi\right).$$

— $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ :

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_c &= 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) \\ &= 2\omega\dot{\theta}R_M\vec{k} \wedge \vec{e}_\theta = 2\omega\dot{\theta}\cos\theta R_M\vec{e}_\varphi.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_e &= \left.\frac{d\vec{O}mega(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}_1 + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \left(\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM}\right) \\ &= R_M\omega^2\vec{k} \wedge \left(\vec{k} \wedge \vec{e}_r\right) \\ &= R_M\omega^2\sin\theta\left(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta\right).\end{aligned}$$

On rappelle que $\vec{e}_\rho = \sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta$.
Ce qui donne
$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = R_M\left(\omega^2\sin^2\theta - \dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + R_M\omega^2\sin\theta\cos\theta\vec{e}_\theta + 2\omega\dot{\theta}\cos\theta R_M\vec{e}_\varphi$$

L'effet de l'accélération de Coriolis est qu'elle engendre une force d'inertie qui a tendance à dévier l'avion vers l'est.
Quant à l'effet de l'accélération d'entrainement, elle introduit une force d'inertie qui a tendance à éjecter l'avion vers l'espace dans le plan du parallèle.

5. Dans ce cas de figure, $\theta = \theta_0 = \frac{\pi}{2} - \lambda_0$. Ce qui donne

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/\mathcal{R}_1) &= R_M\sin\theta_0\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \text{ et } \dot{\varphi} \text{ est Const} \\ \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) &= -R_M\sin\theta_0\dot{\varphi}^2\left(\sin\theta_0\vec{e}_r + \cos\theta_0\vec{e}_\theta\right).\end{aligned}$$

La vitesse et l'accélération d'entrainement restent identiques.

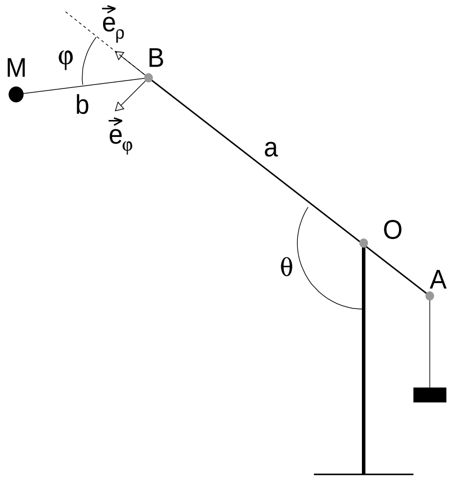
$$\vec{\gamma}_c = 2\omega\dot{\varphi}\sin\theta_0R_M\left(\sin\theta_0\vec{e}_r + \cos\theta_0\vec{e}_\theta\right).$$

Les différentes expressions permettent de déduire $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$.

# Corrigé 4 : Arme à l'ancienne

L'une des armes utilisée au Moyen-Âge pour envoyer des charges lourdes contre les murailles était ce que l'on appelle "un trébuchet" ou le catapulte. Il est composé d'une poutre $AB$ à laquelle est fixée un contrepoids en A. En $B$ est attachée une corde au bout de laquelle une poche contient le projectile $M$, voir figure ci-contre. Soit $\mathcal{R}(Oxyz)$ le repère lié au sol et $\mathcal{R}_B(Bx_1y_1z_1)$ le repère lié à la poutre. Le mouvement a lieu dans le plan $(Oxy)$. La base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ est liée à $\mathcal{R}_B$. On donne $OB = a$ et $BM = b$.

**Les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$.**




1. $\mathcal{R}_B$ est en rotation par rapport à $\mathcal{R}$ et $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_B/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\vec{k}$.

2.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BM} &= b\left(\cos\varphi\vec{e}_\rho + \sin\varphi\vec{e}_\varphi\right) \\
\Longrightarrow \vec{V}(M/\mathcal{R}_B) &= \left.\frac{d\overrightarrow{BM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_B} = b\dot{\varphi}\left(-\sin\varphi\vec{e}_\rho + \cos\varphi\vec{e}_\varphi\right).
\end{aligned}$$

3.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = (a + b\cos\varphi)\vec{e}_\rho + b\sin\varphi\vec{e}_\varphi.$$

La vitesse d'entrainement en $M$ de $\mathcal{R}_B$ par rapport à $\mathcal{R}$ est

$$\begin{aligned}
\vec{V}_e &= \left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_B/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{BM} \\
&= a\dot{\theta}\vec{e}_\varphi + b\dot{\theta}\left(-\sin\varphi\vec{e}_\rho + \cos\varphi\vec{e}_\varphi\right).
\end{aligned}$$

4. Le projectile est lâché lorsque $\theta = -\pi$ et $\varphi = 0$ ($AOBM$ vertical).

**a-**

$$
\begin{aligned}
\vec{V}(M/\mathcal{R})(\theta=-\pi,\varphi)=0) &= \vec{V}(M/\mathcal{R}_B)(\theta=-\pi,\varphi=0)+\vec{V}_e(\theta=-\pi,\varphi=0)\\
&= \left[b\left(\dot{\varphi}+\dot{\theta}\right)+a\dot{\theta}\right]\vec{e}_\varphi\\
\Longrightarrow \|\vec{V}(M/\mathcal{R})(\theta=-\pi,\varphi)\| &= b\left(\dot{\varphi}+\dot{\theta}\right)+a\dot{\theta}.
\end{aligned}
$$

5. S'il n'y avait qu'un seul bras rigide de longueur $a+b$, alors le mouvement de $M$ sera circulaire et de vitesse égale à $(a+b)\dot{\theta}$. Le fait qu'il y ait une articulation augment la vitesse de $b\dot{\varphi}$.