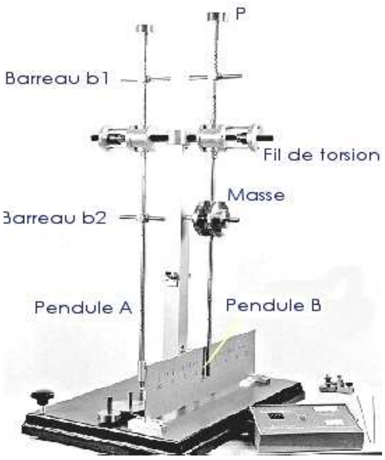
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Physique

Travaux Pratiques

Mécanique Analytique : Pendules Couplés

S5 - SMP



M. EL KACIMI

Septembre 2015

MANIPULATION 1

Pendules couplés

1.1 Introduction

Le système des deux pendules couplés, que l'on appelle aussi double oscilloscope pendulaire, est constitué de deux pendules A et B identiques, figure 1.1 oscillant dans des plans parrallèles et succeptibles d'être élastiquement relié par un fil de torsion. Ce dispositif permet de réaliser, sur les systèmes pendulaires, tout en un ensemble de manipulations qui intéressent nombre de domaines en physique. Nous nous intéresserons dans la première partie de cette manipulation à l'étude d'un pendule pesant, en déterminant son moment d'inertie, et à l'étude de la variation de sa période d'oscillations en fonction du moment d'inertie, d'une part, et du couple appliqué, d'autre part.

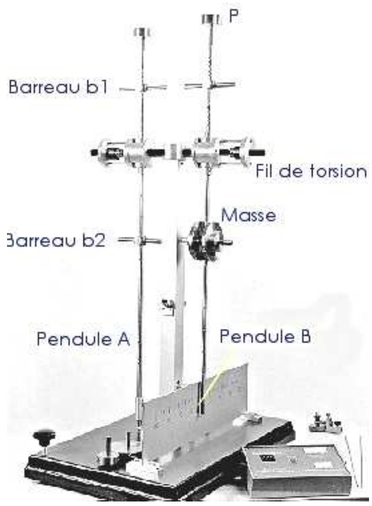


FIGURE 1.1 –

Nous mesurerons ensuite la constante de torsion du fil.
La deuxième partie de cette manipulation sera réservée à l'étude du phénomène de battement.

Le développement théorique de la description de la dynamique aussi bien d'un pendule pesant que celle des deux pendules couplés par le fil de torsion se fera à l'aide du formalisme de Lagrange.

1.2 Partie Théorique : A préparer et à rendre lors de la séance des TP

On étudie le mouvement du pendule A dans le référentiel du laboratoire considéré comme un repère galiléen. La rotation de A a lieu dans le plan vertical Oxy autour de Oz, que l'on notera Δ.

1.2.1 Pendule pesant

On considère le seul pendule A dont les barreaux b_1 et b_2 sont mis à égale distance a de l'axe de rotation Δ.

Equilibre indifférent

Pour réaliser l'équilibre indifférent, il suffit de maintenir le pendule à vide dans la position horizontale et jouer sur la masse P jusqu'à ce que celui-ci reste en équilibre. Notons par G_h le centre de gravité de la partie du pendule à vide située en haut de l'axe de rotation et par M_h sa masse, par G_b celui de la partie basse du pendule et par M_b sa masse. Le pendule à vide est en équilibre indifférent implique que les moments par rapport à Δ

$$\vec{\mathcal{M}}_\Delta(M_h\vec{g}) + \vec{\mathcal{M}}_\Delta(M_b\vec{g}) \quad = \quad 0.$$

Aussi, lorsque l'on accroche les masses m_1 et m_2, les moments par rapport à Δ non nuls lorsque le pendule est en mouvement sont ceux de $\vec{m}_1\vec{g}$ et de $m_2\vec{g}$.

Moment d'inertie

On accroche une masse m_1 au barreau b_1 et une masse m_2 au barreau b_2 du pendule A dont on a préalablement réalisé l'équilibre indifférent. On note par I_0 son moment d'inertie. Le théorème d'huyguens permer d'écrire

$$I \quad = \quad I_0 + m_1 a^2 + m_2 a^2 = I_0 + (m_1 + m_2)\, a^2$$

Equation du mouvement

Le système (Σ_1) formé par le pendule et les deux masses suspendues peut être considéré comme un solide en rotation autour de l'axe Δ. Le nombre de degrés de liberté est ainsi égal à 1. L'on note par θ_1 l'angle qui repère la rotation de (Σ_1), que l'on prend comme coordonnée généralisée.

Question 1

Calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de (Σ_1). En déduire l'expression de son lagrangien.

Question 2

Etablir les équations du mouvement et montrer que dans le cas de l'approximation des petites oscillations, la période est donnée par

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + (m_1 + m_2)a^2}{(m_2 - m_1)ga}}$$

Pendule de torsion

On place les mandrins à une distance l et on les serre sur un fil de torsion de diamètre d.On bloque le pendule B. Le pendule A est un pendule de torsion. Soit C la constante de torsion [1]. Rappelons que lorsque A oscille d'un angle θ_1, le fil développe un couple de torsion $\mathcal{M}_T = -C\theta_1$ et l'énergie potentielle associée est égale à $V_T = \frac{1}{2}C\theta_1^2$. On accroche deux masses égales $m_1 = m_2 = m$ respectivement aux barreaux b_1 et b_2.

Question 3

Réécrire les équations de Lagrange de (Σ_1) et établir l'équation du mouvement et montrer que la période d'oscillation est égale à

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + 2ma^2}{C}}$$

Phénomène des battements

C'est un cas particulier des systèmes couplés mais très important. Ce cas est réalisé en opérant de façon telle que les pendules A et B soient toujours identiques. On accroche une masse m sur chacun des barreaux b_2 des deux pendules. La constante de torsion du fil C est connue ainsi que le moment d'inertie propre identique aux deux pendules, I_0. Par symétrie, le mouvement du pendule B sera répéré par θ_2. On considère le système formé par $(\Sigma) = (A \bigcup B)$ dont l'énergie potentiel est $V(\theta_1, \theta_2) = mga(1 - \cos\theta_1) + mga(1 - \cos\theta_2) - \frac{1}{2}C\,(\theta_1 - \theta_2)^2$.

1. On note que la constante de torsion C varie en fonction de l et de d comme suit

$$C = \gamma\frac{d^4}{l}$$

où le coefficient γ est appelé le module de Young.

Question 4

Etablir l'expression de l'énergie cinétique de B et déduire le Lagrangien de (Σ), $L(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$.

Question 5

Etablir le système d'équations de mouvement de A et de B.

Question 6

Que deviennent ces équations dans le cadre de l'approximation des petites oscillations ? On pose $\theta_+ = \theta_1 + \theta_2$, $\theta_- = \theta_1 - \theta_2$, $\omega_+^2 = \frac{(m_2-m_1)ga}{I_0+(m_1+m_2)a^2}$ et $\omega_-^2 = \frac{(m_2-m_1)ga+2C}{I_0+(m_1+m_2)a^2}$.

i- Retrouver les équations en θ_+ et θ_- et leurs solutions. et montrer que

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= A_1\sin(\omega_+ t - \varphi_+) + A_2\sin(\omega_- t - \varphi_-)\\ \theta_2(t) &= A_1\sin(\omega_+ t - \varphi_+) - A_2\sin(\omega_- t - \varphi_-)\end{aligned}$$

ii- Montrer que si le pendule B est bloqué, le mouvement de A est sinusiodal.

iii- On prend $m_1 = 0$ et $m_2 = m$. Montrer que si $\theta_1(t=0) = 0$, $\dot{\theta}_1(t=0) = 0$, $\theta_2(t=0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}_2(t=0) = 0$, nous assistons à un mouvement de battements dont la période[2] est

$$T_{bat} = \frac{T_1}{\sqrt{1+K} - \sqrt{1-K}}$$

où T_1 désigne la période du pendule A lorsque B est bloqué et K est le coefficient de couplage défini par

$$K = \frac{C}{C + mga}.$$

Indication : Retrouver $\theta_+(t)$ et $\theta_-(t)$ avec ces conditions intiales et déduire $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$

2. La période de battement est le temps qui s'écoule entre deux arrêts successifs du pendule.

1.3 Partie pratique

1.3.1 But de la manipulation

La manipulation est divisée en deux parties. Dans la première, l'objectif est de

a- mesurer le moment d'inertie d'un pendule pesant ;

b- étudier l'effet du couple de rappel et du moment d'inertie sur la période d'oscillations.

c- mesurer la constante de torsion C.

La deuxième partie de cette manipulation consiste à étudier le phénomène des battements entre deux pendules identiques couplés par un fil de torsion et de comparer la période de battements mesurée à celle prévue théoriquement.

1.3.2 Equilibre indifférent

Placer les barreaux b_1 et b_2 à une distance a de l'axe de rotation et ce pour les deux pendules A et B. Maintenir le pendule A horizontalement et jouer sur la masselotte P jusqu'à ce que le pendule se met en équilibre indifférent. Refaire la même opération pour le pendule B.

1.3.3 Moment d'inertie propre I_0 d'un pendule pesant

Bloquer le pendule B. Accrocher une masse m au barreau b_2 du pendule A et mesurer $10T$ de ses oscillations. Remplir le tableau suivant

Masse m (Kg)	$10T$ (s)	Moment d'inertie $I_0 = \frac{T^2}{4\pi^2}mga - ma^2$	Erreur sur I_0 : σ_{I_0}
0.5			
1.0			
1.5			
2.0			

i- Rappeler l'expression de l'estimation de I_0 par la méthode du maximum de vraisemblance.

ii- A partir du tableau, calculer l'estimation de I_0 par la méthode du maximum de vraisemblance et de son erreur.

La valeur estimée de I_0 sera utilisée dans la suite de la manipulation.

1.3.4 Influence du moment d'inertie sur la période

Le pendule B est toujours bloqué. Accrocher une masse m_1 au barreau b_1 et une masse m_2 au barreau b_2. On choisit les valeurs des masses de manière à ce que $m_2 - m_1$ soit constant. Remplir le tableau suivant

Masse m_1 (Kg)	Masse m_2 (Kg)	$10T$ (s)	Moment d'inertie(Kgm^2) $I = I_0 + (m_1 + m_2)a^2$	$\frac{T^2}{I}$ (s^2(Kgm)$^{-12}$)
1.0	0.5			
1.5	1.0			
2.0	1.5			
2.5	2.0			

i- Pourquoi on choisit $m_2 - m_1$ constant ?

ii- Comment doit évoluer dans le tableau le rapport $\frac{T^2}{I}$? Commenter.

1.3.5 Influence du moment de rappel $(m_2 - m_1)ga$ sur la période

Le pendule B est toujours bloqué. Accrocher une masse m_1 au barreau b_1 et une masse m_2 au barreau b_2. On choisit les valeurs des masses de manière à ce que $m_2 + m_1$ soit constant. Remplir le tableau suivant

Masse m_1 (Kg)	Masse m_2 (Kg)	$10T$ (s)	Moment de rappel (SI) $(m_2 - m_1)\, ga$	$T^2\,(m_2 - m_1)\, ga$ (SI)
2.2	0.3			
2.0	0.5			
1.8	0.7			
1.6	0.9			

i- Pourquoi on choisit $m_2 + m_1$ constant ?

ii- Comment doit évoluer dans le tableau la quantité $T^2\,(m_2 - m_1)\, ga$? Commenter.

1.3.6 Pendule de torsion

Le pendule B est bloqué. On place les mandrins à la distance l_1 l'un de l'autre et on les serre très fortement sur le fil de torsion de diamètre d_1.

Détermination de la constante de torsion C du fil

Accrocher la même masse m sur les barreaux b_1 et b_2 du pendule A.[3] Faire osciller le pendule A et mesurer la période T. Remplir le tableau suivant :

3. $m_2 = m_1 = m$.

Masse m (Kg)	$10T$ (s)	Constante de torsion (SI) $C = \frac{T^2}{4\pi^2}(I_0 + 2ma^2)$	Erreur sur C σ_C
1.0			
1.5			
2.0			
2.5			

A partir du tableau, estimer par la méthode du maximum de vraisemblance la valeur de la constante de torsion du fil C et son erreur σ_C.

1.3.7 Phénomène de battements

On serre les deux mandrins à la distance l_1 l'un de l'autre. On opère toujours de manière que les deux pendules soient identiques. La constante de torsion du fil étant celle estimée auparavant.
On accroche une masse m sur les barreaux b_2 des deux pendules A et B. On bloque le pendule B, on fait osciller le pendule A et on mesure sa période T_1. On libère le pendule B et on réalise les conditions initiales donnant lieu au phénomène des battements : on lache le pendule B à un angle $\theta_2(t = 0) = \theta_0$ petit et ce sans vitesse initiale ; le pendule A étant dans sa position verticale, $\theta_1 = 0$. On mesure la période des battements T_{bat} qui sépare deux arrêts successifs du pendule A . Remplir le tableau suivant :

Masse m (Kg)	$10T_1$ (s)	Coef. de couplage	$\frac{T_1}{\sqrt{1+K}-\sqrt{1-K}}$ $K = C/(C/mga)$	Période de battements T_b(s)
1.0				
1.5				
2.0				
2.5				

Comparer la période de battements mesurée T_b à la valeur prévue théoriquement $\frac{T_1}{\sqrt{1+K}-\sqrt{1-K}}$.
Commenter.
Que devient T_b si

i- Si $C >> mga$?

ii- Si $C << mga$?

Conclure.

Annexe I : Erreurs et leurs propagations

Nous admettrons les résultats qui seront donnés dans ce paragraphe sans démonstration.

Erreur sur les longueurs

Si la longueur est mesurée avec une règle dont la plus petite graduation est $1mm$, alors l'erreur sur la mesure σ_l est donnée par

$$\sigma_l \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{12}} mm.$$

Erreur sur la mesure du temps

Un chronomètre sera utilisé pour relever les mesures de durée de temps demandées. On déclenche et on arrête aussitôt le chronomètre et soit δ_t le temps qui s'écoule aucours de cette opération. L'erreur sur la mesure d"un intervalle de temps est alors

$$\sigma_t \quad = \quad \frac{\delta_t}{\sqrt{12}}.$$

Propagation des erreurs

Supposons que l'on a effectué N mesures x_i indépendantes, chacune étant entachée d'une erreur σ_i. Soit G une grandeur que l'on calcule à partir de ces mesures telle que $G = f(x_1, \cdots, x_n)$, f étant dérivable. L'erreur sur G est donnée par

$$\sigma_G \quad = \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2}$$

Annexe II : Quelques méthodes d'estimation

Nous allons présenter dans cette annexe sans démonstration deux méthodes d'estimation : la méthode du maximum de vraisemblance et la méthode des moindres carrés dans le cas linéaire qui nous intéresse dans cette manipulation.

Méthode du maximum de vraisemblance

Supposons que l'on cherche à estimer une grandeur G en la mesurant N fois ; chacune des mesures x_i est entachée d'une erreur σ_i[4]. L'estimation de G par la méthode du maximum de vraisemblance est donnée par

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

et l'erreur σ_G sur G s'obtient comme suit

$$\sigma_G = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}}.$$

Remarques

Si tous les x_i sont entachés de la même erreur, c'est à dire $\sigma_i = \sigma \quad \forall i$, alors l'estimation de G n'est d'autre que la moyenne arithmétique

$$G = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

et l'erreur est donnée par

$$\sigma_G = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

4. Voir l'annexe sur la propagation des erreurs.

Exemple

Détermination du moment d'inertie propre I_0 du pendule :
On accroche une masse $m_2 = m$ au barreau b_2 du pendule A et on mesure sa période T. On en déduit la valeur de I_0. On répète la manipulation N fois en changeant les valeurs de m et on en déduit N valeurs de I_0. On cherche à estimer la valeur de I_0 en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance.
Nous partons de l'expression de la période

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + ma^2}{mga}} \Longrightarrow I_0 = \frac{T^2}{4\pi^2}mga - ma^2.$$

Rappelons que l'on mesure la période T avec l'erreur σ_T et que la valeur de a est mesurée avec l'erreur σ_a. Notons par $(T_i, i = 1, \cdots, N)$ les N mesures de la période effectuées pour N valeurs de m_i et $(I_{0i}, i = 1, \cdots, N)$ les N valeurs du moment d'inertie propre du pendule déduite pour chacune des mesures.
La première étape est d'établir l'expression de l'erreur sur I_{0i} à partir des erreurs sur a, σ_a, et sur T_i, σ_T. En appliquant l'équation de la propagation des erreurs on obtient :

$$\frac{\partial I_{0i}}{\partial T} = \frac{T_i}{2\pi^2}m_i ga \quad \text{et} \quad \frac{\partial I_{0i}}{\partial a} = \frac{T_i^2}{4\pi^2}m_i g - 2m_i a$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\sigma_{I_{0i}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial I_{0i}}{\partial T_i}\right)^2 \sigma_T^2 + \left(\frac{\partial I_0}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{T_i}{2\pi^2}m_i ga\right)^2 \sigma_T^2 + \left(\frac{T^2}{4\pi^2}m_i g - 2m_i a^2\right)^2 \sigma_a^2}.\end{aligned}$$

La valeur estimée de I_0 est

$$I_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{I_{0i}}{\sigma_{I_{0i}}^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{I_{0i}}^2}}$$

et l'erreur est donnée par

$$\sigma_{I_0} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{I_{0i}}^2}}}$$

Méthode des moindres carrés

Supposons que l'on mesure une grandeur Y qui dépend de manière linéaire d'une variable X, telle que $Y = aX + b$. Aussi on effectue N mesures Y_i, $i = 1, \cdots, N$, respectivement pour chaque valeur de X_i supposée connue avec précision. On suppose que les mesures Y_i ont la même erreur σ.[5]
On rappelle que

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \quad \text{et} \quad \overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i \\
\overline{XY} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i \quad \text{et} \quad V[X] = \overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{X_i^2}{N} - \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{X_i}{N}\right)^2 .
\end{aligned}$$

L'estimation de a et de b par la méthode des moindre carrés donne

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{V[X]} \begin{pmatrix} -\overline{X}\ \overline{Y} - \overline{XY} \\ \overline{X^2}\ \overline{Y} - \overline{X}\ \overline{XY} \end{pmatrix}$$

Exemple

On cherche à étudier la dépendance de la constante de torsion C en fonction de la longueur du fil l et de son diamètre d donnée par

$$C = \gamma \frac{d^4}{l}$$

où γ est le module de Young à déterminer. Le pendule A est couplé par le fil de torsion au pendule B, ce dernier étant bloqué. On prend un fil de diamètre d et on fait varier l et pour chaque valeur l_i, on mesure T_i et on en déduit C_i et σ_{C_i}. On repète l'opération N fois. On obtient en final N valeurs de $(C_i, i = 1, \cdots, N)$ respectivement pour d^4/l_i. On prend $\sigma_C = sup(\sigma_{C_1}, \cdots, \sigma_{C_N})$. En notant par $X_i = d^4/l_i$ et $Y_i = C_i$, alors $\gamma = a$ et en appliquant la méthode des moindres carrés, l'estimation de γ est donnée par

$$\gamma = \frac{1}{V[X]}\left(-\overline{X}\ \overline{Y} - \overline{XY}\right).$$

5. Si chaque Y_i est entachée d'une erreur σ_i alors on prend $\sigma = sup(\sigma_1, \cdots, \sigma_N)$.

Table des matières