

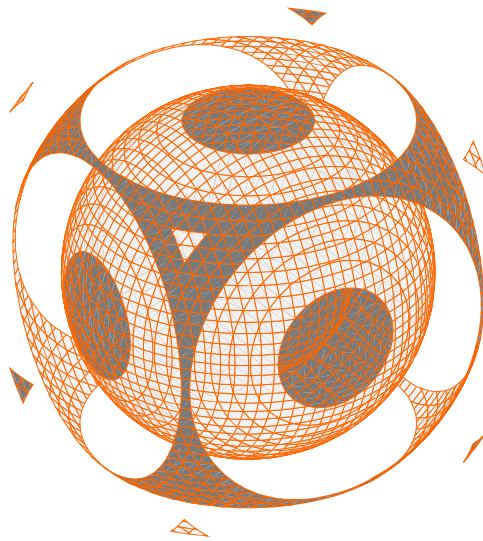
UNIVERSITÉ CADI AYYAD  
FACULTÉ DES SCIENCES SEMLALIA  
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE



---

## Exercices et Contrôles Corrigés de Mécanique Analytique et Vibrations

---



PR. M. EL KACIMI

Septembre 2015

---

### 1.1 Exercices

#### 1.1.1 Exercice

1. Rappeler ce qu'est un déplacement virtuel et qu'appelle-t-on par le travail virtuel en général? Que devient ce travail si le système est statique ou se déplace avec un mouvement uniforme?
2. Considérons une masse  $m$  placée en  $A$  et reliée par deux tiges rigides aux points  $O$  et  $B$ . Les barres de longueur  $OA = AB = l$  sont articulées en  $A$ . Le support de l'articulation  $O$  est fixe et le patin articulé en  $B$  peut glisser sans frottement le long de l'axe horizontal, figure 1.4. Les articulations sont supposées parfaites et les masses des tiges et du patin sont négligeables.

- (a) Quel est le nombre de degrés de liberté de ce système?
- (b) En appliquant le principe de d'Alembert, quelle force  $\vec{F}$  faut-il appliquer au patin pour que le système reste en équilibre?
- (c) Déterminer la valeur de la réaction en  $B$ .

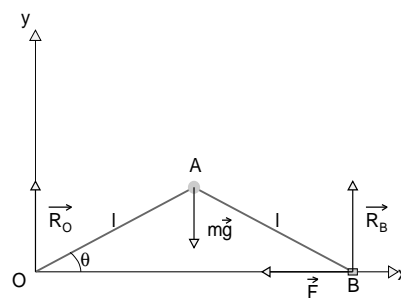


FIGURE 1.1 – Système de treillis.

#### 1.1.2 Exercice

On considère une sphère creuse ( $S$ ) de rayon  $a$  dans un repère galiléen  $\mathcal{R}(O, xyz)$ . Une bille supposée ponctuelle de masse  $m$  est astreinte à se déplacer sans frottement à l'intérieur de la sphère, figure 1.5

1. Quelles sont les contraintes sur le mouvement de  $m$ ? En déduire le nombre de degré de liberté de la bille.
2. Calculer les composantes des forces généralisées.
3. En déduire les équations du mouvement.
4. Calculer l'énergie cinétique de la bille, en déduire les équations de Lagrange et ensuite les équations du mouvement.
5. Etudier le cas où  $\theta$  et  $\dot{\phi}$  sont

constants.

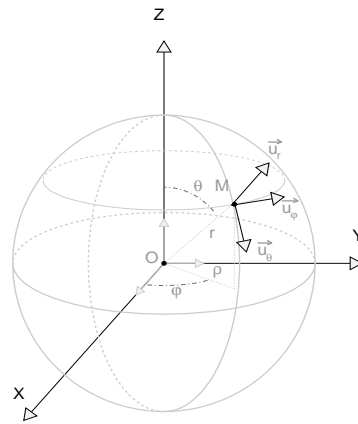


FIGURE 1.2 – Mouvement d'une bille à l'intérieur d'une sphère.

### 1.1.3 Exercice

On considère une perle de masse  $m$  qui peut coulisser parfaitement sur un cerceau de rayon  $R$ . Le cerceau est vertical et tourne autour de l'axe vertical avec la fréquence angulaire  $\Omega = \dot{\phi}$  fixe, figure 1.3.

1. Relever les contraintes sur le mouvement de la perle et montrer que la position de la perle est complètement décrite par la variable  $\theta$ .
2. Calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. En déduire le lagrangien de la perle.
3. Calculer le moment conjugué  $p$  de  $\theta$ . En déduire que l'expression du hamiltonien peut se mettre sous la forme

$$H(\theta, p) = \frac{p^2}{2mR^2} + \tilde{U}(\theta).$$

Interpréter les différents termes de  $H(\theta, p)$ .

4. Déterminer les extremums de  $\tilde{U}(\theta)$ . En déduire les positions d'équilibre

et discuter les en fonction de  $\Omega$ . Quelle sera la trajectoire de la perle si les conditions initiales sont  $\theta = 0$  et  $\dot{\theta} = 0$ .

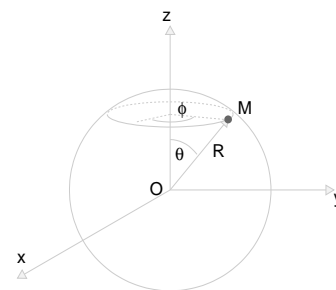


FIGURE 1.3 – Mouvement d'une perle sur un cerceau.

### 1.1.4 Exercice

Dans un espace à deux dimensions  $(x, z)$ , on considère un milieu matériel d'indice de réfraction  $n=n(z)$ . La distance parcourue  $ds$  est liée à l'indice de réfraction par  $ds = cdt/n$ , où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide. L'objectif est de chercher le chemin le minimum du chemin optique (Principe de Fermat).

1. Ecrire l'expression du chemin optique comme une intégrale sur le paramètre  $z$ . En utilisant le principe de moindre action, montrer qu'il existe une intégrale première. En déduire les lois de Snell-Descartes.
2. Ecrire le chemin optique comme une intégrale sur le paramètre  $x$ . En utilisant le principe de moindre action, montrer qu'il existe une intégrale première. En déduire les lois de Snell-Descartes.
3. Trouver la trajectoire lumineuse pour une variation linéaire de l'indice de réfraction  $n(z) = n_0 + \lambda z$ , sachant que les conditions initiales sont  $z(0) = 0$  et  $z'(0) = 0$ .

### 1.1.5 Exercice

Soit un pendule de longueur  $l$  avec une masse placée dans un champs de pesanteur  $g$  et astreint à se déplacer dans un plan  $(x, y)$  muni de la base mobile  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ . La position du point  $M$  est repérée par  $\overrightarrow{OM} = l\vec{u}_r$ .

1. Calculer le nombre de degrés de liberté. En déduire que l'on peut décrire le système par la coordonnée  $\theta$ .
2. Calculer la vitesse et déduire l'expression de l'énergie cinétique.
3. Calculer le travail effectué lors d'un déplacement virtuel  $\delta\vec{r} = l\delta\theta\vec{u}_\theta$ . En déduire l'expression de la composante de la force généralisée selon  $\theta$ .
4. En utilisant la relation entre l'accélération généralisée et la force généralisée selon  $\theta$ , déduire l'équation du mouvement en  $\theta$ .
5. Calculer l'expression du Lagrangien et déduire l'équation du mouvement en utilisant l'équation de Lagrange.

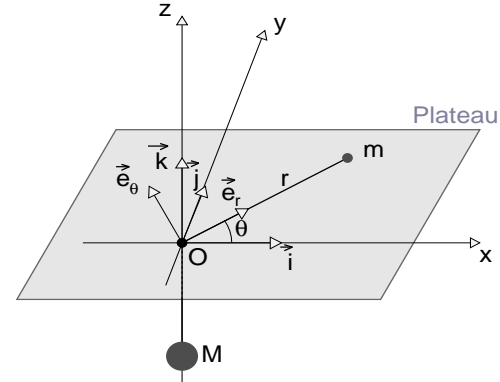
### 1.1.6 Exercice

Soit une masse  $m$  astreinte à se déplacer sur une tige indéformable faisant un angle  $\theta$  avec la verticale  $OZ$ , en rotation imposée avec un vecteur de rotation  $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_Z$ . La masse est attachée à un ressort de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$  et glisse sans frottement. Elle est par ailleurs soumise à son poids. Ce système est à un degré de liberté, on choisit la distance  $r = |\overrightarrow{OM}|$ . Le référentiel choisi est celui du laboratoire. Il est galiléen.

1. Calculer la vitesse et déduire l'énergie cinétique  $T$ .
2. Calculer la force généralisée associée à la coordonnée  $r$ .
3. En utilisant les équations de Lagrange, établir l'équation du mouvement.

1.1.7 Exercice

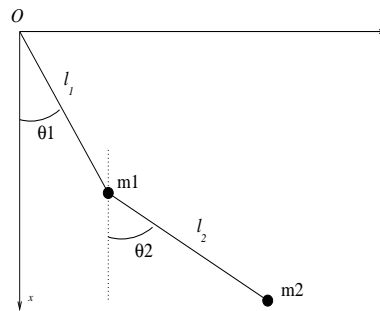
On considère deux billes de masses respectives  $m$  et  $M$  ( $m < M$ ), attachées entre elles par un fil inextensible de masse négligeable passant par un petit trou dans un plan horizontal. La petite bille est animée d'un mouvement de rotation sur le plan horizontal. La grande bille est suspendue au fil et chute sous l'effet de son poids. On note  $l$  la longueur totale du fil et  $r$  la longueur du segment horizontal. On note  $\theta$  l'angle que fait le segment horizontal avec un direction fixe quelconque du plan.



1. Calculer le lagrangien  $\mathcal{L} = T - V$  pour les coordonnées généralisées  $(r, \theta)$ .
2. Déterminer la coordonnée cyclique et reconnaître son moment conjugué. Pourquoi est-il conservé ?
3. En déduire l'équation différentielle du mouvement pour  $r$ .
4. On s'intéresse aux premiers instants de la chute. On pose  $r = l(1 - \epsilon)$  avec  $\epsilon \ll 1$ . déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $\epsilon$ . Montrer pour qu'une valeur de la vitesse angulaire initiale  $\dot{\theta}_0$ , la chaîne ne peut pas tomber. Dans le cas où la chaîne tombe, que devient la vitesse angulaire initiale  $\dot{\theta}$ .

1.1.8 Exercice

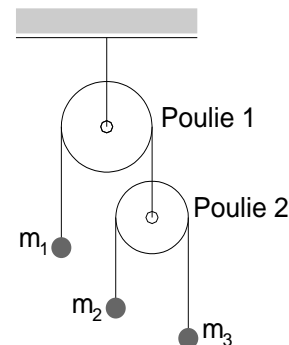
On utilise le formalisme de Lagrange pour étudier le système suivant : une masse ponctuelle  $m_1$  est reliée par un fil supposé sans masse de longueur  $l_1$  à un point fixe  $O$ . Une seconde masse  $m_2$  est reliée par un fil sans masse de longueur  $l_2$  à  $m_1$ . Les deux masses ne peuvent pas se mouvoir que dans le plan vertical.



1. Définir les liaisons, le nombre de degrés de liberté et les coordonnées généralisées.
2. Calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. En déduire l'expression du Lagrangien.
3. Trouver les équations du mouvement.

## 1.1.9 Exercice : Machine d'Atwood

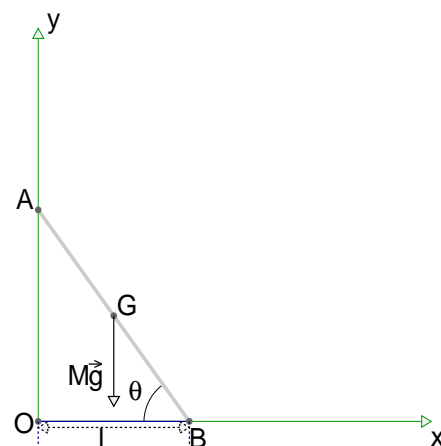
Le dispositif de la machine d'Atwood est décrit par la figure ci-contre. La masse  $m_1$  est reliée à la poulie 1 de masse  $M$  par l'intermédiaire d'une corde inextensible de longueur  $L$  et de masse négligeable. Quant à la masse  $m_2$ , elle est reliée à la masse  $m_3$  par le biais d'une corde inextensible de longueur  $L$  est de masse négligeable. Les poulies 1 et 2 ont des rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$ . La poulie 1 est accrochée par un fil inextensible de masse négligeable et de longueur  $l_0$ . Les fils glissent sur les poulies sans frottement et les moments d'inertie de ces dernières sont négligeables.



1. Dénombrer les forces appliquées au système des masses  $m_i, i = 1, 2, 3$  et  $M$  et relever les forces de liaison.
2. Etablir les expressions des contraintes et dire de quelle nature sont-elles. Justifier les réponses.
3. En déduire le nombre de degrés de liberté et préciser les coordonnées généralisées à utiliser.
4. En utilisant le formalisme de Newton, retrouver les équations du mouvement et déduire les expressions des accélérations de chacune des masses, d'une part, et des forces de liaison, d'autre part.

## 1.1.10 Exercice

Un artisan utilise une échelle de hauteur  $\|\vec{AB}\| = L$  et de masse  $M$  pour peindre un mur. Les extrémités de l'échelle s'appuient sur le mur et le sol, voir figure ci-contre. Le pied de l'échelle est attaché au point  $O$  du mur par l'intermédiaire d'une corde inextensible de longueur  $l$  et de masse négligeable de façon que l'échelle fasse un angle  $\theta$  et assure sa stabilité. Soit  $G$  le centre de gravité de l'échelle. Les frottements en  $A$  et en  $B$  sont nuls.



1. Dénombrer les forces appliquées à l'échelle en distinguant les forces de liaison.
2. Quel est le type de liaison en B? Justifier la réponse. Montrer que lorsque l'échelle se déploie, avant d'atteindre sa position d'équilibre stable, le nombre de degré de

liberté est égal à 1. On utilise dans la suite de l'exercice la coordonnée généralisée  $\theta$ .

- On se propose de calculer la tension du fil  $\vec{T}$ . On cherche à éliminer les réactions du mur sur l'échelle,  $\vec{R}_A$ , et du sol sur l'échelle,  $\vec{R}_B$ .

**3-a)** Quel déplacement virtuel doit-on effectuer ? Justifier le choix.

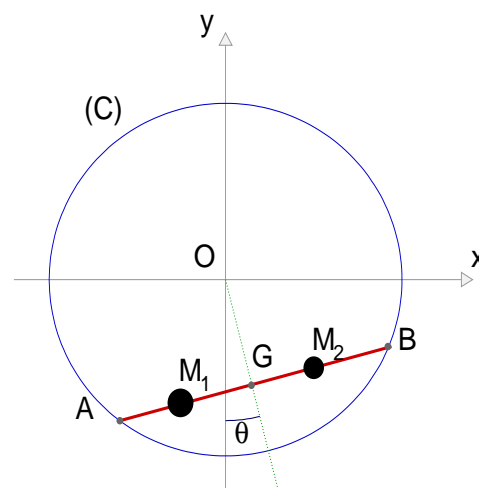
**3-b)** Exprimer la composante généralisée  $Q_\theta$  de la tension  $\vec{T}$ .

**3-c)** En utilisant le principe des travaux virtuels, montrer que

$$\|\vec{T}\| = \frac{1}{2}Mg\cot\theta.$$

### 1.1.11 Exercice

On considère un cerceau  $(C)$  de centre  $O$  et de rayon  $a$  faisant partie du plan vertical  $(Oxy)$ . Soit  $AB$  une barre de longueur  $l = a\sqrt{3}$  et dont les extrémités  $A$  et  $B$  glissent sans frottement sur  $(C)$ , voir figure ci-contre. La barre  $AB$  supporte, en plus de son poids, deux masses  $m_1$  et  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ ) assimilables à deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$  et situées respectivement aux milieux de  $AG$  et de  $GB$ ,  $G$  étant le centre de masse de la barre  $AB$ . On note par  $\theta$  l'angle que fait  $\vec{OG}$  avec la verticale. On considère le système  $(\Sigma)$  formé par la barre  $(AB)$  et les deux masses  $m_1$  et  $m_2$ .



- Etablir le bilan des forces en relevant les forces de liaison.
- Identifier les contraintes sur le système  $(\Sigma)$  et montrer que le nombre de degré de liberté est égal à 1. En déduire la coordonnée généralisée à utiliser.
- En choisissant un déplacement virtuel, ne faisant pas travailler les réactions aux points  $A$  et  $B$ , trouver l'angle  $\theta$  à l'équilibre en fonction de  $M$ ,  $m_1$  et  $m_2$ .
- On se propose de calculer le module de la réaction au point  $B$ . Quel déplacement virtuel doit-on adopter pour annuler le travail de la réaction au point  $A$ ? En déduire la valeur de la réaction en  $B$  en fonction de  $M$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $g$  et  $\theta$ .

### 1.1.12 Exercice

Considérons une fonctionnelle  $I[y]$ , c'est une fonction de l'espace des fonctions dérivables dans  $\mathbb{R}$ , qui à une fonction  $y(x)$  fait correspondre le nombre réel

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x) dx$$



où  $y' = \frac{dy}{dx}$  et  $x_1, x_2$  les bornes d'intégration fixées. On cherche la fonction  $y$  qui rend la fonctionnelle  $I[y]$  extrémale avec les contraintes  $y(x_1) = y_1$  et  $y(x_2) = y_2$ ,  $y_1$  et  $y_2$  donnés. Soit  $y(x)$  la solution à ce problème et l'on note la famille des fonctions  $z(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$  où  $\eta(x)$  est une fonction dérivable quelconque.

On définit

$$\tilde{I}(\alpha) = I[z(x, \alpha)] = \int_{x_1}^{x_2} F\left(z(x, \alpha), \frac{\partial z}{\partial x}(x, \alpha), x\right) dx.$$

1. Calculer  $\frac{d\tilde{I}}{d\alpha}$ .
2. Sachant que  $I[y]$  est extrémale si  $\frac{d\tilde{I}}{d\alpha}|_{\alpha=0} = 0$ , montrer que cela implique

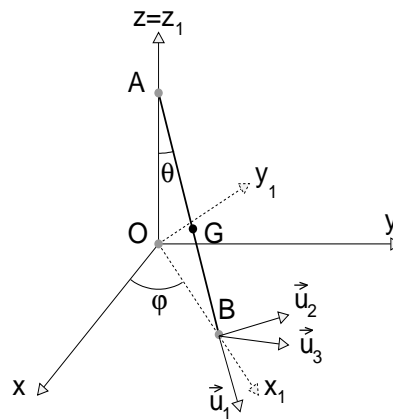
$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \right] = 0$$

ce que l'on appelle l'équation d'Euler.

3. Appliquons cette dernière pour revisiter le principe de Fermat. La fonctionnelle est le chemin optique  $L$  et  $y(x)$  est la trajectoire de la lumière. Le chemin optique est donné par  $L = \int n ds$  où  $n$  est l'indice de réfraction, que l'on suppose constant, et  $ds$  est un élément de distance dont l'expression est donnée par  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ . En utilisant l'équation d'Euler, montrer que la trajectoire de la lumière est une droite.

### 1.1.13 Exercice

Soit  $\mathcal{R}(Oxyz)$  un repère galiléen et soit  $AB$  une barre homogène pesante de masse  $m$  et de longueur  $2a$  et de section négligeable. L'extrémité  $A$  de la barre glisse sans frottement le long de  $Oz$  et l'extrémité  $B$  glisse sans frottement sur le plan  $Oxy$ . On désigne par  $\varphi$  l'angle que fait  $OB$  avec  $Ox$ ,  $\theta$  celui que fait  $AB$  avec  $AO$ . Soit  $\mathcal{R}_1(Ox_1y_1z_1)$  le repère relatif tel que  $Ox_1$  est porté par  $OB$ , voir figure ci-contre.

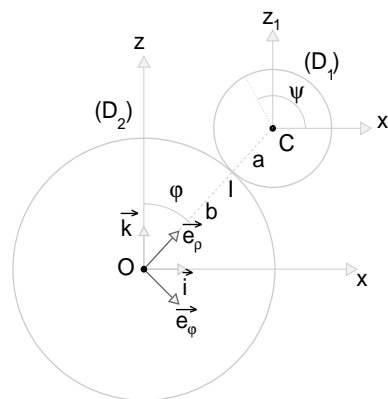


1. Faire le bilan des forces dans  $\mathcal{R}$ .
2. Relever les contraintes et déterminer le nombre de degrés de liberté.
3. Etablir l'expression de l'énergie cinétique de la barre.
4. Etablir les expressions des composantes des forces généralisées.

5. En déduire les équations du mouvement en utilisant les équations de Lagrange.
6. Retrouver les équations du mouvement et les expressions des réactions en utilisant les multiplicateurs de Lagrange.

### 1.1.14 Exercice

Un disque  $D_1$  de rayon  $a$  et de centre de masse  $C$  roule sans glisser sur un deuxième disque  $D_2$  de rayon  $b$ . A l'instant  $t = 0$ ,  $D_1$  est situé au sommet de  $D_2$ , figure ci-contre.  $(D_1)$  tourne avec une vitesse angulaire  $\psi$ . La position de  $(C)$  est repérée par l'angle  $\varphi$ . On se limite au cas où  $(D_1)$  reste en contact avec  $(D_2)$ . On utilise dans cet exercice la méthode des multiplicateurs de Lagrange.



1. Exprimer la condition de roulement sans glissement de  $(D_1)$  sur  $(D_2)$ .
2. Montrer que  $\varphi$  et  $\psi$  décrivent le mouvement de  $(D_1)$ .
3. Calculer l'énergie cinétique de  $(D_1)$  et son énergie potentielle.<sup>1</sup>
4. En déduire le lagrangien et écrire les équations de mouvement de  $(D_1)$ .
5. Etablir l'expression de la réaction tangentielle  $\vec{R}_T$  de  $(D_2)$  sur  $(D_1)$ .

### 1.1.15 Exercice

Une particule de masse  $m$  et de charge  $q$  se déplace dans une région où règne un champ électromagnétique ( $\vec{E} = -\vec{\nabla}(\varphi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ,  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ ), où  $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z; t)$  et  $\varphi = \varphi(x, y, z; t)$  sont respectivement le potentiel scalaire et le potentiel vecteur et  $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$  est l'opérateur nabla. La position de la particule est repérée par les coordonnées  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  et sa vitesse est donnée par  $\vec{v} = (v_1 = \dot{x}_1, v_2 = \dot{x}_2, v_3 = \dot{x}_3)$ . Les coordonnées généralisées et les vitesses généralisées coïncident avec les coordonnées et les composantes de la vitesse de la particule.

1. Calculer la dérivée totale par rapport au temps de  $\vec{A}$ ,  $\frac{d\vec{A}}{dt}$ .

---

1. Le moment d'inertie du disque par rapport à  $Oy$  est  $I = \frac{1}{2}mR^2$ .

2. Montrer que les composantes<sup>2</sup> de la force de Lorentz  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ , à laquelle la particule est soumise, peuvent se mettre sous la forme

$$F_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial V(x_i, \dot{x}_i, t)}{\partial v_i} - \frac{\partial V(x_i, \dot{x}_i, t)}{\partial x_i}$$

où  $V(x_i, \dot{x}_i, t) = q(\varphi(x_i, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(x_i, t))$ .

3. En déduire le lagrangien de la particule  $\mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i, t)$ . Ecrire les équations du mouvement de la particule.
4. Calculer les moments conjugués  $(p_x, p_y, p_z)$ .
5. En déduire le hamiltonien  $\mathcal{H}(x_i, p_{ix}, t)$  de la particule. Que représente-t-il? Commenter son expression.

### 1.1.16 Exercice

Considérons une particule qui se déplace dans le plan  $(OXY)$ . Sachant que l'énergie cinétique  $T = T(\dot{x}, \dot{y})$  et que  $\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = T - V$ , dire quelle est la loi de symétrie à laquelle obéit le lagrangien et quelle grandeur est conservée dans les cas suivants :

1.  $V(x, y, t) = ax$  ;
2.  $V(x, y) = at(x^2 + y^2)$  ;
3.  $V(x, y) = a(x - y)$ .

## 1.2 Corrigés des exercices

### 1.2.1 Corrigé

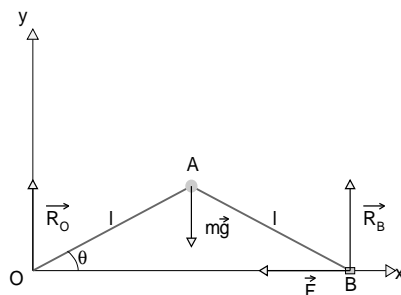


FIGURE 1.4 – Système de treillis.

1. Voir cours. Quand le système est statique ou il se déplace d'un mouvement uniforme, le travail de toutes les forces est nul, pas seulement des forces intérieures car la résultante des forces extérieures est nulle.

---

2.  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$

2. (a) La masse  $m$  se déplace dans un plan. Comme,  $OM = l$ , alors elle a un seul degré de liberté. Le mouvement de  $m$  peut être bien repéré par la variable  $\theta$ , qui sera utilisée comme coordonnée généralisée.

(b) On dénombre quatre forces : les réactions normales, puisqu'il n'y a pas de frottement, aux points  $O$  et  $B$   $\vec{R}_O$  et  $\vec{R}_B$ , le poids  $m\vec{g}$  et la force  $\vec{F}$  appliquée au point  $B$ .

Le principe de d'Alembert stipule que le travail des forces intérieures lors d'un déplacement virtuel est nul. Considérons le déplacement virtuel  $\delta\theta$  et calculons la force généralisée selon cette coordonnée :

$$Q_\theta = \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \theta}$$

où  $\vec{r}_i$  est le vecteur qui repère le point d'application de la force. Ce qui donne, en utilisant la base cartésienne

$$\begin{aligned} \vec{OA} &= l\cos\theta\vec{i} + l\sin\theta\vec{j} \\ \vec{OB} &= 2l\cos\theta\vec{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_\theta &= -mg\vec{j} \frac{\partial \vec{OA}}{\partial \theta} + \vec{F} \frac{\partial \vec{OB}}{\partial \theta} \\ &= mgl\cos\theta - 2lF\sin\theta \end{aligned}$$

$m\vec{g} = -mg\vec{j}$  et  $\vec{F} = -F\vec{i}$  et sachant que  $R_O$  et  $R_B$  ne travaillent pas le déplacement leur est perpendiculaire. Or le principe de d'Alembert donne

$$Q_\theta \delta\theta = 0 \implies F = \frac{mg}{2} \cot\theta$$

donc pour cette valeur, le système sera statique.

(c) Pour déterminer la valeur de la réaction en  $B$   $\vec{R}_B$ , il suffit de prendre comme déplacement virtuel du point  $B$  un cercle de rayon  $2l\cos\theta$  avec  $\theta$  constant. Ainsi,  $\vec{F}$  ne travaille pas, de même pour  $\vec{R}_O$ . Les deux forces qui travaillent sont le poids et  $\vec{R}_B$ . Dans cette configuration, les vecteurs  $(\vec{i}, \vec{j})$  deviennent mobiles. Soit  $\mathcal{R}_0$  le référentiel par rapport auquel on effectue cette rotation et soit  $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  la base orthonormée liée à  $\mathcal{R}_0$ . Repérons la rotation par l'angle  $\psi$  telle que  $\psi = \widehat{(\vec{i}, \vec{i}_0)} = \widehat{(\vec{j}, \vec{j}_0)}$ , ce qui donne  $d\vec{i}/d\psi = \vec{j}$  et  $d\vec{j}/d\psi = -\vec{i}$  et  $\dot{\psi} = \text{constante}$ .

Calculons la coordonnée généralisée associée à  $\psi$

$$\begin{aligned}
 Q_\psi &= \frac{\partial \overrightarrow{OA}}{\partial \psi} \cdot m\vec{g} + \frac{\partial \overrightarrow{OB}}{\partial \psi} \cdot (R_B \vec{j}) \\
 &= l(\cos\theta \vec{j} - \sin\theta \vec{i}) \cdot (-mg\vec{j}_0) + 2l\cos\theta \vec{j} \cdot (R_B \vec{j}) \\
 &= -mgl(\cos\theta \cos\psi - \sin\theta \sin\psi) + 2lR_B \cos\theta \\
 &= -mgl\cos(\theta - \psi) + 2lR_B \cos\theta.
 \end{aligned}$$

Or comme  $\ddot{\psi} = 0$ , cela implique que le module de la vitesse par rapport à  $\mathcal{R}_0$  de tous les points du treillis est constant et comme le mouvement est circulaire alors l'accélération par rapport à  $\mathcal{R}_0$  est centrale  $\vec{\gamma}_A = \frac{V_A^2}{l} \vec{n}_A$  et  $\vec{\gamma}_B = \frac{V_B^2}{2l\cos\theta} \vec{n}_B$  ce qui implique que l'accélération généralisée selon  $\psi$  est donnée par

$$A_\psi = \frac{\partial \overrightarrow{OA}}{\partial \psi} \cdot \vec{\gamma}_A + \frac{\partial \overrightarrow{OB}}{\partial \psi} \cdot \vec{\gamma}_B = 0$$

puisque  $\vec{n}_A = \overrightarrow{OA}/\|\overrightarrow{OA}\|$  et  $\vec{n}_B = \overrightarrow{OB}/\|\overrightarrow{OB}\|$ , d'une part, et  $\overrightarrow{OA} \perp \vec{n}_A$  et  $\overrightarrow{OB} \perp \vec{n}_B$ , d'autre part.

Le principe de d'Alembert  $Q_\psi \delta\psi = A_\psi \delta\psi = 0$  permet d'écrire

$$Q_\psi = 0 \implies R_B = \frac{mg\cos(\theta - \psi)}{2\cos\theta}$$

et cette relation est valable quelque soit la valeur de  $\psi$  et donc en particulier pour  $\psi = 0$  qui nous ramène à la situation du treillis statique

$$R_B = \frac{mg}{2}.$$

1.2.2 Corrigé

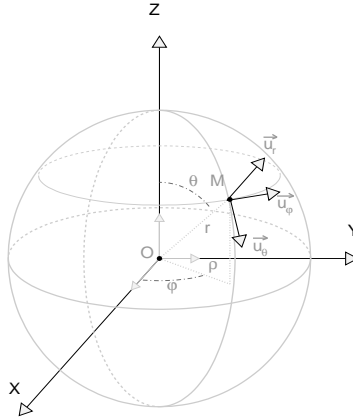


FIGURE 1.5 – Mouvement d’une bille à l’intérieur d’une sphère.

En raison de la symétrie sphérique du problème, nous allons utiliser les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ . Soit  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  la base sphérique. Rappelons que les vecteurs de la base sont en rotation dans le repère  $\mathcal{R}(O, xyz)$ , qui est galiléen, avec le vecteur de rotation  $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e}_\varphi + \dot{\varphi}\vec{k}$ ,  $\vec{k}$  étant le vecteur selon  $Oz$  de la base cartésienne. Rappelons aussi que

$$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_i$$

$\vec{e}_i$  étant l’un des vecteurs de la base sphérique.

1. La position de  $m$  est repérée dans le système de coordonnées sphériques par trois coordonnées,  $\overrightarrow{OM} = r$ . Comme,  $m$  doit se déplacer à l’intérieur de la sphère, alors le nombre de degré de liberté de  $m$  est 2. Ainsi seules  $\theta$  et  $\varphi$  décrivent complètement le mouvement de  $m$ .
2. La vitesse de  $m$  est

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d}{dt}(a\vec{e}_r) \\ &= a\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r \\ &= a(\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi) \end{aligned}$$

l’énergie cinétique est alors

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ma^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2).$$

Les forces qui sont appliquées à  $m$  sont son poids  $m\vec{g} = -mg\vec{k}$  et la réaction normale de la sphère  $\vec{N} = -N\vec{e}_r$ , puisqu'il n'y a pas de frottement.

Comme nous utilisons deux coordonnées généralisées que sont  $\theta$  et  $\varphi$ , nous avons

$$\begin{aligned} Q_\theta &= (-mg\vec{k}) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} + (-N\vec{e}_r) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} \\ &= -mg(a\vec{k} - N\vec{e}_r) \cdot \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} \\ &= -mg(a\vec{k} - N\vec{e}_r) \cdot (\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r) \\ &= -mg(a\vec{k} - N\vec{e}_r) \cdot \vec{e}_\theta \\ &= +mg\sin\theta \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= (-mg\vec{k}) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} + (-N\vec{e}_r) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} \\ &= -mg(a\vec{k} - N\vec{e}_r) \cdot \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} \\ &= -mg(a\vec{k} - N\vec{e}_r) \cdot (\vec{k} \wedge \vec{e}_r) \\ &= -mg\sin\theta(r\vec{k} - N\vec{e}_r) \cdot \vec{e}_\varphi \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. Calculons d'abord les différentes dérivées de l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \theta} &= ma^2 \sin\theta \cos\theta \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= ma^2 \dot{\theta} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ma^2 \ddot{\theta} \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= ma^2 \sin^2\theta \dot{\varphi} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ma^2 (\sin(2\theta)\dot{\theta}\dot{\varphi} + \sin^2\theta\ddot{\varphi}). \end{aligned}$$

Aussi les équations de Lagrange du système deviennent

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \end{cases} \implies \begin{cases} ma^2 \ddot{\theta} - \frac{1}{2}ma^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\theta = mg\sin\theta \\ \sin(2\theta)\dot{\theta}\dot{\varphi} + \sin^2\theta\ddot{\varphi} = 0 \end{cases} \implies \ddot{\varphi} + 2\cotg(\theta)\dot{\varphi} = 0 (\theta \neq \frac{\pi}{2})$$

4. Si  $\theta$  et  $\dot{\varphi} = \Omega$  sont constants, les équations du mouvement deviennent

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{a\cos\theta}$$

qui n'est valide que si  $\cos\theta > 0 \implies -\pi/2 < \theta < \pi/2$ , ce qui est le cas. Ainsi les équations du mouvement sont

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \sqrt{\frac{g}{a\cos\theta}} \\ \theta &= \text{constante.} \end{aligned}$$

### 1.2.3 Corrigé

Soit une perle de masse  $m$  qui coulisse sans frottement sur un cerceau de rayon  $R$ , figure 1.6.

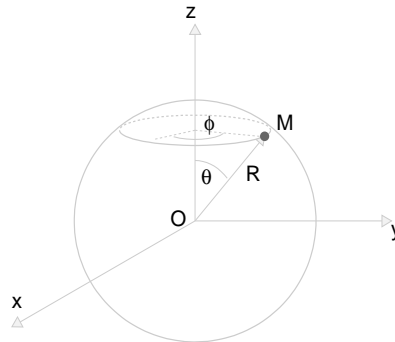


FIGURE 1.6 – Mouvement d'une perle sur un cerceau.

1. En raison de la symétrie sphérique du problème, nous utilisons les coordonnées sphériques pour décrire la position de la perle.

La perle se déplace sur le cerceau alors  $r = R$  et comme son mouvement dans le plan  $Oxy$  est circulaire de rayon  $R\sin\theta$  alors  $\rho = R\sin\theta$ ;  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Ainsi, les deux contraintes sur le mouvement de la perle réduisent le nombre de degrés de liberté à 1. On utilise donc  $\theta$  comme coordonnée généralisée du mouvement de la perle.

2. Calculons l'énergie cinétique,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r &\implies \vec{V} = R\frac{d\vec{e}_r}{dt} \\ &= R\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r \\ &= R(\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi) \wedge \vec{e}_r \\ &= R(\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\vec{e}_\theta) \end{aligned}$$

ce qui donne pour l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}mV^2 &= \frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) \\ &= \frac{1}{2}mR^2(\Omega^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) \end{aligned}$$

Calculons l'énergie potentielle. Pour ce faire calculons le travail des forces appliquées à la perle qui sont son poids  $m\vec{g} = -mg\vec{k}$  et  $\vec{R} = -R_N\vec{e}_r$ . La réaction



normale ne travaille pas puisque  $\delta W(\vec{R}_N) = -R_N \vec{e}_r \cdot d\vec{e}_r = 0$  puisque  $\vec{e}_r \perp d\vec{e}_r$ .  
Le déplacement élémentaire est

$$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{dM} = R d\vec{e}_r = R dt \Omega \wedge \vec{e}_r = R (d\varphi \vec{k} + d\theta \vec{e}_\varphi) \wedge \vec{e}_r = R d\varphi \sin\theta \vec{e}_\varphi + R d\theta \vec{e}_\theta$$

ce qui donne pour le travail élémentaire du poids

$$\begin{aligned} \delta W(-m\vec{g}) &= -mg R d\theta \vec{k} \cdot \vec{e}_\theta = -mg R \sin(\theta) d\theta \\ \implies dV &= -\delta W(-m\vec{g}) = mg R \sin(\theta) d\theta \implies V = -mg R \cos\theta + \text{constante} \end{aligned}$$

Rappelons que  $\vec{k} \cdot \vec{e}_\varphi = 0$  et on prend la constante du potentiel égale à 0 puisqu'elle n'a pas d'effet sur le mouvement de la perle.

Le lagrangien du système peut s'exprimer ainsi comme

$$L = T - V = \frac{1}{2} m R^2 (\Omega^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + mg R \cos\theta.$$

3. Calculons le moment conjugué  $p$  de la perle :

$$p = p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m R^2 \dot{\theta}.$$

On note que le moment conjugué n'est d'autre que le moment cinétique de la perle, ce qui est prévu étant donné que la coordonnée généralisée est un angle. On peut écrire  $p = I\dot{\theta}$  avec  $I = mR^2$  le moment d'inertie de la perle par rapport à  $Oz$ .

L'expression du Hamiltonien est

$$\begin{aligned} H &= p\dot{\theta} - L \\ &= I\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} I (\Omega^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) - mg R \cos\theta \\ &= \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} I \Omega^2 \sin^2\theta - mg R \cos\theta \\ &= \frac{p^2}{2I} - \frac{1}{2} I \Omega^2 \sin^2\theta - mg R \cos\theta \end{aligned}$$

où le terme  $\frac{p^2}{2I}$  peut être identifié à une énergie cinétique de rotation de la perle autour de  $\vec{e}_\varphi$ , ce qui nous permet d'interpréter le terme restant comme une énergie potentielle effective  $\tilde{U}(\theta)$ . Aussi

$$H = \frac{p^2}{2I} + \tilde{U}(\theta) \quad \text{avec} \quad \tilde{U}(\theta) = -\frac{1}{2} I \Omega^2 \sin^2\theta - mg R \cos\theta$$

4. Cherchons les extremums de  $\tilde{U}(\theta)$  :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{U}(\theta)}{d\theta} &= -I\Omega^2 \sin\theta \cos\theta + mg R \sin\theta \\ &= 0 \implies -\sin\theta (I\Omega^2 \cos\theta - mg R) = 0 \\ \implies &\begin{cases} \sin\theta_0 = 0 \implies \theta_0 = 0 & \text{puisque } \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \\ \cos\theta_1 = \frac{mg R}{I\Omega^2} = \frac{g}{R\Omega^2} \implies \theta_1 = \pm \arccos \frac{g}{R\Omega^2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Cette dernière équations n'a de solution que si

$$\frac{g}{R\Omega^2} \leq 1 \implies \Omega \geq \Omega_c = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

où  $\Omega_c$  est la pulsation de coupure à partir de laquelle on peut avoir un extremum de  $\tilde{U}(\theta)$  en dehors de celui de  $\theta = 0$ .

Trois approches s'offrent à nous pour étudier la stabilité de l'équilibre. Soit on étudie les mouvements autour des extremums et selon la nature de la solution on peut déduire si c'est un équilibre stable ou instable (mouvement sinusoïdal : stable sinon instable) ; ou bien calculer la dérivée seconde de  $\tilde{U}(\theta)$  par rapport à  $\theta$  et selon le signe on déduit si c'est un maximum de  $\tilde{U}(\theta)$  ou bien un minimum ; ou finalement étudier le signe de la dérivée ce qui donne le sens de variation de  $\tilde{U}(\theta)$  et par conséquent la nature des extremums. Calculons la dérivée seconde de  $\tilde{U}(\theta)$

$$\frac{d^2\tilde{U}(\theta)}{d\theta^2} = -I\Omega^2\cos(2\theta) + mgR\cos\theta$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2\tilde{U}(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta_0=0} &= mgR - I\Omega^2 = mR^2\Omega^2\left(\frac{\Omega_c^2}{\Omega^2} - 1\right) < 0 \implies \theta_0 = 0 \text{ est un maximum} \\ \left. \frac{d^2\tilde{U}(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta_1} &= -2I\Omega^2\cos^2\theta_1 + I\Omega^2 + mgR\cos\theta_1 \\ &= \cos\theta_1(I\Omega^2\cos\theta_1 - 1) + I\Omega^2(1 - \cos^2\theta) \\ &= I\Omega^2(1 - \cos^2\theta) > 0 \implies \theta_1 \text{ est un minimum} \end{aligned}$$

Pour retrouver la trajectoire de la perle si les conditions initiales sont  $\theta(t=0) = 0$  et  $\dot{\theta}(t=0) = 0$ , il suffit de résoudre l'équation du mouvement autour de  $\theta = 0$ .

L'équation du mouvement est obtenue en utilisant soit les équations de Lagrange soit les équations de Hamilton. En faisant usage de ces dernières, on

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p} \implies \dot{\theta} = \frac{p}{I} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} \implies \dot{p} = -\frac{1}{2}I\Omega^2\sin 2\theta + mgR\sin\theta \end{aligned}$$

or en utilisant la première équation on a  $\dot{p} = I\ddot{\theta}$ , ce qui donne finalement

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\Omega^2\sin 2\theta - \Omega_c^2\sin\theta = 0$$

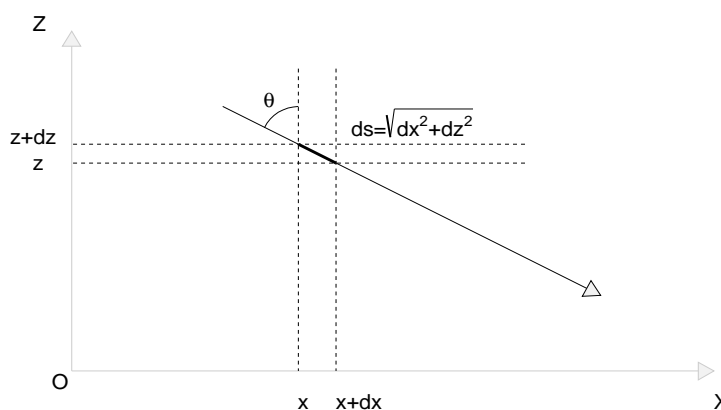
où nous avons utilisé  $\Omega_c^2 = g/R$  et  $I = mR^2$ . Comme  $\theta \rightarrow 0$  alors  $\sin 2\theta = 2\theta + \mathcal{O}(\theta^2)$  et  $\sin \theta = \theta + \mathcal{O}(\theta^2)$ , ce qui donne

$$\ddot{\theta} + (\Omega^2 - \Omega_c^2)\theta = 0$$

qui est une équation différentielle de second ordre sans second membre à coefficients constants dont l'équation caractéristique est  $r^2 + (\Omega^2 - \Omega_c^2) = 0$  ayant comme solutions  $r = \pm i\sqrt{\Omega^2 - \Omega_c^2}$  car  $\Omega > \Omega_c$ . Aussi, la solution est  $\theta = Ae^{-i\sqrt{\Omega^2 - \Omega_c^2}t} + Be^{i\sqrt{\Omega^2 - \Omega_c^2}t}$   $A$  et  $B$  étant déterminées par les conditions initiales  $\theta(0) = 0 = A + B$  et  $\dot{\theta}(0) = 0 = -i\sqrt{\Omega^2 - \Omega_c^2}(A - B)$  ce qui donne  $A = B = 0$  et donc la solution se réduit à  $\theta = 0$ . Ce résultat est bien prévisible puisque la position  $\theta = 0$  est une position d'équilibre donc si  $\dot{\theta} = 0$ , l'anneau *campe* sur sa position d'équilibre.

### 1.2.4 Corrigé

Dans un espace à deux dimensions  $(x, z)$ , on considère un milieu matériel d'indice de réfraction  $n=n(z)$ . La distance parcourue  $ds$  est liée à l'indice de réfraction par  $ds = cdt/n$ , où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide, voir figure ci-dessous.



- Comme indiqué ci-dessus, si l'on prend un élément de distance dans le plan  $(x, z)$  dans un milieu d'indice de réfraction  $n = n(z)$ , nous avons

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = vdt = \frac{c}{n(z)}dt \implies dt = \frac{n(z)}{c}\sqrt{dx^2 + dz^2}.$$

Si l'on définit la quantité

$$S = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{n(z)}{c}\sqrt{dx^2 + dz^2} = \int_A^B \frac{n(z)}{c}\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dz^2}} dz = \int_A^B \frac{n(z)}{c}\sqrt{1 + x'^2} dz$$

où  $x' = dx/dz$  et minimiser le chemin optique consiste à minimiser le temps que mettra la lumière pour parcourir un chemin d'un point  $A$  à un point  $B$  et donc

cela reviendra à minimiser la quantité  $S$ , qui jouera le rôle d'une action. Nous pouvons déduire alors que la fonctionnelle

$$L = \frac{n(z)}{c} \sqrt{1 + x'^2} = L(x', z)$$

joue le rôle d'un lagrangien. Notons que  $z$  joue le rôle du temps dans le formulation de Lagrange. On note que  $L$  ne dépend pas de  $x$  et donc cette dernière est une variable cyclique ce qui implique que son moment conjugué est une intégrale première

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{n(z)}{c} \frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}} = \frac{n(z)}{c} \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dz^2}} = \frac{n(z)}{c} \sin\theta$$

où nous avons utilisé  $\sin\theta = dz/ds = dz/\sqrt{dx^2 + dz^2}$ .

$p_x$  est une intégrale première implique que  $\frac{n(z)}{c} \sin\theta = \text{constante}$ , qui n'est d'autre que la loi de Snell-Descartes.

2. On reprend le même raisonnement et on trouve en exprimant l'intégrale cette fois-ci en fonction de  $dx$

$$S = \int_A^B \frac{n(z)}{c} \sqrt{1 + z'^2} dx$$

où  $x$  joue le rôle du temps. On note que  $L = \frac{n(z)}{c} \sqrt{1 + z'^2} = L(z, z')$  et ne dépend pas de  $x$  et donc le hamiltonien associé à  $L$  est une intégrale première

$$\begin{aligned} H &= p_z z' - L = \frac{n(z)}{c} \left( \frac{z'^2}{\sqrt{1 + z'^2}} - \sqrt{1 + z'^2} \right) \\ &= \frac{n(z)}{c} \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}} \\ &= \frac{n(z)}{c} \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}} = \frac{n(z)}{c} \frac{dx^2}{\sqrt{dx^2 + dz^2}} = \frac{n(z)}{c} \sin\theta = \text{constante.} \end{aligned}$$

On retrouve ainsi le même resultat que la question précédente.

3. Trouver la trajectoire du rayon de lumière consiste à trouver l'équation  $z = z(x)$ . On a le choix de partir soit du résultat de la première question ou de celui de la deuxième question.

Prenons le second résultat,

$$H = \frac{n(z)}{c\sqrt{1 + z'^2}} = K$$

et la constante  $K$  est déterminée à partir de  $z'(x=0) = 0$  et  $z(x=0) = 0$  ce qui donne, sachant que  $n(z) = n_0 + \lambda z \implies n(0) = n_0$

$$K = \frac{n_0}{c}.$$

Ainsi, nous pouvons écrire

$$\frac{n_0 + \lambda z}{c\sqrt{1 + z'^2}} = \frac{n_0}{c}$$

$$\implies z' = \frac{dz}{dx} = \pm \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda z}{n_0}\right)^2 - 1}.$$

On pose  $u = 1 + \lambda z/n_0 \implies du = \lambda dz/n_0 \implies dz = n_0 du/\lambda$ . L'équation précédente dévient

$$\frac{n_0}{\lambda} du = \pm \sqrt{u^2 - 1} dx \implies \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \pm \frac{\lambda}{n_0} dx.$$

On fait le changement de variable  $u = \cosh\theta \implies du = \sinh\theta d\theta$  et on obtient

$$\frac{\sinh\theta}{|\sinh\theta|} d\theta = \pm \frac{\lambda}{n_0} dx \implies \theta = \pm \frac{\lambda}{n_0} x + \theta_0 \implies u = \operatorname{arccosh}(\theta) = \operatorname{arccosh}\left(\frac{\lambda}{n_0} x + \theta_0\right)$$

et on déduit finalement l'expression de  $z = z(x)$  par

$$z = \frac{n_0}{\lambda}(u - 1) = \frac{n_0}{\lambda} \left[ \operatorname{arccosh}\left(\frac{\lambda}{n_0} x + \theta_0\right) - 1 \right]$$

### 1.2.5 Corrigé

Soit un pendule de longueur  $l$  avec une masse placée dans un champ de pesanteur  $g$  et astreint à se déplacer dans un plan  $(x, y)$  muni de la base mobile  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ . La position du point  $M$  est repérée par  $\overrightarrow{OM} = l\vec{u}_r$ . Soit  $\mathcal{R}(O, x, y, z)$  le repère d'étude, munis de la base cartésienne  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , que l'on peut considérer comme galiléen.  $Oz$  est perpendiculaire au plan du mouvement et l'axe  $Ox$  est pris dans la direction descendante, d'où  $\vec{g} = g\vec{i}$ .

1. Le fil inextensible est sans masse et le masse peut être considérée sans volume et donc comme un point matériel. Le nombre de mouvements possibles est donc 3. Comme le mouvement du pendule est dans le plan vertical  $(x, y)$ , le nombre de mouvements se réduit à 2, et la position du pendule est contrainte par  $z = 0$ . Le fil étant inextensible, alors la distance qui sépare  $M$  de  $O$  est constante et égale à  $l$  et donc  $x^2 + y^2 = l^2$ , ce qui entraîne un degré de liaison. Aussi, le nombre de degrés de liaison est 2 et donc le nombre de degrés de liberté est  $3 - 2 = 1$ . La coordonnée la mieux adaptée pour décrire le système est  $\theta$ .
2. Le vecteur position est  $\overrightarrow{OM} = l\vec{u}_r$ , ce qui donne pour la vitesse de

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= l\dot{\theta}\vec{u}_\theta. \end{aligned}$$

3. L'énergie cinétique dans  $\mathcal{R}$  peut être déduite ainsi comme suit

$$T = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2.$$

4. Considérons le déplacement virtuel,  $\delta\vec{r} = l\delta\theta\vec{u}_\theta$ , qui est confondu dans ce cas avec le déplacement réel. Le travail effectué est donné par

$$\begin{aligned}\delta W &= m\vec{g} \cdot \delta\vec{r} \\ &= mgl\delta\theta\vec{i} \cdot \vec{u}_\theta = -mgl\sin\theta\delta\theta.\end{aligned}$$

Or  $\delta W = Q_\theta\delta\theta \implies Q_\theta = -mgl\sin\theta$ , qui est la composante de la force généralisée selon la  $\theta$ .

5. La composante généralisée de l'accélération selon  $\theta$  est définie par

$$\begin{aligned}A_\theta &= m \left. \frac{d\vec{V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} \\ &= ml \left( \ddot{\theta}\vec{u}_\theta - \dot{\theta}^2\vec{u}_r \right) \cdot l\vec{u}_\theta \\ &= ml^2\ddot{\theta}.\end{aligned}$$

Nous savons grâce au principe de d'Alembert que  $A_\theta = Q_\theta \implies ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta \implies \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$ .

6. Pour établir l'expression du lagrangien, nous avons besoin en plus de l'énergie cinétique de l'expression de l'énergie potentielle

$$dV = -m\vec{g} \cdot d\vec{r} = -mgl d\theta\vec{i} \cdot \vec{u}_\theta = mgl\sin\theta d\theta$$

ce qui donne  $V = -mgl\cos\theta + C$ . On peut prendre  $C = 0$ . Alors, l'expression du lagrangien est donnée ainsi par

$$L(\theta, d\theta, t) = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta.$$

En appliquant les équations de Lagrange, sachant que  $\partial L/\partial\theta = -mgl\sin\theta$  et  $\partial L/\partial\dot{\theta} = ml^2\dot{\theta}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial\theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} &= 0 \\ \implies -mgl\sin\theta - ml^2\ddot{\theta} &= 0 \\ \implies \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta &= 0\end{aligned}$$

### 1.2.6 Corrigé

Soit une masse  $m$  astreinte à se déplacer sur une tige indéformable faisant un angle  $\theta$  avec la verticale  $OX$ , en rotation imposée avec un vecteur de rotation  $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_Z$ . La masse est attachée à un ressort de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$  et glisse sans frottement. Elle est par ailleurs soumise à son poids. Ce système est à un degré de liberté, on choisit la distance  $r = |\vec{OM}|$ . Le référentiel choisi est celui du laboratoire. Il est galiléen. Le mouvement a lieu dans le plan  $(Oxy)$ . On prend  $Ox$  descendant.

1. La masselote est un point matériel. Sa vitesse s'obtient par

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{u}_r + r\Omega\vec{u}_\theta.$$

l'énergie cinétique est ainsi donnée par

$$T = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\Omega^2).$$

2. Faisons le bilan des forces :
- |   |  |
|---|--|
| $m\vec{g} = mg\vec{i}$                          | Poids  |
| $-k(r - l_0)\vec{u}_r$                          | Force de rappel  |
| $\vec{R} = \vec{N} = \ \vec{N}\ \vec{u}_\theta$ | Réaction de la tige sur la masselote (Pas de frottement) |

La composante généralisée de la force selon  $r$  est donnée par

$$\begin{aligned} Q_r &= \left( m\vec{g} + \vec{R} - k(r - l_0)\vec{u}_r \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \\ &= \left( m\vec{g} + \vec{R} - k(r - l_0)\vec{u}_r \right) \cdot \vec{u}_r \\ &= mg\cos\theta - k(r - l_0). \end{aligned}$$

3. L'équation de Lagrange selon  $r$ , exprimée en fonction de l'énergie cinétique et des forces généralisées, est donnée dans ce cas par

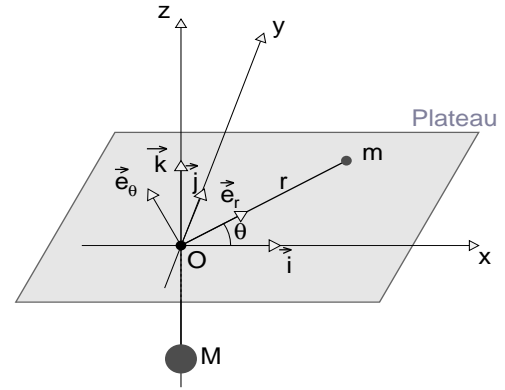
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r.$$

Sachant que  $\partial T/\partial r = mr\Omega^2$  et  $\partial T/\partial \dot{r} = m\dot{r}$ , nous obtenons ainsi

$$m\ddot{r} + mr\left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right) = mg\cos\theta + kl_0.$$

### 1.2.7 Corrigé

Le système est formé par deux billes reliées par un fil inextensible. Le système est donc formé par deux points matériels. L'énergie cinétique du système est la somme des énergies cinétiques de chacune des billes. Quant à l'énergie potentielle, il faut tenir compte du caractère inextensible du fil qui fait que le module de la tension du fil sur  $m$  est égal à celui de la tension du fil sur  $M$ . Pour le nombre de degrés de liberté, le nombre de mouvement total est 6 (2 points matériels),  $M$  est astreinte à se déplacer sur  $Oz$  donc deux degrés de liaison et  $m$  se déplace sur un plan, un degré de liaison, et le fil est inextensible donc une contrainte supplémentaire. Ce qui fait au total quatre degrés de liaison et donc implique deux degrés de liberté. On choisit pour les coordonnées généralisées  $(r, \theta)$  repérant  $m$  sur le plan. Considérons le repère  $\mathcal{R}(O, xyz)$ , que l'on considère galiléen et la base modale  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ .



1. Calculons les vitesses de  $m$  et de  $M$  :

$$\begin{aligned}\vec{V}(m/\mathcal{R}) &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \vec{V}(M/\mathcal{R}) &= \dot{z}\vec{k} = -\dot{r}\vec{k}\end{aligned}$$

sachant que  $r + z = l$ . Ce qui donne pour l'énergie cinétique du système

$$T = \frac{1}{2} \left[ \dot{r}^2(m + M) + mr^2\dot{\theta}^2 \right].$$

Quant à l'énergie potentielle, calculons le travail des forces appliquées aux deux billes. Le bilan des forces est

$$\begin{aligned}m\vec{g} & \quad \text{Poids de } m ; \\ \vec{R} = \|N\|\vec{k} & \quad \text{Réaction du plan sur } m \text{ (sans frottement) ;} \\ \vec{F}_m = -T\vec{e}_r & \quad \text{Tension du fil sur } m ; \\ M\vec{g} & \quad \text{Poids de } M ; \\ \vec{F}_M = -T\vec{k} & \quad \text{Tension du fil sur } M.\end{aligned}$$

Les déplacements respectifs de  $m$  et de  $M$  sont  $dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta$  et  $dz\vec{k} = -dr\vec{k}$ . Aussi le travail élémentaire du système est

$$\begin{aligned}\delta W &= \left( -mg\vec{k} + \|N\|\vec{k} - T\vec{e}_r \right) \cdot (dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta) - (T\vec{k} + Mg\vec{k}) \cdot (-dr)\vec{k} \\ &= Mgdr.\end{aligned}$$

Et comme la seule force qui travaille est le poids de  $M$ , alors l'énergie potentielle est ainsi

$$dV = -Mgdr \implies V = -Mgr + C$$



où  $C$  est une constante que l'on prend nulle ( $V(r = z = 0) = 0$ ).

Le lagrangien est ainsi donné par

$$\mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, t) = T - V = \frac{1}{2} \left[ \dot{r}^2(m + M) + mr^2\dot{\theta}^2 \right] + Mgr.$$

2. Comme la coordonnée généralisée  $\theta$  n'apparaît pas dans l'expression de  $\mathcal{L}$ , donc elle constitue une variable cyclique. Son moment conjugué est

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}.$$

qui est le moment cinétique de  $m$  selon  $Oz$ . Ce dernier est conservé car l'équation de Lagrange selon  $\theta$  donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= 0 \\ \implies \frac{dp_\theta}{dt} &= 0 \implies p_\theta \text{ est conservé.} \end{aligned}$$

3. L'équation du mouvement selon  $r$  est obtenue par l'équation de Lagrange selon  $r$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} &= 0 \\ mr\dot{\theta}^2 + Mg - (M + m)\ddot{r} &= 0 \\ \implies \ddot{r} - \frac{p_\theta^2}{m(M + m)} \frac{1}{r^3} &= \frac{M}{M + m}g. \end{aligned}$$

4. Les premiers instants de la chute de  $M$  peuvent être décrits en posant  $r = l(1 - \epsilon)$ , avec  $\epsilon \ll 1$  et donc  $(1 - \epsilon)^{-3} = 1 + 3\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ . Ce qui donne

$$\begin{aligned} -l\ddot{\epsilon} - \frac{p_\theta^2}{ml^3(M + m)}(1 + 3\epsilon) &= \frac{M}{M + m}g \\ \implies \ddot{\epsilon} + \frac{3p_\theta^2}{ml^4(M + m)}\epsilon &= - \left( \frac{M}{l(M + m)}g + \frac{p_\theta^2}{ml^4(M + m)} \right). \end{aligned}$$

En posant  $\omega_0^2 = \frac{3p_\theta^2}{ml^4(M + m)}$ , la solution de l'équation différentielle précédente est de la forme

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \sin \omega_0 t - \left( \frac{1}{3} + \frac{M}{l\omega_0^2(M + m)}g \right).$$

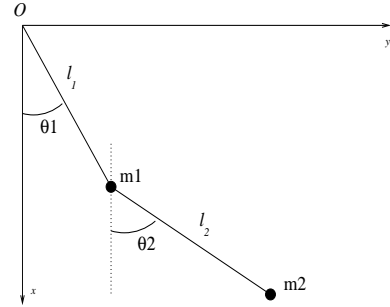
Comme  $\epsilon(t) \ll 1$  et  $p_\theta$  est constante et donc  $p_\theta = mr_0^2\dot{\theta}_0 = ml^2\dot{\theta}_0$ , nous avons alors

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &\gg \frac{3}{2} \frac{M}{l(M + m)}g \\ \implies \dot{\theta}_0 &\gg \sqrt{\frac{1}{2} \frac{Mg}{ml}} \end{aligned}$$

Dans le cas où la chaîne tombe  $r \rightarrow 0$  et  $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 l^2 / r^2$  augmente. Par conséquent, la vitesse angulaire augmente au fur et à mesure que  $m$  se rapproche de  $O$ .

1.2.8 Corrigé

On utilise le formalisme de Lagrange pour étudier le système suivant : une masse ponctuelle  $m_1$  est reliée par un fil supposé sans masse de longueur  $l_1$  à un point fixe  $O$ . Une seconde masse  $m_2$  est reliée par un fil sans masse de longueur  $l_2$  à  $m_1$ . Les deux masses ne peuvent pas se mouvoir que dans le plan vertical.



1. Le fil inextensible reliant la masse  $m_1$  à  $O$  développe une tension sur  $m_1$  qui le maintient à une distance constante de  $O$  et donc impose la relation  $x_1^2 + y_1^2 = l_1^2$ , et donc la liaison est une liaison holonôme,  $(x_1, y_1)$  étant les coordonnées de  $m_1$  dans le plan  $(Oxy)$ . De même le fil inextensible liant  $m_1$  à  $m_2$  et les maintenant à une distance constante impose  $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l_2^2$  et donc la liaison est holonôme également.

Le système que nous étudions est formé de deux points matériels. Aussi, le nombre total de mouvements possibles est  $3 \cdot 2 = 6$ . Comme les deux points matériels doivent rester sur le plan  $(Oxy)$ , alors  $z_1 = z_2 = 0$ . De même, les deux liaisons holonômes imposent deux degrés de liaisons ce qui laisse finalement comme degrés de liberté  $6 - 4 = 2$ . Aussi, le choix le mieux adapté pour les coordonnées indépendantes est celui des angles  $(\theta_1, \theta_2)$  qui repèrent respectivement les mouvements de  $m_1$  et de  $m_2$  par rapport à la verticale et que nous prenons comme coordonnées généralisées.

2. Calculons les vecteurs vitesses de  $m_1$  et de  $m_2$ . Soit  $\mathcal{R}(O, xyz)$  un repère que nous considérons galiléen. Nous avons

$$\vec{V}(m_1/\mathcal{R}) = l_1 \dot{\theta}_1 \vec{u}_1 \quad \text{et} \quad \vec{V}(m_2/\mathcal{R}) = l_1 \dot{\theta}_1 \vec{u}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \vec{u}_2$$

où  $\vec{u}_1$  est le vecteur unitaire de  $\overrightarrow{OM_1}$  et  $\vec{u}_2$  celui de  $\overrightarrow{M_1M_2}$ . Ainsi l'énergie cinétique du système est la somme des énergies cinétiques de chacun des points matériels, ce qui donne

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 \\ &= \frac{1}{2} [m_1 V^2(m_1/\mathcal{R}) + m_2 V^2(m_2/\mathcal{R})] \\ &= \frac{1}{2} \left[ m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 \left( l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (m_1 + m_2) + m_2 \left( l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right) \right]. \end{aligned}$$

Le bilan des forces appliquées au système sont

$$\begin{aligned}
m_1 \vec{g} & \quad \text{Poids de } m_1 \\
m_2 \vec{g} & \quad \text{Poids de } m_2 \\
\vec{T}_1 = -T_1 \vec{u}_1 & \quad \text{Tension du fil } l_1 \text{ sur } m_1 \\
\vec{T}_2 = T_2 \vec{u}_2 & \quad \text{Tension du fil } l_2 \text{ sur } m_1 \\
\vec{T}_3 = -T_2 \vec{u}_2 & \quad \text{Tension du fil } l_2 \text{ sur } m_2.
\end{aligned}$$

Considérons un déplacement virtuel élémentaire de  $m_1$   $\overrightarrow{\delta M}_1 = l_1 \delta\theta_1 \vec{v}_1$  et celui de  $m_2$  est  $\overrightarrow{\delta M}_2 = l_1 \delta\theta_1 \vec{v}_1 + l_2 \delta\theta_2 \vec{v}_2$ , où  $\vec{v}_i$  sont les vecteurs unitaires perpendiculaires dans le sens direct aux vecteurs  $\vec{u}_i$ . Le travail virtuel élémentaire est donné par

$$\begin{aligned}
\delta W &= \left( m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 \right) \cdot \overrightarrow{\delta M}_1 + \left( m_2 \vec{g} + \vec{T}_3 \right) \cdot \overrightarrow{\delta M}_2 \\
&= -m_1 l_1 g \sin\theta_1 \delta\theta_1 - m_2 g (l_1 \sin\theta_1 \delta\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 \delta\theta_2) \\
&= -g \sin\theta_1 (m_1 l_1 + m_2 l_2) \delta\theta_1 - m_2 g l_2 \sin\theta_2 \delta\theta_2
\end{aligned}$$

ce qui donne pour les composantes généralisées de la résultante des forces

$$\begin{aligned}
Q_{\theta_1} &= -\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = -g \sin\theta_1 (m_1 l_1 + m_2 l_2) \\
Q_{\theta_2} &= -\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = -m_2 g l_2 \sin\theta_2.
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \theta_1} = g \sin\theta_1 (m_1 l_1 + m_2 l_2) \implies V = -g \cos\theta_1 (m_1 l_1 + m_2 l_2) + C_1(\theta_2) \\ \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = C_1'(\theta_2) = m_2 g l_2 \sin\theta_2 \implies C_1(\theta_2) = -m_2 g l_2 \cos\theta_2 + C_2 \end{cases}$$

ce qui donne pour le potentiel

$$V(\theta_1, \theta_2) = -g \cos\theta_1 (m_1 l_1 + m_2 l_2) - m_2 g l_2 \cos\theta_2 + C_2.$$

Le lagrangien est ainsi donné par

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2} \left[ l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (m_1 + m_2) + m_2 \left( l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right) \right] + \\
&\quad + g \cos\theta_1 (m_1 l_1 + m_2 l_2) + m_2 g l_2 \cos\theta_2 + C_2
\end{aligned}$$

3. Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -g \sin\theta_1 (m_1 l_1 + m_2 l_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= -m_2 g l_2 \sin\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= l_1^2 \dot{\theta}_1 (m_1 + m_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2).
\end{aligned}$$

L'équations de Lagrange selon  $\theta_1$ , s'écrit comme suit

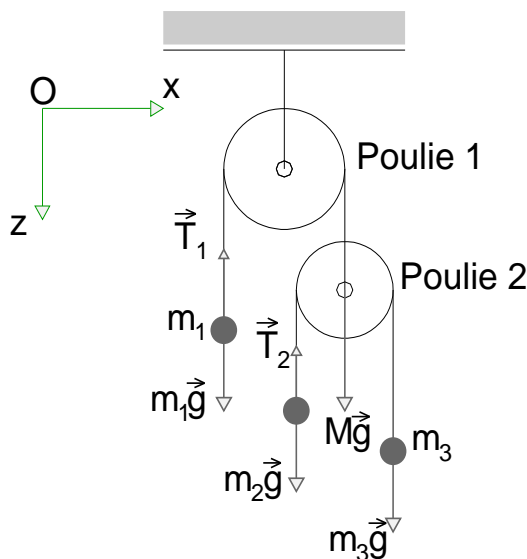
$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= -g \sin \theta_1 (m_1 l_1 + m_2 l_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \\ &\quad + l_1^2 \ddot{\theta}_1 (m_1 + m_2) + m_2 l_1 l_2 \left( \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right) \\ &= -g \sin \theta_1 (m_1 l_1 + m_2 l_2) + l_1^2 \ddot{\theta}_1 (m_1 + m_2) + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0 \end{aligned}$$

et celle selon  $\theta_2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= -g \sin \theta_2 m_2 l_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \\ &\quad + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \left( \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right) \\ &= -g \sin \theta_2 m_2 l_2 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0 \end{aligned}$$

### 1.2.9 Corrigé : Machine d'Atwood. Contraintes

Le dispositif de la machine d'Atwood est décrit par la figure ci-contre.



Notons le plan dans lequel le mouvement a lieu par  $(Oxz)$  et l'axe  $Oz$  est descendant. et soient  $z_i, i = 1, 2, 3$  les côtes respectivement de  $m_i, i = 1, 2, 3$ .

1. Les forces appliquées aux trois masses sont
  - le poids  $m_1 \vec{g}$  et la tension du fil  $\vec{T}_1$  appliqués à la masse  $m_1$  ;
  - en l'absence du frottement au niveau de la poulie 1, la tension du fil appliquée à  $M$  est  $\vec{T}_1$ .  $M$  est soumise également au poids  $M \vec{g}$ .
  - le poids  $m_2 \vec{g}$  et la tension du fil  $\vec{T}_2$  appliqués à la masse  $m_2$  ;

— en l'absence de frottement au niveau de la poulie 2, la tension du fil appliquée à  $m_3$  est  $\vec{T}_2$ .  $m_3$  est soumise également au poids  $m_3\vec{g}$ .

Les forces de liaison sont les tensions  $\vec{T}_1$  et  $\vec{T}_2$ .

2. Le caractère inextensible des fils implique que la longueur des fils reste constante et égale à  $L$ , ce qui implique

$$L = (z_1 - l_0) + (z - l_0) + \pi R_1 \implies f_1(z_1, z_2) = (z_1 - l_0) + (z - l_0) + \pi R_1 - L = 0 \text{ Poulie 1}$$

$$L = (z_2 - z) + (z_3 - z) + \pi R_2 \implies f_2(z_1, z_2) = (z_2 - z) + (z_3 - z) + \pi R_2 - L = 0 \text{ Poulie 2}$$

et les deux contraintes sont ainsi holonomes puisqu'elles ne dépendent que des côtes ;  $z$  étant la côte de la poulie 2.

3. Le système est formé de 4 masses considérées comme des points matériels, ce qui donne pour le nombre total de coordonnées  $4 \times 3 = 12$ . Comme le mouvement est dans le plan  $(Oxz)$  alors les coordonnées selon  $Oy$  sont nulles, ce qui laisse  $12 - 4 = 8$ . Le mouvement des masses est dû à la gravité et donc les trajectoires sont rectilignes ce qui implique que les coordonnées selon  $Ox$  sont constantes, ce qui laisse  $8 - 4 = 4$ . Nous avons deux contraintes holonomes  $f_i, i = 1, 2$  ce qui donne pour le nombre de coordonnées indépendantes  $4 - 2$ . Aussi le nombre de degrés de liberté est égal à 2. On peut choisir comme coordonnées généralisées  $z_1$  et  $z_2$ . Les autres côtes se déduisent comme suit

$$z = L + 2l_0 - \pi R_1 - z_1$$

$$z_3 = L + 2z - \pi R_2 - z_2 = 3L + 4l_0 - \pi(R_2 - R_1) - (2z_1 + z_2).$$

4. Appliquons le principe fondamental de la dynamique au système formé par les trois masses et la poulie 2, en projetant sur l'axe  $Oz$

$$\begin{aligned} m_1\ddot{z}_1 &= m_1g - T_1 & \implies & & m_1\ddot{z}_1 + T_1 &= m_1g \\ m_2\ddot{z}_2 &= m_2g - T_2 & \implies & & m_2\ddot{z}_2 + T_2 &= m_2g \\ m_3\ddot{z}_3 &= m_3g - T_2 & \implies & -m_3(2\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2) + T_2 &= m_3g \\ M\ddot{z} &= Mg - T_1 + 2T_2 & \implies & -M\ddot{z}_1 + T_1 - 2T_2 &= Mg \end{aligned}$$

aussi nous disposons de quatre équations à quatre inconnues que l'on peut mettre sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 1 \\ -2m_3 & -m_3 & 0 & 1 \\ -M & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1g \\ m_2g \\ m_3g \\ Mg \end{pmatrix}$$

et que l'on peut résoudre en utilisant la méthode de Cramer

$$\ddot{z}_1 = \frac{\begin{vmatrix} m_1 g & 0 & 1 & 0 \\ m_2 g & m_2 & 0 & 1 \\ m_3 g & -m_3 & 0 & 1 \\ Mg & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 1 \\ -2m_3 & -m_3 & 0 & 1 \\ -M & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \left[ \frac{(m_1 - M)(M + m_3) - 4m_2 m_3}{(m_1 + M)(m_2 + m_3) + 4m_2 m_3} \right] g$$

$$\ddot{z}_2 = \frac{\begin{vmatrix} m_1 & m_1 g & 1 & 0 \\ 0 & m_2 g & 0 & 1 \\ -2m_3 & m_3 g & 0 & 1 \\ -M & Mg & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 1 \\ -2m_3 & -m_3 & 0 & 1 \\ -M & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \left[ \frac{(m_1 + M)m_2 + (M - 3m_1 + 4m_2)m_3}{(m_1 + M)(m_2 + m_3) + 4m_2 m_3} \right] g$$

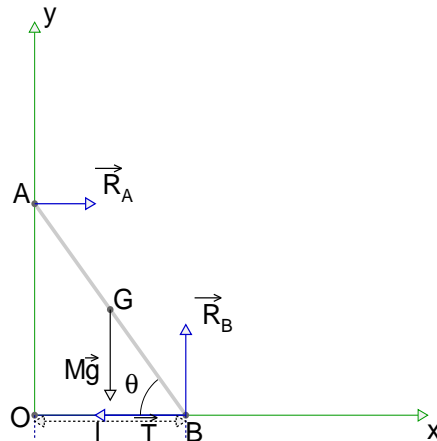
$$T_1 = \frac{\begin{vmatrix} m_1 & 0 & m_1 g & 0 \\ 0 & m_2 & m_2 g & 1 \\ -2m_3 & -m_3 & m_3 g & 1 \\ -M & 0 & Mg & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 1 \\ -2m_3 & -m_3 & 0 & 1 \\ -M & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \left[ \frac{2m_1 [4m_2 m_3 + M(m_2 + m_3)]}{(m_1 + M)(m_2 + m_3) + 4m_2 m_3} \right] g$$

$$T_2 = \frac{\begin{vmatrix} m_1 & m_1 g & 1 & 0 \\ 0 & m_2 g & 0 & 1 \\ -2m_3 & m_3 g & 0 & 1 \\ -M & Mg & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 1 \\ -2m_3 & -m_3 & 0 & 1 \\ -M & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \left[ \frac{4m_1 m_2 m_3}{(m_1 + M)(m_2 + m_3) + 4m_2 m_3} \right] g$$

Notons que les accélérations sont constantes ce qui est attendu puisque le mouvement est rectiligne et uniformément varié.

### 1.2.10 Corrigé

On munit le repère utilisé de la base cartésienne  $(\vec{i}, \vec{j})$ . Soient  $(x_G, y_G)$  les coordonnées cartésiennes du centre de masse  $G$ .



- Les forces appliquées à l'échelle sont
  - le poids  $M\vec{g}$ ;
  - la réaction au point  $A$   $\vec{R}_A$ ;
  - la réaction au point  $B$   $\vec{R}_B$ ;
  - la tension du fil  $\vec{T}$ .
 sachant que les forces de liaison sont  $\vec{R}_A$ ,  $\vec{R}_B$  et  $\vec{T}$ .
- La contrainte de liaison imposée en  $B$ , en plus de  $\vec{R}_B = R_B\vec{j}$ , est que  $\|\vec{OB}\| = l$ . Comme  $\vec{OB} = \vec{OG} + \vec{GB} = x_G\vec{i} + y_G\vec{j} + \frac{L}{2}(\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j}) = (x_G + \frac{L}{2}\cos\theta)\vec{i} + (y_G - \frac{L}{2}\sin\theta)\vec{j}$ , alors la contrainte se met sous la forme

$$\left(x_G + \frac{L}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(y_G - \frac{L}{2}\sin\theta\right)^2 - l^2 = 0$$

qui est donc une contrainte holonome.

Quand l'échelle se déploie (s'ouvre), avant d'atteindre sa position d'équilibre, le nombre de degrés de liberté possibles de l'échelle est six, trois translations, décrites par les coordonnées du centre de masse  $G$ , et trois rotations. Comme le mouvement a lieu dans le plan, alors deux coordonnées suffisent pour décrire la position de  $G$  et seule une rotation est possible, décrite par l'angle  $\theta$ . Comme  $A$  est astreinte à se déplacer sur le mur et  $B$  sur le sol, alors on a

$$OA = L\sin\theta \text{ et } OB = L\cos\theta.$$

On peut ainsi déduire que

$$\begin{aligned} \vec{OG} &= \vec{OA} + \vec{AG} \\ &= L\sin\theta\vec{j} - \frac{L}{2}\sin\theta\vec{j} + \frac{L}{2}\cos\theta\vec{i} \\ &= \frac{L}{2}\sin\theta\vec{j} + \frac{L}{2}\cos\theta\vec{i} \implies x_G - \frac{L}{2}\cos\theta = 0 \text{ et } y_G - \frac{L}{2}\sin\theta = 0 \end{aligned}$$

ces deux dernières équations étant deux liaisons holonomes, ce qui réduit le nombre de degrés de liberté à  $3 - 2 = 1$ .

3. On se propose d'établir l'expression de la tension  $\vec{T} = -T\vec{i}$ .

**3-a)** On choisit le déplacement virtuel  $\delta\theta$ , qui consiste à ce que lorsque  $\theta$  passe à  $\theta + \delta\theta$  l'échelle se déplace de manière que  $A$  glisse sur le mur et  $B$  glisse sur le sol. Aussi le travail de  $R_A$  est nul et celui de  $R_B$  l'est également et c'est le résultat recherché.

**3-b)** Pour établir l'expression de la composante de la force généralisée  $Q_\theta$  associée à la coordonnée généralisée  $\theta$ , il suffit d'exprimer le travail élémentaire sous forme  $\delta W = Q_\theta \delta\theta$ . Sachant que

$$\delta W = -Mg\vec{j} \cdot \delta\vec{OG} + \vec{T} \cdot \delta\vec{OB}$$

et que  $\vec{OB} = L\cos\theta\vec{i} \implies \delta\vec{OB} = -L\sin\theta\delta\theta\vec{i}$  et  $\vec{OG} = \frac{L}{2}(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})$  ce qui implique pour ce dernier que  $\delta\vec{OG} = \frac{L}{2}(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})\delta\theta$ , l'expression du travail élémentaire devient

$$\delta W = -Mg\frac{L}{2}\cos\theta\delta\theta + LT\sin\theta\delta\theta = -\left(\frac{Mg}{2}\cos\theta - T\sin\theta\right)L\delta\theta.$$

ce qui permet de déduire que  $Q_\theta = -\left(\frac{Mg}{2}\cos\theta - T\sin\theta\right)L$ .

**3-c)** Le principe de d'Alembert stipule que  $\delta W = 0$ , comme  $\delta\theta$  est arbitraire cela implique que  $Q_\theta = 0$  et donc

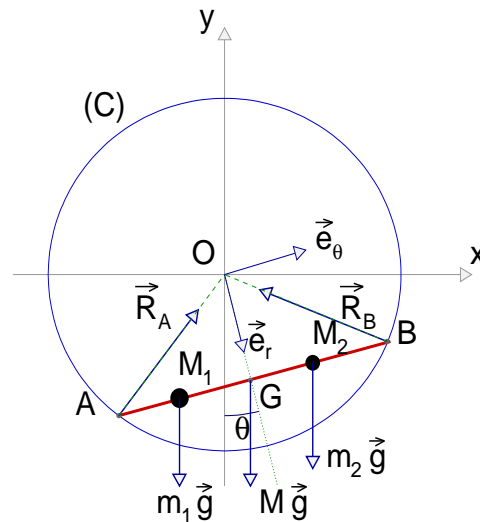
$$\frac{Mg}{2}\cos\theta - T\sin\theta = 0 \implies T = \frac{1}{2}Mg\cot\theta$$

et qui n'est d'autre que le résultat recherché.

### 1.2.11 Corrigé

On considère un cerceau ( $C$ ) de centre  $O$  et de rayon  $a$  faisant partie du plan vertical ( $Oxy$ ). Soit  $AB$  une barre de longueur  $\|\vec{AB}\| = a\sqrt{3}$  et dont les extrémités  $A$  et  $B$  glissent sans frottement sur ( $C$ ), voir figure ci-après.





Avant de répondre aux questions de cet exercice, établissons d'abord quelques relations géométriques.

Le triangle  $(\triangle OAB)$  est isocèle car  $OA = OB = a$ . Comme  $G$  est le milieu de  $AB$ , alors  $\vec{OG} \perp \vec{AB}$  car  $OG$  est la bissectrice de l'angle  $(\triangle AOB)$ . On en déduit alors<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}
 OA &= OB = a \\
 OG &= \sqrt{OA^2 - AG^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a \\
 GM_1 &= GM_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a \\
 OM_1 &= OM_2 = \sqrt{GM_2^2 + OG^2} = a\sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{4}a \\
 \beta &= (\widehat{M_1OG}) = \arccos\left(\frac{OG}{OM_1}\right) = \arccos\left(\frac{a/2}{a\sqrt{7}/4}\right) = \arccos\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)
 \end{aligned}$$

- Les forces appliquées au système  $\Sigma$  sont
  - Poids  $M\vec{g}$  appliqué en  $G$  ;
  - Poids  $m_1\vec{g}$  appliqué en  $M_1$  ;
  - Poids  $m_2\vec{g}$  appliqué en  $M_2$  ;
  - Réaction de  $(C)$  sur la barre en  $A$ ,  $\vec{R}_A$ , dont la direction est normale à la surface de contact puisqu'il n'y a pas de frottement ;
  - Réaction de  $(C)$  sur la barre en  $B$ ,  $\vec{R}_B$ , dont la direction est normale à la surface de contact puisqu'il n'y a pas de frottement ; $\vec{R}_A$  et  $\vec{R}_B$  sont des forces de liaison.

3. les expressions ci-dessous sont les modules des vecteurs considérés.

2. Rappelons que  $(\Sigma) = (AB) + (m_1) + (m_2)$ . Comme les points matériels  $m_1$  et  $m_2$  sont solidaires de la barre, l'ensemble peut être considéré comme un seul solide. D'où les coordonnées décrivant le mouvement de  $\Sigma$  sont les coordonnées du centre de masse  $G$ ,  $x_G$ ,  $y_G$  et  $z_G$ , d'une part, et les angles de précession, de nutation et de rotation qui se réduisent à l'angle  $\theta$ , d'autre part. Comme le mouvement a lieu dans le plan du cerceau confondu avec  $(Oxy)$ , cela implique que  $z_G = 0$ . De même, les extrémités de la barre se déplacent sur le cerceau, ce qui engendre les contraintes

$$x_G = \frac{a}{2}\sin\theta \text{ et } y_G = -\frac{a}{2}\cos\theta$$

ce qui laisse finalement une seule coordonnée indépendante  $\theta$ . D'où le nombre de degré de liberté est égal à 1.

3. Le déplacement virtuel ne faisant pas travailler à la fois  $\vec{R}_A$  et  $\vec{R}_B$  coïncide avec le déplacement réel où  $A$  et  $B$  glissent sur  $(C)$  car les réactions sont perpendiculaires au déplacement et donc leurs travaux sont nuls.

### 1.2.12 1<sup>ère</sup> méthode

Considérons la base polaire  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ . On note bien que

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_r &= \sin\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{j} \\ \vec{e}_\theta &= \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \end{aligned} \right\} \implies \delta\vec{e}_r = [\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}] \delta\theta = \delta\theta\vec{e}_\theta.$$

Aussi, les vecteurs position et les déplacements élémentaires sont donnés par

$$\begin{aligned} \vec{OG} &= \frac{a}{2}\vec{e}_r \implies \delta\vec{OG} = \frac{a}{2}\delta\theta\vec{e}_\theta \\ \vec{OM}_1 &= \vec{OG} + \vec{GM}_1 \\ &= \frac{a}{2}\vec{e}_r - \frac{a\sqrt{3}}{4}\vec{e}_\theta \implies \delta\vec{OM}_1 = \left[ \frac{a}{2}\vec{e}_\theta + \frac{a\sqrt{3}}{4}\vec{e}_r \right] \delta\theta \\ \vec{OM}_2 &= \vec{OG} + \vec{GM}_2 \\ &= \frac{a}{2}\vec{e}_r + \frac{a\sqrt{3}}{4}\vec{e}_\theta \implies \delta\vec{OM}_2 = \left[ \frac{a}{2}\vec{e}_\theta - \frac{a\sqrt{3}}{4}\vec{e}_r \right] \delta\theta. \end{aligned}$$

Le travail élémentaire est alors égal à

$$\begin{aligned} \delta W &= m_1\vec{g} \cdot \delta\vec{OM}_1 + m_2\vec{g} \cdot \delta\vec{OM}_2 + M\vec{g} \cdot \delta\vec{OG} \\ &= \vec{g} \cdot \left[ (m_1 - m_2) \frac{a\sqrt{3}}{4}\vec{e}_r + (m_1 + m_2 + M) \frac{a}{2}\vec{e}_\theta \right] \delta\theta \\ &= -g \cdot \left[ -(m_1 - m_2) \frac{a\sqrt{3}}{4}\cos\theta + (m_1 + m_2 + M) \frac{a}{2}\sin\theta \right] \delta\theta \end{aligned}$$

sachant que  $\vec{g} = -g\vec{j}$ . Le principe de d'Alembert stipule que  $\delta W = 0$  et comme  $\delta\theta$  est arbitraire alors

$$\begin{aligned} -(m_1 - m_2) \frac{\sqrt{3}}{4} \cos\theta + (m_1 + m_2 + M) \frac{1}{2} \sin\theta &= 0 \\ \implies \operatorname{tg}\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M}. \end{aligned}$$

Notons bien que si  $m_1 = m_2$  alors  $\operatorname{tg}(\theta) = 0$  ce qui est attendu puisque dans ce cas là la barre sera en équilibre dans la position verticale.

### 1.2.13 2<sup>ème</sup> méthode

Etablissons les expressions des vecteurs positions suivants  $\vec{OG} = \frac{a}{2} (\sin\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{j})$ ,  $\vec{OM}_1 = \frac{\sqrt{7}}{4}a [-\sin(\beta - \theta)\vec{i} - \cos(\beta - \theta)\vec{j}]$  et  $\vec{OM}_2 = \frac{\sqrt{7}}{4}a [\sin(\beta + \theta)\vec{i} - \cos(\beta + \theta)\vec{j}]$  ce qui donne pour les déplacements élémentaires

$$\begin{aligned} \delta\vec{OM}_1 &= \frac{\sqrt{7}}{4}a [\cos(\beta - \theta)\vec{i} - \sin(\beta - \theta)\vec{j}] \delta\theta \\ \delta\vec{OM}_2 &= \frac{\sqrt{7}}{4}a [\cos(\beta + \theta)\vec{i} + \sin(\beta + \theta)\vec{j}] \delta\theta \\ \delta\vec{OG} &= \frac{a}{2} [\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}] \delta\theta \end{aligned}$$

et pour le travail élémentaire

$$\delta W = m_1\vec{g} \cdot \delta\vec{OM}_1 + m_2\vec{g} \cdot \delta\vec{OM}_2 + M\vec{g} \cdot \delta\vec{OG}.$$

Comme  $\vec{g} = -g\vec{j}$ , alors

$$\begin{aligned} \delta W &= \left[ +m_1ga \frac{\sqrt{7}}{4} \sin(\beta - \theta) - m_2ga \frac{\sqrt{7}}{4} \sin(\beta + \theta) - Mg \frac{a}{2} \sin\theta \right] \delta\theta \\ &= ga \frac{\sqrt{7}}{4} [m_1 (\sin\beta\cos\theta - \sin\theta\cos\beta) - m_2 (\sin\beta\cos\theta + \sin\theta\cos\beta)] \delta\theta - Mg \frac{a}{2} \sin\theta \delta\theta \\ &= ga \frac{\sqrt{7}}{4} [(m_1 - m_2) \sin\beta\cos\theta - (m_1 + m_2) \cos\beta\sin\theta] \delta\theta - Mg \frac{a}{2} \sin\theta \delta\theta. \end{aligned}$$

Or le principe de d'Alembert donne  $\delta W = 0$  et comme  $\delta\theta$  est arbitraire alors

$$\begin{aligned} ga \frac{\sqrt{7}}{4} [(m_1 - m_2) \sin\beta\cos\theta - (m_1 + m_2) \cos\beta\sin\theta] - Mg \frac{a}{2} \sin\theta &= 0 \\ \implies \operatorname{tg}\theta \left[ M + \frac{\sqrt{7}}{2} (m_1 + m_2) \cos\beta \right] &= \frac{\sqrt{7}}{2} (m_1 - m_2) \sin\beta \\ \implies \operatorname{tg}\theta &= \frac{\frac{\sqrt{7}}{2} (m_1 - m_2) \sin\beta}{M + \frac{\sqrt{7}}{2} (m_1 + m_2) \cos\beta} \end{aligned}$$

avec  $\sin\beta = GM_2/OM_2 = \frac{a\sqrt{3}/4}{a\sqrt{7}/4} = \sqrt{21}/7$  et  $\cos\beta = OG/GM_2 = \frac{a/2}{a\sqrt{7}/4} = 2\sqrt{7}/7$   
ce qui donne finalement

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(m_1 - m_2)}{M + m_1 + m_2}.$$

On vérifie bien que si  $m_1 = m_2$  alors  $\operatorname{tg}\theta = 0 \implies \theta = 0$  ce qui est attendu car dans ce cas la barre sera en équilibre dans la position horizontale.

4. Soient  $\vec{u}_{AB}, \vec{u}_A, \vec{u}_B$  et  $\vec{u}_G$  les vecteurs unitaires respectivement des directions de  $\overrightarrow{AB}, \vec{R}_A, \vec{R}_B$  et  $\overrightarrow{OG}$ . On cherche un déplacement virtuel qui annule le travail de  $\vec{R}_A$ . Pour ce faire, on considère une rotation du cerceau d'un angle  $\varphi$  autour du point  $A$  en fixant  $\theta$ . Considérons le repère fixe  $\mathcal{R}_1(A, x'y'z')$  et la base cartésienne qui lui est associée  $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ . La rotation a lieu donc autour de  $Az'$ . Soit  $\vec{v}_{AB}$  le vecteur unitaire  $\perp$  à  $\vec{u}_{AB}$ . On peut écrire

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= a\sqrt{3}\vec{u}_{AB} \\ \overrightarrow{AM}_1 &= a\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{u}_{AB} \\ \overrightarrow{AG} &= a\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_{AB} \\ \overrightarrow{AM}_2 &= a\frac{3\sqrt{3}}{4}\vec{u}_{AB} \\ \overrightarrow{AB} &= a\sqrt{3}\vec{u}_{AB}.\end{aligned}$$

Comme  $\vec{u}_{AB} = \cos(\theta+\varphi)\vec{i}' + \sin(\theta+\varphi)\vec{j}' \implies \delta\vec{u}_{AB} = \left(-\sin(\theta+\varphi)\vec{i}' + \cos(\theta+\varphi)\vec{j}'\right)\delta\varphi = \delta\varphi\vec{v}_{AB}$ . Le travail élémentaire engendré lors du déplacement virtuel, calculé dans  $\mathcal{R}_1$ , est alors égal à

$$\delta W = m_1\vec{g} \cdot \delta\overrightarrow{AM}_1 + m_2\vec{g} \cdot \delta\overrightarrow{AM}_2 + M\vec{g} \cdot \delta\overrightarrow{AG} + \vec{R}_B \cdot \delta\overrightarrow{AB}$$

sachant que  $\vec{R}_A$  ne travaille pas car le point  $A$  ne se déplace pas.

Or  $\vec{g} = -g\vec{j}' = -g[\sin(\theta+\varphi)\vec{u}_{AB} + \cos(\theta+\varphi)\vec{v}_{AB}] \implies \vec{g} \cdot \vec{v}_{AB} = -g\cos(\theta+\varphi)$   
et  $\vec{R}_A = R_B\vec{u}_B = R_B\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_{AB} + \frac{1}{2}\vec{v}_{AB}\right] \implies \vec{R}_A \cdot \vec{v}_{AB} = \frac{1}{2}R_B$ . En substituant les différentes expressions dans le résultat du travail élémentaire, on obtient

$$\delta W = \left(-ag\sqrt{3}\cos(\theta+\varphi)\left[\frac{m_1}{4} + \frac{M}{2} + \frac{3m_2}{4}\right] + a\frac{\sqrt{3}}{2}R_B\right)\delta\varphi.$$

Or  $\delta\varphi$  est arbitraire ce qui implique que  $\delta W = 0$  et donne

$$R_B = g\cos(\theta+\varphi)\left(\frac{m_1}{2} + M + \frac{3m_2}{2}\right)$$

Cette dernière relation est valable quelque soit  $\varphi$  et particulièrement pour  $\varphi = 0$  ce qui donne comme résultat final

$$R_B = g\cos\theta\left(\frac{m_1}{2} + M + \frac{3m_2}{2}\right).$$

## 1.2.14 Corrigé

1. Calculons  $\frac{d\tilde{I}}{d\alpha}$ . Tout d'abord rappelons que

$$\frac{d}{d\alpha} = \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial z'}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial \alpha}$$

avec  $z' = \partial z / \partial x$ . Ainsi,

$$\frac{d\tilde{I}}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F [z(x, \alpha), \frac{\partial z}{\partial x}(x, \alpha), x]}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} + \frac{\partial F [z(x, \alpha), \frac{\partial z}{\partial x}(x, \alpha), x]}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial \alpha} \right] dx.$$

Or  $\partial z / \partial \alpha = \eta(x)$  et  $z' = y'(x) + \alpha \eta'(x) \implies \partial z' / \partial \alpha = \eta'(x)$ , ce qui donne

$$\frac{d\tilde{I}}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial z} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial z'} \eta'(x) \right] dx.$$

On intègre le deuxième terme par partie

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial z'} \eta'(x) dx = \left[ \frac{\partial F}{\partial z'} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F}{\partial z'} \right] \eta(x) dx$$

comme  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \implies \left[ \frac{\partial F}{\partial z'} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} = 0$  et nous obtenons

$$\frac{d\tilde{I}}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F}{\partial z'} \right] \right) \eta(x) dx$$

2. Sachant que  $I[y]$  est extrémale si  $\frac{d\tilde{I}}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0$ , et comme

$$\frac{\partial F [z(x, \alpha), \frac{\partial z}{\partial x}(x, \alpha), x]}{\partial z} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial F (y, y', x)}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial F [z(x, \alpha), \frac{\partial z}{\partial x}(x, \alpha), x]}{\partial z'} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial F (y, y', x)}{\partial y'}$$

nous pouvons écrire

$$\frac{d\tilde{I}}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F (y, y', x)}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F (y, y', x)}{\partial y'} \right] \right) \eta(x) dx$$

comme  $\eta(x)$  est arbitraire alors

$$\frac{d\tilde{I}}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0 \implies \frac{\partial F (y, y', x)}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F (y, y', x)}{\partial y'} \right] = 0$$

et qui n'est d'autre que l'équation d'Euler.

3. Le chemin optique est donné par

$$L = \int nds$$

$$= \int n\sqrt{dy^2 + dx^2} = \int n\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int n(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx.$$

En partant des résultats de la question précédente, on peut noter que

$$F(y, y', x) = n(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

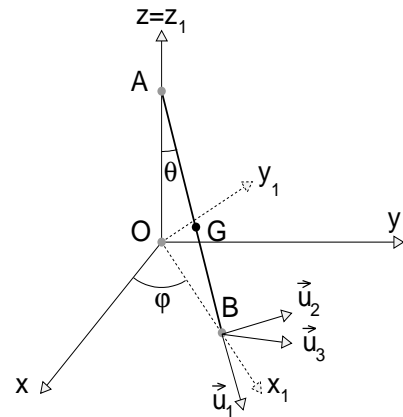
On note que  $F(y, y', x)$  ne dépend pas de  $y$  et en appliquant l'équation d'Euler

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = n \frac{d}{dx} \left[ \frac{y'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = 0$$

ce qui donne  $y' = \text{Cte} \implies y = ax + b$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes. On en conclut que le chemin emprunté par la lumière selon le principe de Fermat est une droite.

### 1.2.15 Corrigé

Soit  $\mathcal{R}(Oxyz)$  un repère galiléen et soit  $AB$  une barre homogène pesante de masse  $m$  et de longueur  $2a$  et de section négligeable. L'extrémité  $A$  de la barre glisse sans frottement le long de  $Oz$  et l'extrémité  $B$  glisse sans frottement sur le plan  $Oxy$ . On désigne par  $\varphi$  l'angle que fait  $OB$  avec  $Ox$ ,  $\theta$  celui que fait  $AB$  avec  $AO$ . Soit  $\mathcal{R}_1(Ox_1y_1z_1)$  le repère relatif tel que  $Ox_1$  est porté par  $OB$ , voir figure ci-contre.



Soient  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  la base cartésienne liée à  $\mathcal{R}$ ,  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1 \equiv \vec{k})$  la base cartésienne liée à  $\mathcal{R}_1$  et  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  une base orthonormée directe telle que  $\vec{u}_1$  est le vecteur unitaire de la direction de  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{u}_2$  appartient au plan contenant  $(\vec{k}, \vec{u}_1)$  et  $\vec{u}_3$  perpendiculaire à ce plan. Autrement dit,  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  est liée aux axes principaux de la barre.

- Bilan des forces sachant que les réactions sont normales étant donné que la barre glisse sans frottement en  $A$  et en  $B$  :
  - le poids  $m\vec{g} = -mg\vec{k}$ ;
  - la réaction de  $Oz$  sur la barre au point  $A$  :  $\vec{R}_A = R_A\vec{i}_1$ ;
  - la réaction du plan  $(Oxy)$  sur la barre au point  $B$  :  $\vec{R}_B = R_B\vec{k}_1$ ;

2. Relevons les contraintes :

- L'extrémité  $A$  glisse sur  $Oz$  ce qui implique deux contraintes  $x_A = 0$  et  $y_A = 0$  ;
  - $B$  glisse sur le plan  $(Oxy)$  ce qui donne une contrainte  $z_B = 0$ ,
- ce qui donne au total trois contraintes.

Etant donnée que la section de la barre est négligeable alors le nombre de degrés de liberté est de 5, les trois coordonnées de  $G$  et deux rotations repérées par  $\varphi$  et  $\theta$ . En raison des trois contraintes, le nombre de degrés de liberté est finalement 2. Les coordonnées généralisées que l'on utilisera sont  $\varphi$  et  $\theta$ .

Une deuxième approche consiste à retrouver les paramètres indépendants qui décrivent le mouvement de la barre. On part de cinq paramètres  $(x_G, y_G, z_G, \theta, \varphi)$  puisque la barre est de section négligeable,  $G$  étant le centre de masse de la barre. Comme

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BG} \\ &= 2a\sin\theta \left( \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j} \right) + a\cos\theta\vec{k}\end{aligned}$$

et donc  $x_G = 2a\sin\theta\cos\varphi$ ,  $y_G = 2a\sin\theta\sin\varphi$ ,  $z_G = a\cos\theta$ . Il suffit alors des deux angles  $\theta$  et  $\varphi$  pour décrire le mouvement. Et donc le nombre de degrés de liberté est égal à 2.

3. L'énergie cinétique de la barre est obtenue en utilisant le théorème de Koenig :

$$T = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}{}^t\Omega J_G \Omega$$

où  $V_G$  est la vitesse du centre de masse,  $\Omega$  est la matrice colonne composée par les composantes du vecteur rotation  $\vec{\omega}(AB/\mathcal{R})$ , qui rappelons le est le même que celui par rapport au référentiel du centre de masse, et  $J_G$  est la matrice d'inertie au point  $G$ . Exprimons  $\Omega$  et  $J_G$  dans le repère principal de la barre dont les axes principaux ont pour vecteurs unitaires  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ , voir figure. Aussi la matrice d'inertie dans  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  de la barre est alors donnée par

$$J_G = \frac{1}{3}ma^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et le vecteur rotation a pour expression dans cette base

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \dot{\varphi}\vec{k} - \dot{\theta}\vec{j}_1 \\ &= \dot{\varphi}(-\cos\theta\vec{u}_1 + \sin\theta\vec{u}_2) - \dot{\theta}\vec{u}_3.\end{aligned}$$

Rappelons que  $\vec{u}_3$  est parallèle  $\vec{j}_1$ . Aussi,

$$\Omega = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}\cos\theta \\ \dot{\varphi}\sin\theta \\ -\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} {}^t \Omega J_G \Omega &= \frac{1}{6} m a^2 \begin{pmatrix} -\dot{\varphi} \cos \theta & \dot{\varphi} \sin \theta & -\dot{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\varphi} \cos \theta \\ \dot{\varphi} \sin \theta \\ -\dot{\theta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} m a^2 \left( \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \right) \end{aligned}$$

Quant à la vitesse du centre de masse

$$\begin{aligned} \vec{V}_G &= \left. \frac{d}{dt} \left( a \cos \theta \vec{k} + a \sin \theta \vec{i}_1 \right) \right|_{\mathcal{R}} \\ &= -a \dot{\theta} \sin \theta \vec{k} + a \dot{\theta} \cos \theta \vec{i}_1 + a \dot{\varphi} \sin \theta \vec{j}_1 \\ \implies V_G^2 &= a^2 \dot{\theta}^2 + a^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

L'énergie cinétique est ainsi donnée par

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m a^2 \left[ \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right] + \frac{1}{6} m a^2 \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) \\ &= \frac{2}{3} m a^2 \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) \end{aligned}$$

4. Comme  $\vec{R}_A$  et  $\vec{R}_B$  ne travaillent pas,  $\vec{R}_A \cdot \delta \vec{O}\vec{A} = \vec{R}_B \cdot \delta \vec{O}\vec{B} = 0$ , alors

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= m \vec{g} \cdot \frac{\partial \vec{O}\vec{G}}{\partial \varphi} = -m g \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( a \cos \theta \vec{k} + a \sin \theta \vec{i}_1 \right) = 0 \\ Q_\theta &= m \vec{g} \cdot \frac{\partial \vec{O}\vec{G}}{\partial \theta} = -m g \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( a \cos \theta \vec{k} + a \sin \theta \vec{i}_1 \right) = m g a \sin \theta \end{aligned}$$

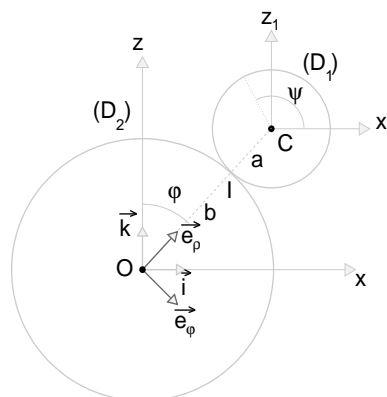
5. Les équations de Lagrange en fonction de l'énergie cinétique et des composantes généralisées des forces sont données par

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_\varphi \implies \frac{4}{3} m a^2 \frac{d(\dot{\varphi} \sin^2 \theta)}{dt} = 0 \implies \dot{\varphi} \sin^2 \theta = \text{constante} = K \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= Q_\theta \implies \frac{4}{3} m a^2 \ddot{\theta} - \frac{2}{3} m a^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\theta = m g a \sin \theta \\ \implies \ddot{\theta} - K \frac{\cot \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{3g}{4a} \sin \theta &= 0 \end{aligned}$$



## 1.2.16 Corrigé

Un disque  $D_1$  de rayon  $a$  et de centre de masse  $C$  roule sans glisser sur un deuxième disque  $D_2$  de rayon  $b$ . A l'instant  $t = 0$ ,  $D_1$  est situé au sommet de  $D_2$ , figure ci-contre.  $(D_1)$  tourne avec une vitesse angulaire  $\dot{\psi}$ . La position de  $(C)$  est repérée par l'angle  $\varphi$ . On se limite au cas où  $(D_1)$  reste en contact avec  $(D_2)$ . On utilise dans cet exercice la méthode des multiplicateurs de Lagrange.



Soit  $\mathcal{R}(O, xyz)$  le référentiel lié à  $(D_2)$  et  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  sa base cartésienne, supposé galiléen. Et soit  $\mathcal{R}_c(C, x_1 y_1 z_1)$  le référentiel du centre de masse de  $(D_1)$  dont la base cartésienne est  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ . Notons que  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, -\vec{j} \equiv -\vec{j}_1)$  forme une base directe.

1. La condition de roulement sans glissement de  $(D_1)$  sur  $(D_2)$  est

$$\vec{V}(I \in D_1/\mathcal{R}) = \vec{V}(I \in D_2/\mathcal{R})$$

comme  $(D_2)$  est immobile alors la condition de roulement sans glissement est

$$\begin{aligned} \vec{V}(I \in D_1) &= -\dot{\varphi} \vec{j} \wedge (a+b) \vec{e}_\rho - \dot{\psi} \vec{j}_1 \wedge (-a \vec{e}_\rho) \\ &= \left( (a+b) \dot{\varphi} - a \dot{\psi} \right) \vec{e}_\varphi = \vec{0} \implies (a+b) \dot{\varphi} - a \dot{\psi} = 0 \end{aligned}$$

2. Le mouvement de  $(D_1)$  est décrit par celui d'un point de référence, que l'on prend égal à  $C$ , et trois rotations. Comme le mouvement a lieu dans le plan  $Oxz$ , cela réduit les paramètres décrivant le mouvement de  $C$  à  $x_c$  et  $z_c$  et celui décrivant la rotation de  $(D_1)$  autour de  $Cy_1$  à l'angle  $\psi$ . Comme  $(D_1)$  reste en contact avec  $(D_2)$  alors la réaction normale en  $I$  de  $(D_2)$  sur  $(D_1)$  est non nulle, ce qui implique que  $OC = a + b$  et  $x_c = (a+b) \cos \varphi$  et  $z_c = (a+b) \sin \varphi$ . Aussi, les paramètres décrivant le mouvement de  $(D_1)$  sont  $\varphi$  et  $\psi$  qui sont liés par la condition de roulement sans glissement.
3. L'énergie cinétique de  $(D_1)$  est obtenue en appliquant le théorème de Koenig, sachant que  $(D_1)$  est en rotation dans  $\mathcal{R}_c$  autour de l'axe  $\Delta = Cy_1$ , par

$$T(D_1) = \frac{1}{2} m \vec{V}(C/\mathcal{R})^2 + \frac{1}{2} J_\Delta \Omega^2$$

où  $J_\Delta = \frac{1}{2} m a^2$  est le moment cinétique de  $(D_1)$  par rapport à  $Cy_1$  et  $\vec{\Omega}$  est le vecteur rotation de  $(D_1)$  dans  $\mathcal{R}_1$  qui est égal à  $\vec{\Omega} = -\dot{\psi} \vec{j}_1$ . Aussi

$$\vec{V}(C/\mathcal{R}) = -\dot{\varphi} \vec{k} \wedge (a+b) \vec{e}_\rho = (a+b) \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \implies T(D_1) = \frac{1}{2} m (a+b)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} m a^2 \dot{\psi}^2.$$

Quant à l'énergie potentielle,

$$\begin{aligned} dV &= m\vec{g} \cdot d\vec{OC} = -mg(a+b)\vec{k} \cdot d\varphi\vec{e}_\varphi \\ &= mg(a+b)\sin\varphi d\varphi \implies V = -mg(a+b)\cos\varphi + V_0. \end{aligned}$$

On prend  $V(\varphi = 0) = 0 = V_0$  ce qui donne  $V = -mg(a+b)\cos\varphi$ .

4. Le lagrangien de ( $D_1$ ) est donné par

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m(a+b)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}ma^2\dot{\psi}^2 + mg(a+b)\cos\varphi. \end{aligned}$$

Pour établir les équations du mouvement nous avons besoin d'introduire les multiplicateurs de Lagrange. Comme nous avons une seule liaison  $f(\varphi, \psi)$  que l'on peut déduire de la condition de roulement sans glissement en intégrant sur le temps :  $f(\varphi, \psi) = (a+b)\varphi - a\psi - K = 0$  où  $K$  est une constante. Aussi, nous introduisons un seul multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  et les équations de mouvement deviennent

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= -mg(a+b)\sin\varphi - m(a+b)^2\ddot{\varphi} + \lambda(a+b) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \psi} &= -\frac{1}{2}ma^2\ddot{\psi} - a\lambda = 0 \implies \lambda = -\frac{1}{2}ma\ddot{\psi} \\ (a+b)\dot{\varphi} - a\dot{\psi} &= 0 \implies \ddot{\psi} = \frac{a+b}{a}\ddot{\varphi} \implies \lambda = -\frac{1}{2}m(a+b)\ddot{\varphi} \end{aligned}$$

ce qui permet de déduire les équations du mouvement

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \frac{2g}{3(a+b)}\sin\varphi &= 0 \\ \ddot{\psi} &= \frac{a+b}{a}\ddot{\varphi} \end{aligned}$$

5. Retrouvons les expressions des composantes généralisées de la réaction tangentielle  $\vec{R}_T$  selon  $\varphi$  et  $\psi$  :

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \lambda(a+b) = -\frac{1}{2}m(a+b)^2\ddot{\varphi} = \frac{mg(a+b)}{3}\sin\varphi \\ Q_\psi &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \psi} = -a\lambda = \frac{1}{2}ma(a+b)\ddot{\varphi} = -\frac{1}{3}mg a \sin\varphi \end{aligned}$$

### 1.2.17 Corrigé

Une particule de masse  $m$  et de charge  $q$  se déplace dans une région où règne un champ électromagnétique ( $\vec{E} = -\vec{\nabla}(\varphi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ,  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ ), où  $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z; t)$  et  $\varphi = \varphi(x, y, z; t)$  sont respectivement le potentiel scalaire et le potentiel vecteur et  $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$

est l'opérateur nabla. La position de la particule est repérée par les coordonnées  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  et sa vitesse est donnée par  $\vec{v} = (v_1 = \dot{x}_1, v_2 = \dot{x}_2, v_3 = \dot{x}_3)$ . Les coordonnées généralisées et les vitesses généralisées coïncident avec les coordonnées et les composantes de la vitesse de la particule.

1. On sait que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \\ &= \vec{v} \cdot \vec{\nabla} + \frac{\partial}{\partial t}\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\frac{d\vec{A}_i}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(A_i) + \frac{\partial A_i}{\partial t}$$

aussi on écrit de manière générique

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

2. Sachant que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \implies \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = v_j \vec{\nabla} A_j - (v_j \nabla_j) \vec{A}$$

Rappelons que tout indice répété correspond à une somme sur cet indice. Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{F_i}{q} &= E_i + (\vec{v} \wedge \vec{B})_i \\ &= -\nabla_i \varphi - \frac{\partial A_i}{\partial t} + v_j \nabla_i A_j - (v_j \nabla_j) A_i \\ &= -\nabla_i \varphi - \frac{dA_i}{dt} + \vec{v} \cdot \nabla A_i + v_j \nabla_i A_j - \vec{v} \cdot \nabla A_i \\ &= -\nabla_i \varphi - \frac{dA_i}{dt} + v_j \nabla_i A_j\end{aligned}$$

or  $v_j \nabla_i A_j = \nabla_i (v_j A_j)$ , car  $x_i$  et  $v_i$  sont indépendantes les unes des autres, et

$$\frac{\partial}{\partial v_i} (\varphi - v_j A_j) = -\frac{\partial v_j}{\partial v_i} A_j = -\delta_{ij} A_j = -A_i.$$

Nous avons utilisé le fait que  $\varphi$  et  $\vec{A}$  ne dépendent pas des vitesses. Ce qui permet d'écrire finalement

$$F_i = q \left( -\nabla_i (\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}) + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_i} (\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial v_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

avec  $V = q (\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A})$ , et qui n'est d'autre que la relation recherchée.

3. Le lagrangien de la particule chargée soumise à l'action de la force de Lorentz est alors

$$L(x_i, \dot{x}_i; t) = T - V = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - q (\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A})$$

4. Calculons les moments conjugués

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_1$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + qA_2$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + qA_3$$

5. Le hamiltonien de la particule est donné par

$$\begin{aligned} H(x_i, p_i; t) = p_i \dot{x}_i - L &= m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + q\vec{v} \cdot \vec{A} - \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + q (\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \\ &= \frac{1}{2} m v^2 + q\varphi. \end{aligned}$$

Comme le champ magnétique ne travaille pas, le potentiel vecteur ne figure pas dans l'expression du hamiltonien. De même, l'énergie mécanique de la particule est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie  $q\varphi$ .

### 1.2.18 Corrigé

Considérons une particule qui se déplace dans le plan ( $OXY$ ). Sachant que l'énergie cinétique  $T = T(\dot{x}, \dot{y})$  et que  $\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = T - V$ , dire quelle est la loi de symétrie à laquelle obéit le lagrangien et quelle grandeur est conservée dans les cas suivants :

1.  $V(x, y, t) = ax$

Comme le potentiel ne dépend pas explicitement du temps, alors le lagrangien non plus et donc l'énergie mécanique du système est conservée ;

$y$  est une variable cyclique, alors  $p_y$ , l'impulsion selon  $Oy$ , est conservée ;

2.  $V(x, y) = at(x^2 + y^2)$  :

Le potentiel dépend de  $r^2$  et donc invariant par rapport à une rotation par rapport à n'importe quel axe ce qui implique que le moment cinétique par rapport au point  $O$  est conservé.

3.  $V(x, y) = a(x - y)$

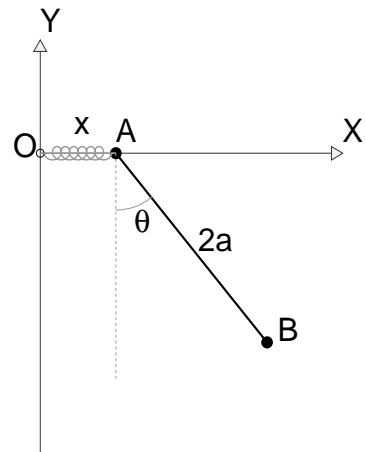
Le potentiel ne dépend pas explicitement du temps alors l'énergie mécanique est conservée. De même si l'on fait une translation de  $s$  selon  $Ox$ ,  $x \rightarrow x' = x + s$ , et selon  $Oy$ ,  $y \rightarrow y' = y + s$  alors  $V(x', y') = a(x' - y') = a(x - y) = V(x, y)$ . Et donc le lagrangien est invariant par rapport à cette translation. Notons que le fait que l'on fasse la même translation selon  $Ox$  et  $Oy$ , la translation résultante se fait selon la médiatrice et donc selon le théorème de Noether, l'impulsion est conservée selon la direction de cette médiatrice.

### 2.1 Exercices

#### 2.1.1 Exercice

On considère une barre  $AB$  homogène de longueur  $2a$  et de masse  $m$  dont l'extrémité  $A$  est attachée à un ressort de constante de raideur  $k$ . L'extrémité  $A$  est assujettie à se déplacer sans frottement sur l'axe  $Ox$  d'un repère  $\mathcal{R}(Oxyz)$  supposé galiléen. On repère la position de  $A$  le long de  $Ox$  par  $OA = x$ . La barre  $AB$  reste dans le plan vertical  $Oxy$  et fait un angle  $\theta$  avec la verticale passant par  $A$ , voir figure ci-contre. On négligera la longueur à vide du ressort.

1. Montrer que la barre admet deux degrés de liberté.  
On utilise les coordonnées généralisées  $x$  et  $\theta$ .
2. Etablir les expressions de l'énergie cinétique  $T$  et de l'énergie potentielle  $V$  de la barre  $AB$ . En déduire le lagrangien  $L$  et les équations du mouvement.
3. Déterminer les moments conjugués  $p_x$  et  $p_\theta$  relatifs aux coordonnées généralisées  $x$  et  $\theta$ .
4. En déduire le hamiltonien  $H$  et retrouver les équations du mouvement.



### 2.1.2 Exercice

On considère un électron de masse  $m$  et de charge  $-e$  soumis à l'attraction électrostatique d'un noyau  $+Ze$ . On considère que le référentiel lié au noyau est galiléen. On utilisera les coordonnées sphériques comme coordonnées généralisées.

1. Ecrire le potentiel  $V(\vec{r})$  en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ . On posera  $k = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$ .
2. Ecrire le lagrangien du système  $L(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}; t)$ .
3. Donner l'expression du hamiltonien  $H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi; t)$ . Que représente-t-il? est-il conservé? Justifier.
4. Trouver une autre constante du mouvement. Quelle est son interprétation? Cette constante peut être choisie égale à zéro. Pourquoi?  
Montrer que ce choix est équivalent à prendre  $\varphi(t) = \text{constante} \forall t$ . Avec ce choix, donner l'expression du nouveau hamiltonien.
5. Ecrire les équations de Hamilton et identifier une nouvelle constante du mouvement.
6. Montrer qu'un mouvement circulaire est possible. Donner le rayon  $r_c$  du cercle en fonction des données initiales  $r_0$  et  $\dot{\theta}_0$ . En déduire l'expression de la vitesse angulaire à communiquer à l'électron pour que  $r_c$  soit égal à  $r_0$ .

### 2.1.3 Exercice

Considérons un système à un degré de liberté et soit  $M$  un point de l'espace des phases dont les coordonnées sont  $(q, p)$ . Le point  $M'$  est le point de l'espace des phases de coordonnées  $(Q, P)$  obtenu à partir de  $M$  par une rotation d'un angle  $\alpha$ . On cherche à montrer que cette rotation est une transformation canonique et à déterminer une fonction génératrice  $F(q, Q)$  qui la décrit.

1. Etablir la matrice jacobienne de la transformation et montrer que la transformation est canonique.
2. De quel type est la fonction génératrice  $F(q, Q)$ ? En déduire les expressions de  $p$  et de  $P$ .
3. Déterminer l'expression de  $F(q, Q)$ .
4. Soient  $X(q, p)$  et  $Y(q, p)$  deux grandeurs dynamiques. Montrer que le crochet de Poisson de  $X$  et de  $Y$  satisfait

$$[X, Y]_{q,p} = \frac{\partial X}{\partial Q} \frac{\partial Y}{\partial P} - \frac{\partial X}{\partial P} \frac{\partial Y}{\partial Q}.$$

Conclure.

### 2.1.4 Exercice

Les quatre types des fonctions génératrices décrivant les transformations canoniques peuvent s'obtenir les uns des autres par des transformations de Legendre. On se propose d'en montrer quelques exemples.

1. En partant de  $F_1(q, Q)$  et de ses propriétés, montrer que  $F_2(q, P)$  n'est que la transformée de Legendre de  $F_1$  par rapport à  $Q$ .
2. Comment peut-on engendrer la transformation de type  $F_3(p, Q)$  ?

### 2.1.5 Exercice

Considérons la transformation donnée par

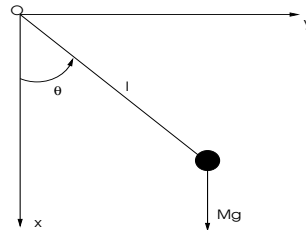
$$\begin{aligned} q_1 &= Q_1 \cos \alpha + \frac{P_2}{m\omega} \sin \alpha & q_2 &= Q_2 \cos \alpha + \frac{P_1}{m\omega} \sin \alpha \\ p_1 &= -m\omega Q_2 \sin \alpha + P_1 \cos \alpha & p_2 &= -m\omega Q_1 \sin \alpha + P_2 \cos \alpha \end{aligned}$$

1. Etablir l'expression de la matrice jacobienne  $M$ . Est-elle symplectique ? Commenter.
2. On cherche la fonction génératrice  $F_2(q_i, P_i)$  de type 2, où  $i = 1, 2$ , décrivant cette transformation.
  - i- Déterminer la fonction génératrice  $F_2$  en fonction  $m, \omega$  et  $\alpha$ , ces dernières étant constantes.
  - ii- Etablir l'expression du nouvel hamiltonien  $H'(Q, P)$  si

$$H(q_i, p_i) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (q_1^2 + q_2^2).$$

### 2.1.6 Exercice

Soit un pendule inextensible de longueur  $l$  et de masse  $m$  placée dans un champ de pesanteur  $g$  et astreint à se déplacer dans un plan  $(x, y)$ . Le mouvement du pendule est repéré par l'angle  $\theta$ . La coordonnée généralisée choisie est  $q = \theta$  ; son moment conjugué étant  $p$ .



1. Donner l'expression de l'énergie cinétique  $T$  et du potentiel  $V$  du système. En déduire l'expression du Lagrangien.
2. On pose  $I = ml^2$  et  $\omega^2 = g/l$ . Etablir l'expression du Hamiltonien  $\mathcal{H}(p, q)$ . Justifier que le Hamiltonien est conservé  $\mathcal{H} = E$ .  
La nature du mouvement du pendule va dépendre de la valeur prise par  $E$ . On prend  $E$  comme paramètre et on étudie la dynamique du système dans l'espace de phase  $(p, q)$ .
3. Exprimer  $p$  en fonction de  $q$  et discuter la nature du mouvement en fonction de la valeur prise par  $E$ .
4. Montrer que les positions  $q_e = 0, \pm\pi$  sont des positions d'équilibre. Préciser à chaque fois si l'équilibre est stable ou non.

5. On pose  $x = q - q_e$  et on étudie le mouvement autour des positions d'équilibre. Pour ce faire, on fait un développement limité à l'ordre 2.
- $q_e = 0$  : Montrer que dans ce cas la trajectoire dans l'espace de phase est une ellipse. En utilisant les équations de Hamilton, établir l'équation différentielle du mouvement en  $\theta$  et donner la solution  $\theta(t)$ .
  - $q_e = \pm\pi$  : Montrer que dans ce cas la trajectoire dans l'espace de phase est une hyperbole. En utilisant les équations de Hamilton, établir l'équation différentielle du mouvement en  $\theta$  et donner la solution  $\theta(t)$ .

### 2.1.7 Exercice

Une particule de masse  $m$  évolue à une dimension  $x$ . Elle est soumise à la force

$$F(x) = -kx - \gamma \frac{dx}{dt}, \quad k > 0, \gamma > 0.$$

1. Interpréter chacun des termes.
2. En appliquant le PFD, montrer que les équations du mouvement dans l'espace de phases peuvent se mettre sous la forme matricielle  $\dot{E} = AE$  avec  $E^T = (x, p)$  où  $(x, p)$  est la coordonnée de position et son moment conjugué. Expliciter l'expression de  $A$ .
3. Résoudre les équations du mouvement en fonction des directions principales.<sup>1</sup> Noter par  $(X, P)$  les nouvelles coordonnées obtenus Donner une description précise des trajectoires, de la fréquence d'oscillation et du coefficient d'amortissement.

### 2.1.8 Exercice

Considérons une particule libre évoluant selon une dimension  $x$  entre deux murs, séparés par une distance égale à  $L$ , dont le potentiel peut être modélisé comme suit

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < L \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Tracer le portrait de phase.

### 2.1.9 Exercice

Considérons le potentiel<sup>2</sup>

$$U(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}\beta x^2.$$

1. Diagonaliser  $A$ , trouver ses vecteurs propres et la matrice de passage  $P$  correspondante. Exprimer  $E$  dans la base formée par les vecteurs propres.
2. Ce potentiel peut modéliser une tige métallique de longueur  $L$  tenue verticalement à sa base. Le paramètre  $\beta$  est relié à la longueur  $L$ .  $x$  correspond à l'écart entre le sommet de la tige et la verticale.

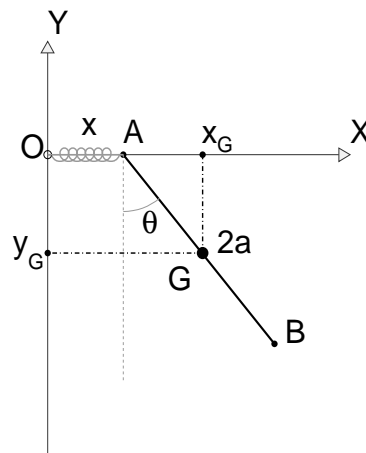


1. Etudier les points fixes de  $U(x)$  en fonction de  $\beta$  et leurs stabilités. Tracer  $U(x)$  en fonction de  $x$  et ce selon  $\beta$ .
2. Tracer la position des points fixes en fonction de  $\beta$  et préciser leurs stabilités (Prendre  $\beta$  en ordonnée et  $x$  en abscisse). On suppose qu'il y a une légère force supplémentaire de dissipation qui stabilise l'état dans un minimum de potentiel.
3. On suppose que  $\beta$  oscille lentement et périodiquement entre  $\beta_{min} = -0.5$  et  $\beta_{max} = 0.5$ . Discuter l'évolution des positions des points fixes. Commenter.

## 2.2 Corrigés

### 2.2.1 Corrigé

On considère une barre  $AB$  homogène de longueur  $2a$  et de masse  $m$  dont l'extrémité  $A$  est attachée à un ressort de constante de raideur  $k$ . L'extrémité  $A$  est assujettie à se déplacer sans frottement sur l'axe  $Ox$  d'un repère  $\mathcal{R}(Oxyz)$  supposé galiléen. On repère la position de  $A$  le long de  $Ox$  par  $OA = x$ . La barre  $AB$  reste dans le plan vertical  $Oxy$  et fait un angle  $\theta$  avec la verticale passant par  $A$ , voir figure ci-contre. On négligera la longueur à vide du ressort.



1. Le mouvement de la barre est repéré par les trois coordonnées du centre de gravité de la barre situé à son milieu et trois rotations. Comme le mouvement de la barre a lieu dans le plan vertical ce qui réduit les rotations à une seule repérée par  $\theta$ . Quant au centre de gravité, que l'on note par  $G$ , sa position est repérée par

$$\vec{OG} = \begin{cases} x_G = x + a \sin \theta \\ y_G = -a \cos \theta \end{cases}$$

où  $x_G$  et  $y_G$  sont les coordonnées de  $G$ . Aussi, on voit que la position de  $G$  peut être repérée par  $x$  et  $\theta$  et donc le mouvement de la barre est complètement repéré par  $x$  et  $\theta$ , ce qui montre bien que le nombre de degrés de liberté est égal à 2.

2. En appliquant le théorème de Koenig, l'énergie cinétique de la barre est

$$T = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

où  $V_G$  est la vitesse du centre de masse et  $I = m\frac{a^2}{3}$  est le moment d'inertie par rapport à  $GZ$ . Calculons  $V_G$  :

$$\vec{V}_G = \begin{cases} \dot{x}_G = \dot{x} + a\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_G = a\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \implies V_G^2 = \dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

ce qui donne pour l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m \left( \dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta \right) + \frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2.$$

Le bilan des forces est la force de rappel du ressort,  $\vec{F} = -k\vec{x}$ , le poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  et la réaction normale de l'axe  $\vec{R}_N$  qui ne travaille pas puisqu'elle est perpendiculaire aux déplacements de  $A$ . Aussi l'énergie potentielle associée au poids et à la force de rappel est

$$\begin{aligned} dV &= -\vec{F} \cdot d\vec{A} - m\vec{g} \cdot d\vec{G} \\ &= kxdx + mg\sin\theta d\theta \\ \implies V(x, \theta) &= \frac{1}{2}kx^2 - mg\cos\theta + V_0. \end{aligned}$$

$V_0$  est déterminée à partir des conditions initiales. On peut prendre  $V_0 = 0$  sans que cela n'influe sur les équations du mouvement ou prendre  $V(x = 0, \theta = 0) = 0 = -mga + V_0 \implies V_0 = mga \implies V(x, \theta) = \frac{1}{2}kx^2 + mga(1 - \cos\theta)$ .

Le lagrangien est ainsi donné par

$$\begin{aligned} L(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m \left( \dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta \right) + \frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - mga(1 - \cos\theta). \end{aligned}$$

A partir de l'expression de  $L$ , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -kx \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} + ma\dot{\theta}\cos\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -ma\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - mg\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ma^2\dot{\theta} + ma\dot{x}\cos\theta + \frac{1}{3}ma^2\dot{\theta} = \frac{4}{3}ma^2\dot{\theta} + ma\dot{x}\cos\theta \end{aligned}$$

Les équations de Lagrange sont comme suit

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= -kx - m\ddot{x} - ma\ddot{\theta}\cos\theta + ma\dot{\theta}^2\sin\theta = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= -ma\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - mga\sin\theta - \frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta} - ma(\ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta) \\ &= -\frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta} - mga\sin\theta - ma\ddot{x}\cos\theta = 0.\end{aligned}$$

ce qui donne pour les équations de mouvement

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \frac{k}{m}x &= a(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) \\ \ddot{\theta} + \frac{3}{4a}(g\sin\theta + \ddot{x}\cos\theta) &= 0\end{aligned}$$

3. Etablissons les expressions des moments conjugués

$$\begin{aligned}p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + ma\dot{\theta}\cos\theta \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4}{3}ma^2\dot{\theta} + ma\dot{x}\cos\theta\end{aligned}$$

4. Le hamiltonien est ainsi donné par

$$\begin{aligned}H &= p_x\dot{x} + p_\theta\dot{\theta} - L \\ &= m\dot{x}^2 + ma\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{4}{3}ma^2\dot{\theta}^2 + ma\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta - \\ &\quad - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) - \frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mga(1 - \cos\theta) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) + \frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mga(1 - \cos\theta) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x} + a\dot{\theta}\cos\theta)^2 - \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \\ &\quad + \frac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mga(1 - \cos\theta) \\ &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2\left(\frac{4}{3} - \cos^2\theta\right) + \frac{1}{2}kx^2 + mga(1 - \cos\theta)\end{aligned}$$

**Remarquer que dans le cas où l'on peut pas exprimer directement  $H$  seulement en fonction des coordonnées généralisées et des moments conjugués, on part du système d'équations définissant les moment conjugués et on en tire les expressions  $\dot{x} = f(x, \theta, p_x, p_\theta)$  et  $\dot{\theta} = g(x, \theta, p_x, p_\theta)$  et on les substitue dans l'expression de  $H$ .** Dans ce cas, il reste à exprimer  $\theta$  en fonction des moments conjugués et de la substituer dans  $H$ . En utilisant le système d'équations exprimant les moments conjugués, on en tire

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta - ap_x\cos\theta}{ma^2\left(\frac{4}{3} - \cos^2\theta\right)}$$

ce qui donne pour le hamiltonien exprimé en fonction des coordonnées généralisées et les moments conjugués

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2ma^2} (p_\theta - ap_x \cos\theta)^2 \frac{1}{\left(\frac{4}{3} - \cos^2\theta\right)} + \frac{1}{2}kx^2 + mga(1 - \cos\theta)$$

Les équations canoniques donnent

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} + \frac{-\cos\theta}{ma} \frac{p_\theta - ap_x \cos\theta}{\frac{4}{3} - \cos^2\theta} = \frac{p_x}{m} - a\dot{\theta} \cos\theta \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx \implies m(\ddot{x} + a\ddot{\theta} - a\dot{\theta}^2 \sin\theta) = -kx \end{aligned}$$

et qui n'est d'autre que la première équation établie auparavant.

Quant au système des équations canoniques en  $\theta$  et  $p_\theta$ , demander aux étudiants de le faire chez eux.

## 2.2.2 Corrigé

On considère un électron de masse  $m$  et de charge  $-e$  soumis à l'attraction électrostatique d'un noyau  $+Ze$ . On considère que le référentiel lié au noyau est galiléen. On utilisera les coordonnées sphériques comme coordonnées généralisées.

1. Le potentiel  $V(\vec{r})$  est donné par

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Ze^2}{r} = -\frac{k}{r}.$$

2. Notons par  $\mathcal{R}(Oxyz)$  le repère lié au noyau. Les vecteurs de la base sphérique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  sont en rotation dans  $\mathcal{R}$  avec le vecteur rotation  $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi$ , où  $\vec{k}$  est le vecteur unitaire selon  $Oz$ . Si la position de l'électron  $e$  à l'instant  $t$  est  $M$ , alors

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \left. \frac{dr\vec{e}_r}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r \left. \frac{d\vec{e}_r}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \implies V^2 = \dot{r}^2 + r^2(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) \end{aligned}$$

ce qui donne pour l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m \left[ \dot{r}^2 + r^2 \left( \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \right) \right]$$

Quant à l'énergie potentielle, comme le poids de l'électron est négligée, elle est réduite à l'énergie potentielle  $V(r)$  ce qui donne pour le lagrangien

$$L(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}; t) = \frac{1}{2}m \left[ \dot{r}^2 + r^2 \left( \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \right) \right] + \frac{k}{r}.$$

3. Pour établir l'expression du hamiltonien, calculons d'abord les expressions des moments conjugués :

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \implies \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \implies \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi} \implies \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi; t) &= p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\varphi\dot{\varphi} - L(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}; t) \\ &= m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 + mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}m \left[ \dot{r}^2 + r^2 \left( \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \right) \right] - \frac{k}{r} \\ &= \frac{1}{2}m \left[ \dot{r}^2 + r^2 \left( \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \right) \right] - \frac{k}{r} \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} - \frac{k}{r}. \end{aligned}$$

$H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi; t)$  représente l'énergie mécanique de l'électron. Comme  $H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi; t)$  ne dépend pas explicitement du temps, il est conservé.

4. Si l'on observe l'expression de  $H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi; t)$ , on remarque que  $\varphi$  est une variable cyclique, ce qui implique que  $\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \implies p_\varphi$  est conservée.  $p_\varphi$  est la composante du moment cinétique de l'électron selon  $Oz$ . En effet, le moment cinétique est donné par

$$\vec{\sigma} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V} = -mr^2\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\theta + mr^2\dot{\theta}\vec{e}_\varphi \implies \vec{\sigma} \cdot \vec{k} = mr^2\sin^2\theta = p_\varphi.$$

On sait que le moment cinétique est constant étant donné que la force coulombienne est centrale. On peut choisir les conditions initiales de manière à ce que le moment cinétique soit perpendiculaire à  $\vec{k}$  et donc  $p_\varphi = 0$ .  $p_\varphi = 0 \implies \dot{\varphi} = 0 \implies \varphi(t) = \text{constante} \forall t$ .

L'expression de  $H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi; t)$  devient alors

$$H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi; t) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

5. Les équations canoniques de Hamilton sont données par

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \\ \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{k}{r^2} \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \implies p_\theta = \text{Cst} = mr^2\dot{\theta} = mr_0^2\dot{\theta}_0 \end{aligned}$$

et la nouvelle constante est  $p_\theta = mr^2\dot{\theta} = \vec{\sigma} \cdot \vec{e}_\varphi$  et donc qui n'est d'autre que le moment cinétique selon  $\vec{e}_\varphi$ .

6. Le mouvement de l'électron peut être circulaire si l'équation  $\dot{r} = 0$  est cohérente avec les équations canoniques de Hamilton. En effet,  $\dot{r} = 0 \implies p_r = 0$  et donc  $\dot{p}_r = 0$ , ce qui implique

$$\begin{aligned} -\frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{k}{r^2} &= 0 \\ \implies r &= r_c = \frac{p_\theta^2}{mk} = \text{Constante} \end{aligned}$$

ce qui est vérifié puisque  $p_\theta = mr_0^2\dot{\theta}_0$  est constant. Donc un mouvement circulaire est possible. La valeur de  $r_c$  en fonction de  $r_0$  est obtenue comme suit

$$r_c = \frac{mr_0^4\dot{\theta}_0^2}{k}.$$

Ainsi la vitesse angulaire à communiquer à l'électron pour l'installer dans l'orbire de rayon  $r_c = r_0$  est

$$r_0 = \frac{mr_0^4\dot{\theta}_0^2}{k} \implies \dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{k}{mr_0^3}}$$

### 2.2.3 Corrigé

Considérons un système à un degré de liberté et soit  $M$  un point de l'espace des phases dont les coordonnées sont  $(q, p)$ . Le point  $M'$  est le point de l'espace des phases de coordonnées  $(Q, P)$  obtenu à partir de  $M$  par une rotation d'un angle  $\alpha$ . On cherche à montrer que cette rotation est une transformation canonique et à déterminer une fonction génératrice  $F(q, Q)$  qui la décrit.

1.  $(Q, P)$  est obtenu de  $(q, p)$  par une rotation d'un angle  $\alpha$  dans l'espace des phases, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q\cos\alpha - p\sin\alpha \\ q\sin\alpha + p\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne de cette transformation est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Pour démontrer que la transformation est canonique, il suffit de démontrer que  $M$  est une matrice symplectique. En effet

$${}^t M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} JM &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} \\ \implies {}^t M J M &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J \end{aligned}$$

ce qui démontre bien que  $M$  est symplectique et donc la transformation associée est canonique.

2. La fonction génératrice  $F(q, Q)$  est de type 1. Ce qui permet d'écrire que

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} \text{ et } P = -\frac{\partial F}{\partial Q}.$$

3. En utilisant les expressions de la question précédente, nous obtenons

$$\frac{\partial F}{\partial q} = p = q \cot\alpha - \frac{Q}{\sin\alpha} \implies F(q, Q) = \frac{q^2}{2} \cot\alpha - \frac{Q}{\sin\alpha} q + g(Q).$$

Comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial Q} = -P &= -q \sin\alpha - q \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + Q \cot\alpha = -\frac{q}{\sin\alpha} + g'(Q) \\ \implies g'(Q) &= Q \cot\alpha \implies g(Q) = \frac{Q^2}{\cot\alpha} + K (= 0) \end{aligned}$$

En remplaçant  $g(Q)$  par son expression, nous avons

$$F(q, Q) = \left( \frac{q^2}{2} + \frac{Q^2}{2} \right) \cot\alpha - \frac{qQ}{\sin\alpha}.$$

4. Rappelons que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} &= \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial}{\partial Q} + \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial}{\partial P} = M_{11} \frac{\partial}{\partial Q} + M_{21} \frac{\partial}{\partial P} \\ \frac{\partial}{\partial p} &= \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial}{\partial Q} + \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial}{\partial P} = M_{12} \frac{\partial}{\partial Q} + M_{22} \frac{\partial}{\partial P}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
 [X, Y]_{q,p} &= \frac{\partial X}{\partial q} \frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial p} \frac{\partial Y}{\partial q} \\
 &= \left( M_{11} \frac{\partial X}{\partial Q} + M_{21} \frac{\partial X}{\partial P} \right) \left( M_{12} \frac{\partial Y}{\partial Q} + M_{22} \frac{\partial Y}{\partial P} \right) - \\
 &\quad - \left( M_{12} \frac{\partial X}{\partial Q} + M_{22} \frac{\partial X}{\partial P} \right) \left( M_{11} \frac{\partial Y}{\partial Q} + M_{21} \frac{\partial Y}{\partial P} \right) \\
 &= M_{11} M_{12} \frac{\partial X}{\partial Q} \frac{\partial Y}{\partial Q} + M_{11} M_{22} \frac{\partial X}{\partial Q} \frac{\partial Y}{\partial P} + M_{21} M_{12} \frac{\partial X}{\partial P} \frac{\partial Y}{\partial Q} + M_{21} M_{22} \frac{\partial X}{\partial P} \frac{\partial Y}{\partial P} - \\
 &\quad - \left( M_{12} M_{11} \frac{\partial X}{\partial Q} \frac{\partial Y}{\partial Q} + M_{12} M_{21} \frac{\partial X}{\partial Q} \frac{\partial Y}{\partial P} + M_{22} M_{11} \frac{\partial X}{\partial P} \frac{\partial Y}{\partial Q} + M_{22} M_{21} \frac{\partial X}{\partial P} \frac{\partial Y}{\partial P} \right) \\
 &= (M_{11} M_{22} - M_{12} M_{21}) \frac{\partial X}{\partial Q} \frac{\partial Y}{\partial P} + (M_{21} M_{12} - M_{22} M_{11}) \frac{\partial X}{\partial P} \frac{\partial Y}{\partial Q} \\
 &= \frac{\partial X}{\partial Q} \frac{\partial Y}{\partial P} - \frac{\partial X}{\partial P} \frac{\partial Y}{\partial Q}
 \end{aligned}$$

car  $M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ . D'où l'expression recherchée.

Comme les crochets de Poisson entre les deux grandeurs sont conservés par la transformation, cela implique que la transformation est canonique.

## 2.2.4 Corrigé

Les quatre types des fonctions génératrices décrivant les transformations canoniques peuvent s'obtenir les unes des autres par des transformations de Legendre. On se propose d'en montrer quelques exemples.

1. Rappelons que les fonctions génératrices de type 1 vérifient

$$p = \frac{\partial F(q, Q)}{\partial q} \quad \text{et} \quad P = -\frac{\partial F(q, Q)}{\partial Q}.$$

On pose  $G_1(q, Q) = -F_1(q, Q)$ . Cherchons la transformée de Legendre de  $G_1$  par rapport à  $Q$  que l'on note  $G_1^*(q, P) = PQ - G_1(q, Q)$ . Nous avons alors

$$\begin{cases} \frac{\partial G_1^*(q, P)}{\partial q} = -\frac{\partial G_1(q, Q)}{\partial q} = \frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial q} = p \\ \frac{\partial G_1^*(q, P)}{\partial P} = Q \end{cases}$$

qui ne sont d'autre que les propriétés d'une fonction génératrice de type 2. Aussi  $F_2(q, P)$  est la transformée de Legendre de  $-F_1(q, Q)$  par rapport à  $Q$ .

2. Les propriétés vérifiées par une fonction génératrice de type 3 sont données par

$$q = -\frac{\partial F_3(p, Q)}{\partial p} \quad \text{et} \quad P = -\frac{\partial F_3(p, Q)}{\partial Q}.$$



De la même manière, on pose  $G = F_1(q, Q)$  et on procède à une transformation de Legendre par rapport cette fois-ci à  $q$ , ce qui donne  $G^*(p, Q) = pq - G(q, Q)$  ce qui implique que

$$\begin{aligned}\frac{\partial G^*}{\partial p} &= +\frac{\partial F_1}{\partial p} = q \\ \frac{\partial G^*}{\partial Q} &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = P\end{aligned}$$

si l'on prend  $F_3 = -G^*$ , l'opposé de la transformée de Legendre de  $F_1$ , on retrouve la fonction génératrice de type 3.

### 2.2.5 Corrigé

Considérons la transformation donnée par

$$\begin{aligned}q_1 &= Q_1 \cos \alpha + \frac{P_2}{m\omega} \sin \alpha & q_2 &= Q_2 \cos \alpha + \frac{P_1}{m\omega} \sin \alpha \\ p_1 &= -m\omega Q_2 \sin \alpha + P_1 \cos \alpha & p_2 &= -m\omega Q_1 \sin \alpha + P_2 \cos \alpha\end{aligned}$$

1. Pour établir la matrice jacobienne, trouvons d'abord  $Q_k = Q_k(q_k, p_k)$  et  $P_k = P_k(q_k, p_k)$ . Pour ce faire nous résolvons le système d'équations précédents en utilisant la méthode de Cramer<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}Q_1 \cos \alpha + \frac{P_2}{m\omega} \sin \alpha &= q_1 \\ Q_2 \cos \alpha + \frac{P_1}{m\omega} \sin \alpha &= q_2 \\ -m\omega Q_2 \sin \alpha + P_1 \cos \alpha &= p_1 \\ -m\omega Q_1 \sin \alpha + P_2 \cos \alpha &= p_2\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & 0 & \frac{\sin \alpha}{m\omega} \\ 0 & \cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{m\omega} & 0 \\ 0 & -m\omega \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -m\omega \sin \alpha & 0 & 0 & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos \alpha \begin{vmatrix} \cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{m\omega} & 0 \\ -m\omega \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha \end{vmatrix} - \\ &= \cos \alpha \left( \cos \alpha \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\sin \alpha}{m\omega} \\ \cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{m\omega} & 0 \\ -m\omega \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \end{vmatrix} - (-m\omega \sin \alpha) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\sin \alpha}{m\omega} \\ \cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{m\omega} & 0 \\ -m\omega \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1\end{aligned}$$

3. On peut aussi utiliser la méthode par substitution. Toutefois, il est conseillé d'utiliser la méthode de Cramer de par son caractère systématique.

et

$$Q_1 = \frac{\begin{vmatrix} q_1 & 0 & 0 & \frac{\sin\alpha}{m\omega} \\ q_2 & \cos\alpha & \frac{\sin\alpha}{m\omega} & 0 \\ p_1 & -m\omega\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ p_2 & 0 & 0 & \cos\alpha \end{vmatrix}}{\Delta} = q_1\cos\alpha - p_2\frac{\sin\alpha}{m\omega}$$

et

$$Q_2 = \frac{\begin{vmatrix} \cos\alpha & q_1 & 0 & \frac{\sin\alpha}{m\omega} \\ 0 & q_2 & \frac{\sin\alpha}{m\omega} & 0 \\ 0 & p_1 & \cos\alpha & 0 \\ -m\omega\sin\alpha & p_2 & 0 & \cos\alpha \end{vmatrix}}{\Delta} = q_2\cos\alpha - p_1\frac{\sin\alpha}{m\omega}$$

et

$$P_1 = \frac{\begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 & q_1 & \frac{\sin\alpha}{m\omega} \\ 0 & \cos\alpha & q_2 & 0 \\ 0 & -m\omega\sin\alpha & p_1 & 0 \\ -m\omega\sin\alpha & 0 & p_2 & \cos\alpha \end{vmatrix}}{\Delta} = q_2m\omega\sin\alpha + p_1\cos\alpha$$

et enfin

$$P_2 = \frac{\begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & q_1 \\ 0 & \cos\alpha & \frac{\sin\alpha}{m\omega} & q_2 \\ 0 & -m\omega\sin\alpha & \cos\alpha & p_1 \\ -m\omega\sin\alpha & 0 & 0 & p_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = q_1m\omega\sin\alpha + p_2\cos\alpha$$

La matrice jacobienne est ainsi obtenue comme suit

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & -\frac{\sin\alpha}{m\omega} \\ 0 & \cos\alpha & -\frac{\sin\alpha}{m\omega} & 0 \\ 0 & m\omega\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ m\omega\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^t M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & 0 & m\omega\sin\alpha \\ 0 & \cos\alpha & m\omega\sin\alpha & 0 \\ 0 & -\frac{\sin\alpha}{m\omega} & \cos\alpha & 0 \\ -\frac{\sin\alpha}{m\omega} & 0 & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Comme

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow JM = \begin{pmatrix} 0 & m\omega\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ m\omega\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & 0 & 0 & \frac{\sin\alpha}{m\omega} \\ 0 & -\cos\alpha & \frac{\sin\alpha}{m\omega} & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifiera que  ${}^tMJM = J$  et par conséquent  $M$  est symplectique. Cette question peut être résolue de manière simple en démontrant que si  $M$  est symplectique  ${}^tM$  l'est aussi. Comme on peut déduire l'expression de  ${}^tM$  directement des données du problème, puisque nous avons les expressions de  $(q_i, p_i)$ .

2. Puisque la fonction génératrice est de type 2 alors

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \frac{\partial F_2(q_k, P_k)}{\partial P_1} = \frac{q_1}{\cos\alpha} - \frac{P_2}{m\omega} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\
 \implies F_2(q_k, P_k) &= \frac{q_1 P_1}{\cos\alpha} - \frac{P_2 P_1}{m\omega} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + g_1(q_1, q_2, P_2) + K(=0) \\
 \implies \frac{\partial F_2(q_k, P_k)}{\partial P_2} &= -\frac{P_1}{m\omega} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\partial g_1}{\partial P_2} = Q_2 = \frac{q_2}{\cos\alpha} - \frac{P_1}{m\omega} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\
 \implies \frac{\partial g_1}{\partial P_2} &= \frac{q_2}{\cos\alpha} \implies g_1(q_1, q_2, P_2) = \frac{q_2 P_2}{\cos\alpha} + g_2(q_1, q_2). \\
 \implies F_2(q_1, q_2, P_1, P_2) &= \frac{q_1 P_1}{\cos\alpha} - \frac{P_2 P_1}{m\omega} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{q_2 P_2}{\cos\alpha} + g_2(q_1, q_2)
 \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{\partial F_2}{\partial q_1} = \frac{P_1}{\cos\alpha} + \frac{\partial g_2}{\partial q_1} = -m\omega \sin\alpha \left( q_2 \cos\alpha - p_1 \frac{\sin\alpha}{m\omega} \right) + P_1 \cos\alpha \\
 \implies \frac{\partial g_2}{\partial q_1} &= -m\omega \sin\alpha \left( q_2 \cos\alpha - p_1 \frac{\sin\alpha}{m\omega} \right) + P_1 \left( \cos\alpha - \frac{1}{\cos\alpha} \right) \\
 \implies g_2 &= \left[ -m\omega \sin\alpha \left( q_2 \cos\alpha - p_1 \frac{\sin\alpha}{m\omega} \right) + P_1 \left( \cos\alpha - \frac{1}{\cos\alpha} \right) \right] q_1 + g_3(q_2)
 \end{aligned}$$

d'où

$$F_2(q_1, q_2, P_1, P_2) = \frac{q_2 P_2}{\cos\alpha} - \frac{P_1 P_2}{m\omega} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \left[ -m\omega \sin\alpha \left( q_2 \cos\alpha - p_1 \frac{\sin\alpha}{m\omega} \right) + P_1 \cos\alpha \right] q_1 + g_3(q_2).$$

Et finalement

$$\begin{aligned}
 p_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial q_2} = \frac{P_2}{\cos\alpha} - m\omega \sin\alpha \cos\alpha q_1 + \frac{\partial g_3}{\partial q_2} \\
 &= -m\omega \sin\alpha \left( q_1 \cos\alpha - p_2 \frac{\sin\alpha}{m\omega} \right) + P_2 \cos\alpha \\
 \implies \frac{\partial g_3}{\partial q_2} &= P_2 \left( \cos\alpha - \frac{1}{\cos\alpha} \right) + p_2 \sin^2 \alpha \\
 \implies g_3(q_2) &= P_2 q_2 \left( \cos\alpha - \frac{1}{\cos\alpha} \right) + p_2 q_2 \sin^2 \alpha \\
 \implies F_2(q_1, q_2, P_1, P_2) &= (q_1 P_1 + q_2 P_2) \cos\alpha - \frac{P_1 P_2}{m\omega} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - m\omega \sin\alpha \cos\alpha q_1 q_2 + (p_1 q_1 + p_2 q_2) \sin^2 \alpha.
 \end{aligned}$$

3. Nous avons

$$\begin{aligned} p_1^2 &= m^2\omega^2 Q_2^2 \sin^2\alpha + P_1^2 \cos^2\alpha - 2m\omega \sin\alpha \cos\alpha Q_2 P_1 \\ p_2^2 &= m^2\omega^2 Q_1^2 \sin^2\alpha + P_2^2 \cos^2\alpha - 2m\omega \sin\alpha \cos\alpha Q_1 P_2 \\ \implies \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} &= \frac{m\omega^2}{2} \sin^2\alpha (Q_1^2 + Q_2^2) + \frac{1}{2m} \cos^2\alpha (P_1^2 + P_2^2) - \omega \sin\alpha \cos\alpha (Q_1 P_2 + Q_2 P_1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} q_1^2 &= Q_1^2 \cos^2\alpha + \frac{P_2^2}{m^2\omega^2} \sin^2\alpha + \frac{2}{m\omega} Q_1 P_2 \cos\alpha \sin\alpha \\ q_2^2 &= Q_2^2 \cos^2\alpha + \frac{P_1^2}{m^2\omega^2} \sin^2\alpha + \frac{2}{m\omega} Q_2 P_1 \cos\alpha \sin\alpha \\ \implies \frac{m\omega^2}{2} (q_1^2 + q_2^2) &= \frac{m\omega^2}{2} (Q_1^2 + Q_2^2) + \frac{1}{2m} \sin^2\alpha (P_1^2 + P_2^2) + \omega \cos\alpha \sin\alpha (Q_1 P_2 + Q_2 P_1) \end{aligned}$$

ainsi

$$H' = \frac{1}{2m} (P_1^2 + P_2^2) + \frac{m\omega^2}{2} (Q_1^2 + Q_2^2).$$

### 2.2.6 Corrigé

1. C'est un système à 1 degré de liberté et la coordonnée généralisée choisie est  $\theta$ . La vitesse du point  $M$  dans la base polaire est  $\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u}_r$ , ce qui donne pour l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

et le potentiel est  $V = -mgl(\cos(\theta) - \cos(\theta_0)) = -I\omega^2(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))$  à une constante près. Le Lagrangien est alors

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + I\omega^2 \cos(\theta).$$

Le moment conjugué de  $\theta$  est

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = I\dot{\theta}$$

et

$$\mathcal{H}(\theta, p_\theta) = p_\theta \dot{\theta} - \mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{p_\theta^2}{2I} - I\omega^2 \cos(\theta).$$

On voit bien que  $\mathcal{H}$  ne dépend pas du temps explicitement et donc se conserve  $\mathcal{H} = E$ .

2. On pose alors  $p = p_\theta$  et  $q = \theta$  ce qui donne  $\mathcal{H}(p, q) = p^2/I - I\omega^2 \cos(q)$ . En prenant  $E$  comme paramètre, l'équation devient dans l'espace de phase

$$p = \pm \omega I \sqrt{2} \sqrt{\cos q + \frac{E}{I\omega^2}}$$

- $0 < E < I\omega^2$  : il y a une solution pour  $\cos(q) \leq E/(I\omega^2) \Rightarrow q$  est bornée : mouvement d'oscillations (de lobration).
  - $E > I\omega^2$  : il y a une solution  $\forall q$  alors que  $p$  est bornée : mouvement de rotation. La courbe  $p(q)$  est périodique et de période  $2\pi$ .
  - $E = I\omega^2$  : le cas limite entre les deux régimes précédents. La courbe s'appelle la séparatrice.
3. Les positions d'équilibre sont données par

$$\frac{\partial V}{\partial q} = 0 \Rightarrow q = q_e = k\pi \quad k \in \mathbf{Z}$$

et la dérivée seconde de  $V$  permet de déterminer la stabilité de l'équilibre. En effet

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} &= I\omega^2 \cos(q) \\ \frac{\partial^2 V(q_e = 0)}{\partial q^2} &> 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 V(q_e = \pm\pi)}{\partial q^2} < 0 \end{aligned}$$

donc  $q_e = 0$  est une position d'équilibre stable et celles de  $q_e = \pm\pi$  sont instables.

4. —  $q_e = 0$  : On pose alors  $q = x$  et  $x \rightarrow 0$ , d'où, en prenant comme référence du potentiel, pour fixer la constante, celui pour  $q = 0$  et en faisant un développement limité à l'ordre 2, on obtient

$$E = \frac{p^2}{2I} + \frac{\omega^2 I}{2} x^2$$

la trajectoire dans  $(p, q)$  est une ellipse. Le point  $q_e = 0$  est dit point elliptique. Pour retrouver l'équation du mouvement, on applique les équations de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial \mathcal{H}(q, p)}{\partial p} = \frac{p}{I} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}(q, p)}{\partial x} = \omega^2 I x \end{aligned}$$

ce qui donne comme équation  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  ce qui donne  $x(t) = \text{Re}(Ae^{-i\omega t} + Be^{+i\omega t})$  qui est une solution oscillante.

- $q_e = \pm\pi : q = x \pm \pi$ , le développement donne dans ce cas, sachant que  $\cos(x \pm \pi) = -\cos(x)$ ,

$$E = \frac{p^2}{2I} - \frac{\omega^2 I}{2} x^2$$

qui est l'équation d'une hyperbole.

En appliquant les équations de Hamilton, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial \mathcal{H}(q, p)}{\partial p} = \frac{p}{I} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}(q, p)}{\partial x} = -\omega^2 I x \end{aligned}$$

ce qui donne comme équation du mouvement  $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$  dont la solution  $x(t) = Re(Ae^{-\omega t} + Be^{+\omega t})$  qui est une solution non oscillante.

### 2.2.7 Corrigé

Une particule de masse  $m$  évolue à une dimension  $x$ . Elle est soumise à la force

$$F(x) = -kx - \gamma \frac{dx}{dt}, \quad k > 0, \gamma > 0.$$

La force dépend d'une seule variable  $x$ . Le problème est à une seule dimension.

1. La force se compose de deux termes : le terme  $-kx$  est la force de rappel ou élastique, elle est conservative. Le deuxième terme est  $-k\dot{x} = -kv$  et il correspond à la force de frottement visqueux, qui est une force dissipative.
2. Pour appliquer le PFD, calculons l'accélération. Soit  $\mathcal{R}(O, xyz)$  un référentiel galiléen. Comme le problème est à une dimension alors

$$\vec{V} = \dot{x}\vec{i} \text{ et } \vec{\gamma} = \dot{x}\vec{i}, \text{ la force est } \vec{F} = -(kx - \gamma\dot{x}).$$

Alors le PFD donne

$$m\vec{\gamma} = \vec{F} \implies m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}$$

comme  $p = m\dot{x}$  et  $\dot{p} = m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} = -kx - \gamma\frac{p}{m}$ , on peut écrire

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -kx - \frac{\gamma}{m}p \end{aligned} \right\} \implies \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & -\frac{\gamma}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$$

ce qui implique que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & -\frac{\gamma}{m} \end{pmatrix}.$$

3. Chercher les directions principales dans l'espace de phases, revient à chercher les directions dans lesquelles  $A$  est diagonale et donc à diagonaliser la matrice  $A$ . Les vecteurs propres définissent les directions principales. Notons par  $D$  la matrice diagonalisée associée à  $A$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ où } \lambda_i, (i = 1, 2) \text{ sont les valeurs propres,}$$

alors  $\exists S$  tel que  $D = S^{-1}AS$ . Notons par  $V_{1,2}$  les vecteurs propres. Soit  $(X, P)^T$  les coordonnées dans la base des vecteurs propres. Alors,

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}$$

ce qui donne comme solutions

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \lambda_1 X \implies \frac{dX}{X} = \lambda_1 dt \implies X(t) = X(0)e^{\lambda_1 t} \\ \dot{P} &= \lambda_2 P \implies \frac{dP}{P} = \lambda_2 dt \implies P(t) = P(0)e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

Retrouvons les valeurs propres  $\lambda_i$ . Pour ce faire, résolvons le polynôme caractéristique associé à  $A$  :

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0 \implies \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{m} \\ -k & -\lambda - \frac{\gamma}{m} \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda(\lambda + \frac{\gamma}{m}) + \frac{k}{m} = 0$$

dont le discriminant  $\Delta = \frac{\gamma^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}$  et donc

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{\gamma}{m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}}}{2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

dont les valeurs dépendent du signe de discriminant  $\Delta$  que nous allons discuter.

- Les éléments de la matrice de passage  $S^4$  peuvent être calculés en déterminant les vecteurs propres  $V_1$  et  $V_2$  que l'on donne sans calcul

$$V_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\Delta} + \frac{\gamma}{m} \\ -2k \end{pmatrix} \text{ et } V_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\Delta} + \frac{\gamma}{m} \\ -2k \end{pmatrix}$$

$$\text{et pour la matrice de passage } S = \begin{pmatrix} \sqrt{\Delta} + \frac{\gamma}{m} & -\sqrt{\Delta} + \frac{\gamma}{m} \\ -2k & -2k \end{pmatrix}$$

---

4. Nous aurons besoin de cette matrice s'il fallait réexprimer les solutions dans la base d'origine, c'est à dire réexprimer les solutions en terme de  $p = p(x)$ .

- $\underline{\Delta \geq 0} \implies \gamma > 2\sqrt{km}$  : les racines  $\lambda_{1,2}$  sont réelles et négatives puisque  $\frac{\gamma}{m} > \sqrt{\Delta}$ . Ainsi les solutions  $X$  et  $P$  sont

$$\begin{aligned} \text{Log} \left( \frac{X(t)}{X(0)} \right) &= \lambda_1 t \implies t = \text{Log} \left( \frac{X(t)}{X(0)} \right)^{\frac{1}{\lambda_1}} \\ P(t) &= P(0) e^{\lambda_2 \text{Log} \left( \frac{X(t)}{X(0)} \right)^{\frac{1}{\lambda_1}}} = P(0) e^{\text{Log} \left( \frac{X(t)}{X(0)} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}} = K X(t)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \end{aligned}$$

avec  $\lambda_2/\lambda_1 > 1$ . Rappelons que le portrait de phase donné par  $P = P(X)$  est représenté dans la base  $V_{1,2}$  des vecteurs propres.

**Analyse :**

- Comme  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont négatives, alors  $P(t) \rightarrow 0$  et  $X(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .
- Le rapport  $\lambda_2/\lambda_1 > 1$  car  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ .

Ainsi le portrait de phase est représenté dans la figure ....

- $\underline{\Delta < 0}$  si  $\gamma < 2\sqrt{km}$  : on pose  $\Delta = i\sqrt{|\Delta|} = i\omega \implies \lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm i\omega$  avec  $\lambda_1 = \lambda_2^*$  avec  $X(t) = X(0)e^{(-\frac{\gamma}{2m} + i\omega)t} = |X(0)|e^{i\phi_0}e^{(-\frac{\gamma}{2m} + i\omega)t}$  et  $P(t) = P(0)e^{(-\frac{\gamma}{2m} - i\omega)t} = |P(0)|e^{i\phi_0}e^{(-\frac{\gamma}{2m} - i\omega)t}$ .

- La partie réelle des  $\lambda_i$ ,  $-\frac{\gamma}{2m}$  est responsable de l'amortissement alors que la partie imaginaire l'est pour les oscillations et donc la fréquence d'oscillations est  $\nu = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{|\Delta|}}$ .

Les vecteurs propres sont dans ce cas sont

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{m} \\ -2k \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sqrt{|\Delta|} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } V_2 = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{m} \\ -2k \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \sqrt{|\Delta|} \\ 0 \end{pmatrix} = V_1^*$$

Au lieu de représenter le portrait de phase dans la base des vecteurs propres  $V_{1,2}$ , qui sont complexes, on choisit de les représenter dans la base formée par les parties réelles et imaginaires de  $V_1$  que l'on note

$$W_1 = \text{Re}(V_1) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{m} \\ -2k \end{pmatrix}$$

et

$$W_2 = \text{Im}(V_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{|\Delta|} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce dernier choix est adopté car  $X$  et  $P$  sont complexes et  $P$  est conjugué de  $X$  et donc le portrait de phase est obtenu en représentant  $Y_2 = \text{Im}(X) = X(0)e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\sin(\omega t + \phi_0)$  en fonction de  $Y_1 = \text{Re}(X_1) = X(0)e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\cos(\omega t + \phi_0)$  et dont la représentation graphique est une spirale logarithmique.



## 2.2.8 Corrigé

Pour tracer le portrait de phase, on calcule d'abord le lagrangien, ensuite on détermine le moment conjugué, un seul degré de liberté puisque le problème est à une dimension, et enfin on calcule le hamiltonien en fonction de la coordonnée généralisée,  $x$ , et de son moment conjugué,  $p$ . Utilisant le fait que le hamiltonien est conservé, on en déduit l'équation de  $p = p(x)$ .

1. **Lagrangien :**

si  $0 < x < L$

La particule est libre alors  $V(x) = 0$ . Le module de la vitesse est  $v = \dot{x}$ , ce qui donne pour l'énergie cinétique  $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$  et enfin  $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ .

si  $x < 0$  ou  $x > L$  :  $V(x) = +\infty$  et donc cette région est inaccessible à la particule.

2. **Moment conjugué**

Le moment conjugué est donné par

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}.$$

3. **Hamiltonien**

Le hamiltonien est donné par  $\mathcal{H}(x, p) = p\dot{x} - \mathcal{L} = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{p^2}{2m}$ .

4. **Portrait de phase**

Nous avons tous les ingrédients pour tracer le portrait de phase. Sachant que  $\mathcal{H}(x, p)$  ne dépend pas explicitement du temps, donc c'est une intégrale première.

Aussi  $\mathcal{H}(x, p) = E \implies \frac{p^2}{2m} = E \implies p = \pm\sqrt{2mE}$ . Donc le moment conjugué est une fonction constante paramétrée par  $E$ . Pour une valeur de  $E$ , la représentation graphique de  $p = p(x)$  est donc une droite d'équation  $p = +\sqrt{2mE}$  parallèle à l'axe des abscisses où la particule se déplace de  $x = 0$  vers  $x = L$ , et d'aquation  $p = -\sqrt{2mE}$  quant la particule se déplace de  $x = L$  vers  $x = 0$ .

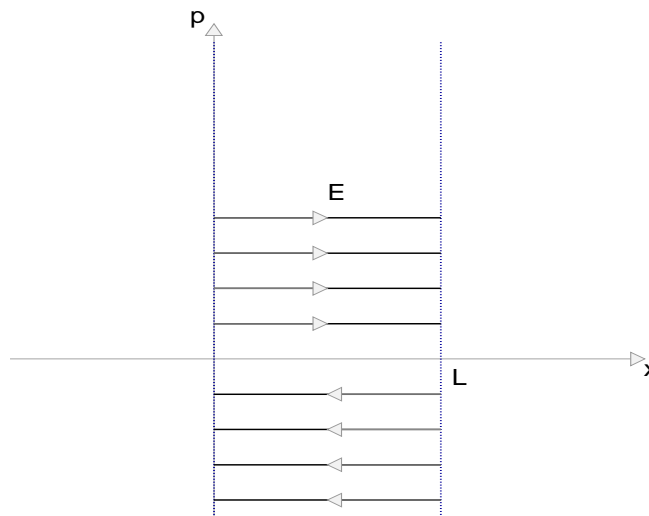


FIGURE 2.1 – Portrait de phase de la particule libre. Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs de l'énergie  $E$ .

### 2.2.9 Corrigé

Soit le potentiel  $U(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}\beta x^2$ . Rappelons que les points stables sont les positions d'équilibre du système mécanique décrit par ce potentiel.

1. Les points fixes sont les positions pour lesquelles le potentiel est extremal. Calculons la dérivée de  $U(x)$

$$\frac{dU(x)}{dx} = x^5 - x^3 + \beta x = x(x^4 - x^2 + \beta).$$

La dérivée est nulle pour  $x = 0$  ou  $x^4 - x^2 + \beta = 0$ . Pour ce deuxième terme, posons  $X = x^2$  ce qui donne comme équation  $X^2 - X + \beta = 0$  dont le discriminant est  $\Delta = 1 - 4\beta$ . Etudions les positions d'équilibre en fonction du signe de  $\Delta$ .

- $\Delta < 0 \implies \beta > 1/4$  : Pas de solution réelle. Le seul point fixe est  $x = 0$ .

Comme

$$\left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = \beta > 0$$

alors c'est une position d'équilibre stable.

- $\Delta > 0 \implies \beta < 1/4$  : alors les solutions en  $X$  sont

$$X = x^2 = +1 \pm \sqrt{1 - 4\beta}$$

ainsi on distingue si

- $\beta > 0$ , c'est à dire  $0 < \beta < 1/4$ , il y a 5 points fixes  $x = -x_2, -x_1, 0, -x_1, -x_2$  avec

$$x_2 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 4\beta}}{2}} \text{ et } x_1 = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 4\beta}}{2}}.$$

- $\beta < 0$ , le potentiel a seulement trois points fixes  $x = -x_2, 0, x_2$ .



---

## Formalisme de Hamilton-Jacobi

---

### 3.1 Exercices

#### 3.1.1 Exercice

Considérons une particule  $M$  soumise à une force centrale attractive de type  $\vec{F} = -k\vec{r}/r^3$ . On utilise les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  comme coordonnées généralisées.

1. Calculer la vitesse de  $M$ . En déduire son énergie cinétique.
2. Calculer le potentiel  $V(r)$ . En déduire le Lagrangien de  $M$ .
3. Calculer les moments conjugués  $p_r$  et  $p_\theta$ . En déduire le Hamiltonien de  $M$ .  
On cherche à résoudre le problème en utilisant le formalisme de Hamilton-Jacobi.
4. Rappeler l'équation de Hamilton-Jacobi. En déduire l'équation vérifiée par la fonction génératrice  $S(r, \theta, t) = S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_t(t)$ .
5. Montrer que le Hamiltonien est conservé et déduire l'expression de  $S_t(t)$ .
6. Montrer que  $p_\theta$  est conservée. En déduire que  $S_\theta = p_\theta\theta$ .
7. Etablir l'équation vérifiée par  $S_r(r)$  et déduire que

$$S_r(r) = \pm \int \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{p_\theta^2}{r^2}} dr.$$

8. Soient  $Q_r, Q_\theta, P_r$  et  $P_\theta$  les nouvelles coordonnées généralisées. Rappeler les équations de Hamilton vérifiées par chacune d'elles.
9. En utilisant la fonction génératrice  $S(r, \theta, t)$ , calculer  $Q_r$  et  $Q_\theta$ .

10. En déduire que l'équation vérifiée par  $r(\theta)$  est donnée par

$$\pm \int \frac{p_\theta dr}{r^2 \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{p_\theta^2}{r^2}}} = \pm\theta + \gamma_r$$

$\gamma_r$  étant une constante.

11. En utilisant le changement de variable,  $\sqrt{\alpha}X = \frac{p_\theta}{r} - \frac{mk}{p_\theta}$ , avec  $\alpha = 2mE + (\frac{mk}{p_\theta})^2$ , montrer que la solution  $r(\theta)$  est une conique d'équation

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta + \theta_0)}$$

En déduire les expressions du paramètre de la conique  $p$ , et de son excentricité  $e$ .

12. Discuter la nature de la conique en fonction de l'énergie  $E$ .

### 3.1.2 Exercice

Considérons une particule  $M$  soumise à une force centrale attractive de type  $\vec{F} = -k\vec{r}/r^3$  et animée d'un mouvement par rapport à un repère  $\mathcal{R}(O, xyz)$  que l'on considère galiléen.

1. Montrer que le mouvement est plan. On utilise les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  comme coordonnées généralisées.
2. Etablir l'expression du Hamiltonien  $H(r, \theta, p_r, p_\theta)$  de  $M$ . En déduire que  $H(r, \theta, p_r, p_\theta)$  et  $p_\theta$  sont des intégrales premières.
3. On cherche à établir l'équation de mouvement de  $M$  en utilisant le formalisme de Hamilton-Jacobi.
  - a- Etablir l'équation de HJ associée au mouvement de  $M$  et déduire l'équation caractéristique de HJ.
  - b- On cherche des solutions, par séparation des variables, de la forme  $S_0(r, \theta; \alpha_r, \alpha_\theta) = S_r(r; \alpha_r, \alpha_\theta) + S_\theta(\theta; \alpha_r, \alpha_\theta)$  où  $\alpha_r$  et  $\alpha_\theta$  sont des constantes d'intégration.
    - Etablir l'expression de  $S_\theta(\theta; \alpha_\theta, \alpha_r)$  et celle de  $S_r(r; \alpha_r, \alpha_\theta)$ .
    - On choisit  $\alpha_\theta = p_\theta$  et  $\alpha_r = E$ . Justifier ces choix et déduire  $Q_\theta$  et  $Q_r$ .
    - En déduire que l'équation de la trajectoire  $r(\theta)$  est donnée par

$$\pm \int_0^r \frac{p_\theta dr'}{r'^2 \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r'} - \frac{p_\theta^2}{r'^2}}} = \pm\theta + \text{Constante}$$

- Résoudre l'équation précédente et montrer que la solution est une conique  $r(\theta) = p/(1 + e \cos(\theta - \theta_0))$  où l'on détermine les expressions de  $p$ ,  $e$  et de  $\theta_0$ .

## 3.1.3 Exercice

Soit une particule de masse  $m$  soumise au potentiel :

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(x)} \text{ où } V_0 > 0 \text{ est une constante positive}$$

1. Calculer le minimum de  $V(x)$ . Représenter graphiquement l'allure du potentiel  $V(x)$ .
2. Exprimer le Lagrangien de la particule. En déduire son Hamiltonien  $H(x, p)$ .
3. On s'intéresse dans cette question aux petites oscillations autour du minimum du potentiel  $V(x)$ .

— Etablir que  $V(x)$  peut se mettre au voisinage de son minimum sous la forme

$$V(x) = -V_0 + V_0 x^2.$$

— Etablir l'équation du mouvement et déduire l'expression de la fréquence des petites oscillations

Dans la suite on considère les trajectoires de la particule où  $-V_0 < E < 0$  dont on veut déterminer les fréquences d'oscillations. Comme le mouvement est périodique, on se propose de retrouver la fréquence d'oscillation en utilisant le formalisme de HJ angle-action  $(\omega, J)$ .

4. Résoudre l'équation de HJ et déterminer l'expression de  $W(x; \alpha)$ ,  $\alpha$  étant la constante d'intégration.
5. Rappeler l'expression de  $J$  en fonction de  $W(x; \alpha)$ .
6. Etablir les bornes de variations de  $x$ .
7. Montrer que l'expression de  $J$  est donnée par

$$J = \sqrt{2mV_0} \left( 1 - \sqrt{\frac{-E}{V_0}} \right)$$

En déduire la fréquence d'oscillation du mouvement de la particule.

## 3.2 Corrigés

## 3.2.1 Corrigé

1. On utilise la base polaire  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ . Ainsi,  $\overline{OM} = r\vec{e}_r$  et

$$\vec{V} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

et l'énergie cinétique est égale à

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

2. la force est centrale, elle est conservative :

$$\begin{aligned} dV &= -\vec{F}d\vec{M} \\ &= \frac{k}{r^2} \vec{e}_r (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta) \\ &= k \frac{dr}{r^2} \end{aligned}$$

en utilisant le fait que le potentiel est nul à l'infini, la force variant en  $r^{-2}$ ,

$$V(r) = k \int \frac{1}{r^2} \rightarrow V(r) = -\frac{k}{r}.$$

Ce qui donne pour le Lagrangien

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r}.$$

3. Calcul des moments conjugués :

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}. \end{aligned}$$

Ce qui donne pour le Hamiltonien

$$\begin{aligned} H &= p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} - L \\ &= m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r} \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{r} \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \end{aligned}$$

4. On cherche à utiliser le formalisme de Hamilton-Jacobi : Changement de variables tel que le nouvel Hamiltonien soit nul et les nouvelles variables soient cycliques. L'équation de HJ est alors

$$H(q, p = \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

On cherche une solution à variables séparées de la forme  $S(r, \theta, t) = S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_t(t)$ .

5. Comme  $H$  ne dépend pas explicitement du temps, alors il est conservé :  $H = E$  et

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(r, \theta, t)}{\partial t} &= \frac{\partial S_t}{\partial t} = -E \\ \Rightarrow S_t(t) &= -Et. \end{aligned}$$



6.  $p_\theta$  est une variable cyclique alors elle est conservée. Or

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_\theta(\theta)}{\partial \theta} &= p_\theta = Cte \\ \Rightarrow S_\theta(\theta) &= p_\theta \theta.\end{aligned}$$

7. En remplaçant

$$p_r = \frac{\partial S_r(r)}{\partial r}$$

dans l'équation de HJ, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_r(r)}{\partial r} \right)^2 + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} - E &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dS_r(r)}{dr} &= \pm \sqrt{2mE - \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{2mk}{r}} \\ \Rightarrow S_r(r) &= \pm \int \sqrt{2mE - \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{2mk}{r}} dr\end{aligned}$$

8. Les nouvelles variables sont cycliques, ainsi

$$\dot{Q}_r = \dot{Q}_p = \dot{P}_r = \dot{P}_\theta = 0.$$

9. On pose  $P_r = E$  et  $P_\theta = p_\theta$  alors

$$Q_r = \frac{\partial S}{\partial P_r} = \frac{\partial S}{\partial E} = \pm \int \frac{m}{\sqrt{2mE - \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{2mk}{r}}} dr - t$$

et

$$\begin{aligned}Q_\theta &= \frac{\partial S}{\partial P_\theta} = \frac{\partial S}{\partial p_\theta} \\ &= \frac{\partial S_r(r)}{\partial p_\theta} + \theta \\ &= \pm \int \frac{-p_\theta}{r^2 \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{p_\theta^2}{r^2}}} dr + \theta\end{aligned}$$

10. Comme  $\dot{Q}_\theta = 0 \Rightarrow Q_\theta = Cte$ , alors on a

$$\int \frac{-p_\theta}{r^2 \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{p_\theta^2}{r^2}}} dr = \pm \theta \pm Cte = \pm \theta + \gamma_r$$

11. On a

$$\begin{aligned}
 2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{p_\theta^2}{r^2} &= 2mE - p_\theta^2 \left( \frac{1}{r^2} - \frac{2mk}{p_\theta^2 r} \right) \\
 &= 2mE + p_\theta^2 \frac{m^2 k^2}{p_\theta^4} - p_\theta^2 \left( \frac{1}{r} - \frac{mk}{p_\theta^2} \right)^2 \\
 &= 2mE + \frac{m^2 k^2}{p_\theta^2} - \left( \frac{p_\theta}{r} - \frac{mk}{p_\theta} \right)^2 \\
 &= \alpha - \alpha X^2
 \end{aligned}$$

avec  $\alpha = 2mE + \frac{m^2 k^2}{p_\theta^2}$  et  $\sqrt{\alpha}X = \frac{p_\theta}{r} - \frac{mk}{p_\theta}$ ; nous avons aussi  $\sqrt{\alpha}dX = -\frac{p_\theta dr}{r^2}$ . En utilisant ces dernières expressions dans l'équation précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{\alpha}dX}{\sqrt{\alpha}\sqrt{1-X^2}} &= \pm\theta + \gamma_r \\
 \int \frac{dX}{\sqrt{1-X^2}} &= \pm\theta + \gamma_r \\
 \Rightarrow \arcsin(X) &= \pm\theta + \gamma_r + Cte \\
 \Rightarrow X &= \sin(\pm\theta + \gamma_r + Cte) \\
 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \theta - \gamma_r + Cte\right) \\
 &= \cos(\theta + \theta_0)
 \end{aligned}$$

avec  $\theta_0 = \pm\frac{\pi}{2} \mp \gamma_r + Cte$  (Attention  $\pm$  peut être absorbé dans la constante!). En restituant  $r$ , on a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r} &= \frac{mk}{p_\theta^2} + \frac{\sqrt{\alpha}}{p_\theta} \cos(\theta + \theta_0) \\
 \Rightarrow \frac{p_\theta^2}{mk} \frac{1}{r} &= \frac{p_\theta \sqrt{\alpha}}{mk} \cos(\theta + \theta_0) + 1
 \end{aligned}$$

or

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos(\theta + \theta_0)$$

$$\Rightarrow p = \frac{p_\theta^2}{mk} \text{ et } e^2 = \frac{2mE p_\theta^2 + m^2 k^2}{m^2 k^2} = 1 + \frac{2p_\theta^2}{mk^2} E$$

12. En partant de l'expression de l'excentricité, on déduit que

$$\Rightarrow \begin{cases} E = 0 \Rightarrow e = 1 \Rightarrow \text{une parabole} \\ E < 0 \Rightarrow 0 < e < 1 \Rightarrow \text{une ellipse} \\ E > 0 \Rightarrow e > 1 \Rightarrow \text{une hyperbole} \end{cases}$$

## 3.2.2 Corrigé

Considérons une particule  $M$  soumise à une force centrale attractive de type  $\vec{F} = -k\vec{r}/r^3$  et animée d'un mouvement par rapport à un repère  $\mathcal{R}(O, xyz)$ , muni de la base cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$  que l'on considère galiléen.

1. Le mouvement est plan car la force est centrale et donc son moment par rapport à  $O$  est nul ce qui implique que le moment cinétique de  $M$  par rapport à  $O$ ,  $\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R}) = mr^2\dot{\theta}\vec{k} = \text{constant} \implies$  le mouvement est plan.
2. En coordonnées polaires

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \quad \text{et} \quad V(r) = -\frac{k}{r} \implies L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r}.$$

Les moments conjugués sont donnés par

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

L'expression du hamiltonien est ainsi égale à

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}.$$

Comme  $H$  ne dépend pas explicitement du temps alors  $H$  est une intégrale première. De même, comme  $\theta$  est une variable cyclique alors  $p_\theta$  est conservée et donc une intégrale première.

a- L'équation de HJ est donnée par

$$H(r, \theta, \frac{\partial S}{\partial r}, \frac{\partial S}{\partial \theta}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Comme  $H$  est une intégrale première, l'équation caractéristique est alors

$$S(r, \theta; \alpha_r, \alpha_\theta, t) = S_0(r, \theta; \alpha_r, \alpha_\theta) - Et.$$

b- On cherche des solutions de la forme  $S_0(r, \theta, \alpha_r, \alpha_\theta) = S_r(r; \alpha_r, \alpha_\theta) + S_\theta(\theta; \alpha_r, \alpha_\theta)$ .

— Comme  $\theta$  est cyclique alors  $S_\theta = \alpha_\theta\theta = p_\theta\theta$ . Nous avons

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial S_r}{\partial r}$$

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}.$$

En injectant ces deux expressions dans  $H$ , nous obtenons

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left( \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{k}{r} = E$$

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} = E$$

$$\implies S_r(r; \alpha_r, \alpha_\theta) = p_\theta = \pm \int_0^r \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r'} - \frac{p_\theta^2}{r'^2}} dr'$$

- Le choix des constantes d'intégration est dicté par les intégrales premières. Nous avons donc établi que  $\alpha_\theta = p_\theta$ , il reste  $\alpha_r = E$ . Ce qui donne

$$Q_\theta = \frac{\partial S}{\partial p_\theta} = \theta \pm \int_0^r \frac{p_\theta dr'}{r'^2 \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r'} - \frac{p_\theta^2}{r'^2}}}$$

$$Q_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial S_r}{\partial r} = \pm \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{p_\theta^2}{r^2}}$$

- Sachant que  $\dot{Q}_\theta = 0 \implies Q_\theta = K$ , alors

$$\int_0^r \frac{p_\theta dr'}{r'^2 \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r'} - \frac{p_\theta^2}{r'^2}}} = \pm(\theta + K)$$

- Posons  $u = 1/r' \implies du = -dr'/r'^2$  ce qui implique

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{p_\theta dr'}{\sqrt{2mE + \frac{2mk}{r'} - \frac{p_\theta^2}{r'^2}}} &= - \int_0^{1/r} \frac{p_\theta du}{\sqrt{2mE + 2mku - p_\theta^2 u^2}} \\ &= - \int_0^{1/r} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\theta^2} + \frac{2mk}{p_\theta^2} u - u^2}} \\ &= - \int_0^{1/r} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p_\theta^2} + \frac{m^2 k^2}{p_\theta^4} - \left(u - \frac{mk}{p_\theta^2}\right)^2}} \end{aligned}$$

On pose  $\alpha^2 = \frac{2mE}{p_\theta^2} + \frac{m^2 k^2}{p_\theta^4}$  et  $v = (u - \frac{mk}{p_\theta^2})/\alpha$  ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{p_\theta dr'}{\sqrt{2mE + \frac{2mk}{r'} - \frac{p_\theta^2}{r'^2}}} &= - \int_{-mk/p_\theta^2 \alpha}^{(1/r - \frac{mk}{p_\theta^2})/\alpha} \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} \\ &= \arccos \left[ \left( \frac{1}{r} - \frac{mk}{p_\theta^2} \right) / \alpha \right] - \arccos \left( - \frac{mk}{p_\theta^2 \alpha} \right) \end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$\begin{aligned} \arccos \left[ \left( \frac{1}{r} - \frac{mk}{p_\theta^2} \right) / \alpha \right] - \arccos \left( - \frac{mk}{p_\theta^2 \alpha} \right) &= \pm(\theta + K) \\ \implies \frac{1}{r} &= \frac{mk}{p_\theta^2} + \alpha \cos(\theta - \theta_0) \end{aligned}$$

où  $\theta_0 = \pm K + \arccos \left( - \frac{mk}{p_\theta^2 \alpha} \right)$ . Aussi,

$$r(\theta) = \frac{\frac{p_\theta^2}{mk}}{1 + \frac{\alpha p_\theta^2}{mk} \cos(\theta - \theta_0)}$$

qui est l'équation d'une conique de paramètre  $p = p_0^2/mk$  et d'excentricité  $e = \alpha/p$ .

### 3.2.3 Corrigé

3. On dérive le potentiel par rapport à  $x$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(x)}{\partial x} &= 2V_0 \frac{\sinh(x)}{\cosh^3(x)} \\ &= 0 \Rightarrow \sinh(x) = 0 \Rightarrow x = 0.\end{aligned}$$

et  $V(x=0) = -V_0$ . Pour montrer que c'est un minimum, il suffit de calculer la dérivée seconde au point  $x=0$  et de montrer que  $V''(0) > 0$  :

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = 2V_0 \left( \frac{\cosh^2(x) - 3\sinh^2(x)}{\cosh^4(x)} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 2$$

ce qui est bien le cas.

Or  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = 0$ .

2. Le lagrangien de la particule est

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\dot{x}, x, t) &= T - V(x) \\ &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{V_0}{\cosh^2(x)}.\end{aligned}$$

Le moment conjugué est

$$\begin{aligned}p_x &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \\ &= m\dot{x}\end{aligned}$$

ce qui donne pour le Hamiltonien

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x, p) &= p_x \dot{x} - \mathcal{L} \\ &= \frac{p^2}{2m} - \frac{V_0}{\cosh^2(x)}.\end{aligned}$$

3. On s'intéresse aux petites oscillations,  $x \rightarrow 0$ ,

— alors on fait un développement limité à l'ordre 2 autour de  $x=0$  :

$$\begin{aligned}V(x) &= V(0) + x \frac{\partial V(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} + \frac{x^2}{2!} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} + \mathcal{O}(x^3) \\ &= -V_0 + V_0 x^2\end{aligned}$$

car  $V'(0) = 0$  et  $V''(0) = 2$ .

— Pour établir l'équation du mouvement, on peut utiliser soit les équations de Lagrange soit celles de Hamilton :

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{\partial \mathcal{H}(x, p)}{\partial x} \\ m\ddot{x} &= -2V_0x \\ \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2V_0}{m}x &= 0 \end{aligned}$$

qui est l'équation d'un mouvement d'oscillations autour de  $x = 0$  avec la pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{2V_0}{m}} \Rightarrow \nu = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2V_0}}$$

4. Le Hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps alors il est conservé. Or l'équation de HJ donne

$$\mathcal{H}(x, p) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0$$

avec comme solution (variables séparées)  $W(x, t) = W_x(x) + W_t(t)$  et  $p_x = \partial W/\partial x = \partial W_x(x)/\partial x$ . Comme  $\mathcal{H}$  est conservé alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial W_t(t)}{\partial t} = -\mathcal{H}(x, p) = -E \\ \Rightarrow W_t(t) &= -Et. \end{aligned}$$

Quant à  $W_x(x)$ , en remplaçant  $p_x$  par  $\partial W_x(x)/\partial x$  dans l'expression de HJ, on obtient, sachant que dans ce cas la constante d'intégration  $\alpha = E$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, p) &= \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W_x(x)}{\partial x} \right)^2 - \frac{V_0}{\cosh^2(x)} = E \\ \Rightarrow \frac{\partial W_x(x)}{\partial x} &= \pm \sqrt{2m \left( E + \frac{V_0}{\cosh^2(x)} \right)} \Rightarrow W_x(x) = \pm \int \sqrt{2m \left( E + \frac{V_0}{\cosh^2(x)} \right)} dx \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement

$$W(x, t) = -Et \pm \int \sqrt{2m \left( E + \frac{V_0}{\cosh^2(x)} \right)} dx.$$

5. Comme le mouvement est périodique, l'on peut utiliser la méthode de HJ des variables conjuguées angle-action. Aussi, nous avons

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W}{\partial x} dx.$$

6. Comme le mouvement est périodique, lorsque la particule atteint les bornes en  $x$ , son énergie cinétique est nulle et donc son énergie mécanique est réduite à son énergie potentielle, ce qui permet d'écrire

$$\mathcal{H}(x = x_b, p_x = 0) = \alpha = E \implies \cosh^2(x_b) = -\frac{V_0}{E} \implies x_{b\pm} = \pm \operatorname{argcos} \sqrt{-\frac{V_0}{E}}.$$

Rappelons que  $E < 0$  et donc la racine carrée est bien définie.

7. Calculons l'expression de  $J$ . En effet,

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W}{\partial x} dx \\ J &= \frac{1}{2\pi} \left[ + \int_{x_{b-}}^{x_{b+}} \sqrt{2m \left( E + \frac{V_0}{\cosh^2(x)} \right)} dx - \int_{x_{b+}}^{x_{b-}} \sqrt{2m \left( E + \frac{V_0}{\cosh^2(x)} \right)} dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{x_{b-}}^{x_{b+}} \sqrt{2m \left( E + \frac{V_0}{\cosh^2(x)} \right)} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{x_{b+}} \sqrt{2m \left( E + \frac{V_0}{\cosh^2(x)} \right)} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{-2mE} \int_0^{x_{b+}} \sqrt{\frac{V_0}{-E} \frac{1}{\cosh^2(x)} - 1} dx \end{aligned}$$

or

$$\int_0^{\operatorname{argcos}(a)} \sqrt{\frac{a}{\cosh^2(x)} - 1} dx = \frac{\pi}{2} (a - 1)$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned} J &= \frac{2}{\pi} \times \sqrt{-2mE} \times \frac{\pi}{2} \left( \sqrt{\frac{V_0}{-E}} - 1 \right) \\ &= \sqrt{-2mE} \left( \sqrt{\frac{V_0}{-E}} - 1 \right) = \sqrt{2m} \left( \sqrt{V_0} - \sqrt{-E} \right) = \sqrt{2mV_0} \left( 1 - \sqrt{\frac{-E}{V_0}} \right). \end{aligned}$$

Pour déterminer la pulsation propre, il suffit d'inverser la relation précédente, ce qui donne

$$E = - \left( \sqrt{V_0} - \frac{J}{\sqrt{2m}} \right)^2$$

et d'utiliser la définition

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\partial E}{\partial J} = 2 \left( \sqrt{V_0} - \frac{J}{\sqrt{2m}} \right) \times \frac{1}{\sqrt{2m}} \\ &= \sqrt{\frac{2V_0}{m}} - J \sqrt{\frac{2}{m}} \end{aligned}$$

On note que cette pulsation tend vers celle des petites oscillations si  $J \rightarrow 0$ .



## 4.1 Contrôle Novembre 2013

## Questions de cours (3 points)

1. Montrer que deux lagrangiens différant par une dérivée totale d'une fonction par rapport au temps,

$$\mathcal{L}'(q_k, \dot{q}_k, t) = \mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k, t) + \frac{df(q_k)}{dt}$$

décrivent la même dynamique.

2. Rappeler la démonstration du théorème de Noether

$$I(q_k, \dot{q}_k) = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\tilde{q}_k}{ds} \Big|_{s=0}$$

où chacune de ces grandeurs est définie dans le cours.

## Exercice 1 (3 points)

Considérons une particule qui se déplace dans le plan ( $OXY$ ). Sachant que l'énergie cinétique  $T = T(\dot{x}, \dot{y})$  et que  $\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = T - V$ , dire quelle est la loi de symétrie à laquelle obéit le lagrangien et quelle grandeur est conservée dans les cas suivants :

1.  $V(x, y, t) = ax$  ;
2.  $V(x, y) = at(x^2 + y^2)$  ;
3.  $V(x, y) = a(x - y)$ .

## Exercice 2 (6 points)

Une particule de masse  $m$  et de charge  $q$  se déplace dans une région où règne un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ . La position de la particule est repérée par les coordonnées  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  et sa vitesse est donnée par  $\vec{v} = (v_1 = \dot{x}_1, v_2 = \dot{x}_2, v_3 = \dot{x}_3)$ . Les coordonnées généralisées et les vitesses généralisées coïncident avec les coordonnées et les composantes de la vitesse de la particule. On rappelle que  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi(x_i, t) - \frac{\partial \vec{A}(x_i, t)}{\partial t}$  et  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(x_i, t)$ ,  $\varphi(x_i, t)$  et  $\vec{A}(x_i, t)$  sont respectivement les potentiels scalaire et vectoriel.  $\vec{\nabla}$  est l'opérateur différentiel nabla<sup>1</sup>.

1. Calculer la dérivée totale par rapport au temps de  $\vec{A}$ ,  $\frac{d\vec{A}}{dt}$ .
2. Montrer que les composantes<sup>2</sup> de la force de Lorentz  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ , à laquelle la particule est soumise, peuvent se mettre sous la forme

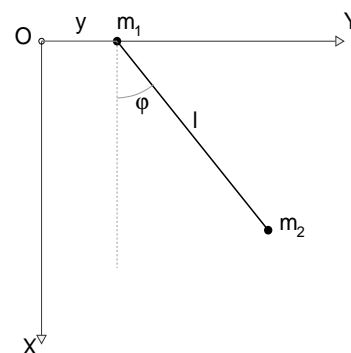
$$F_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial V(x_i, \dot{x}_i, t)}{\partial v_i} - \frac{\partial V(x_i, \dot{x}_i, t)}{\partial x_i}$$

où  $V(x_i, \dot{x}_i, t) = q(\varphi(x_i, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(x_i, t))$ .

3. En déduire le lagrangien de la particule  $\mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i, t)$ . Ecrire les équations du mouvement de la particule.
4. Calculer les moments conjugués  $(p_x, p_y, p_z)$ .
5. En déduire le hamiltonien  $\mathcal{H}(x_i, p_{ix}, t)$  de la particule. Que représente-t-il? Commenter son expression.

## Exercice 3 (8points)

Soit un pendule de longueur  $l$  inextensible et de masse  $m_2$  soumis à l'action de son poids. Son point de suspension de masse  $m_1$  est astreint à se déplacer sans frottement le long de l'axe horizontal  $OY$ . La position de  $m_1$  est repérée par  $y$ . Le mouvement du système  $(S)$  ainsi formé par  $m_1$  et  $m_2$  a lieu dans le plan vertical  $(OXY)$ , voir figure ci-contre.



1.  $\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi) = \vec{\nabla}(\varphi)$  et  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ . On rappelle que  $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{z}) = (\vec{u} \cdot \vec{z}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{z}$ .
2.  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$

1. Montrer que  $(S)$  a deux degrés de liberté.  
On utilise  $y$  et  $\varphi$  comme coordonnées généralisées.
2. Calculer les coordonnées des masses  $m_1$  et de  $m_2$  en fonction de  $y$ ,  $\varphi$  et  $l$ . En déduire leurs vitesses et leurs énergies cinétiques. Calculer l'énergie cinétique de  $(S)$ .
3. Dénombrer les forces qui s'appliquent sur  $(S)$  en précisant celle(s) qui travaille(nt). En déduire l'énergie potentielle de  $(S)$ .
4. Montrer que le lagrangien de  $(S)$  est donné par

$$\mathcal{L}(y, \varphi, \dot{y}, \dot{\varphi}) = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{y}^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 l \dot{y} \dot{\varphi} \cos \varphi + m_2 g l \cos \varphi$$

Calculer les moments conjugués  $p_y$  et  $p_\varphi$ .

5. Etablir les équations de Lagrange. Déterminer les intégrales premières du système et préciser leurs lois de symétrie.
6. En utilisant l'une des intégrales premières, exprimer  $y = f(\varphi)$  et déduire l'équation de mouvement en  $\varphi$ . Les conditions initiales sont  $y(t=0) = 0$ ,  $\dot{y}(t=0) = v_0$ ,  $\dot{\varphi}(t=0) = 0$  et  $\varphi(t=0) = \varphi_0$ .
7. En se plaçant dans le cadre de l'approximation des faibles oscillations,  $\varphi \rightarrow 0$ , et de celle des oscillations lentes,<sup>3</sup> montrer que l'équation du mouvement en  $\varphi$  s'écrit comme suit

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_1} \varphi = 0.$$

Déterminer la solution  $\varphi = \varphi(t)$ .

8. Déduire la solution  $y = y(t)$ .

## 4.2 Corrigé du contrôle Novembre 2013

### Questions de cours(3pts)

1. Montrons que deux lagrangiens différant par une différentielle totale par rapport au temps d'une fonction décrivent la même dynamique, c'est à dire donnent les mêmes équations du mouvement

2pts

$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{df(q_i, t)}{dt} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{df}{dt} \right] \quad \text{0.5pt}$$

or

$$\frac{d}{dt} = \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \ddot{q}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{0.5pt}$$

$$\Rightarrow \quad \text{0.5pt} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{df}{dt} \right] = \dot{q}_i \frac{\partial^2 f}{\partial^2 q_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i} \\ \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{df}{dt} = \dot{q}_i \frac{\partial^2 f}{\partial^2 q_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial t} \end{array} \right.$$

3. on néglige le terme de l'équation différentielle en  $\dot{\varphi}$ .

ce qui implique que

$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{0.5pt}$$

et donc les équations de Lagrange restent invariantes.

2. Démonstration du théorème de Noether

**Énoncé** Soit un jeu de coordonnées généralisées  $\tilde{q}_k(s)$  dépendant continument d'un paramètre  $s$  et tel que  $\tilde{q}_k(0) = q_k$ . Si le lagrangien est invariant par rapport à la transformation  $q_k \rightarrow \tilde{q}_k$ , c'est à dire  $L(\tilde{q}_k, \dot{\tilde{q}}_k, t) = L(q_k, \dot{q}_k, t)$ , alors

$$I(q_k, \dot{q}_k) = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\tilde{q}_k}{ds} \Big|_{s=0}$$

est une constante du mouvement.

**Démonstration**  $L$  est indépendant de  $s$ , implique

$$\begin{aligned} \frac{dL}{ds} &= \sum_k \left( \frac{\partial L}{\partial \tilde{q}_k} \frac{d\tilde{q}_k}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_k} \frac{d\dot{\tilde{q}}_k}{ds} \right) \\ &= \sum_k \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_k} \frac{d\tilde{q}_k}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_k} \frac{d}{dt} \frac{d\tilde{q}_k}{ds} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_k \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_k} \frac{d\tilde{q}_k}{ds} \right) = 0 \quad \text{1.0pt} \end{aligned}$$

ce qui en évaluant l'expression obtenue en  $s = 0$  prouve le théorème.

### Exercice 1 (3points)

Nous avons  $T = T(\dot{x}, \dot{y})$  et comme  $\mathcal{L} = T - V$ , alors la dépendance de  $\mathcal{L}$  en fonction des coordonnées  $(x, y)$  est celle du potentiel. Ainsi

1.  $V(x, y, t) = ax$  est indépendant de  $y$  et donc  $\mathcal{L}$  est indépendant aussi de  $y$  ce qui implique que  $\mathcal{L}$  est invariant par rapport à toute transformation de  $y$ , en particulier la translation selon  $OY$ . La loi de symétrie est ainsi la translation selon  $OY$ . **0.5pt**

La grandeur conservée est  $p_y$ , le moment conjugué de  $y$  qui est la composante de la quantité de mouvement selon  $OY$ . **0.5pt**

On remarque aussi que le potentiel ne dépend pas explicitement du temps ce qui implique aussi que  $\mathcal{L}$  ne dépend pas explicitement du temps et donc invariant par rapport à une translation dans le temps. La quantité conservée est

l'énergie. **0.25pt**

2.  $V(x, y) = at(x^2 + y^2)$  : puisque  $V$  dépend de  $x^2 + y^2 = r^2$  et donc sa valeur ne change pas si l'on effectue une rotation, puisque le module d'un vecteur est invariant par rapport à une rotation. La symétrie concerne ainsi les rotations. **0.5pt**

La quantité conservée est le moment cinétique, selon le théorème de Noether. **0.5pt**

3.  $V(x, y) = a(x - y)$  : ce potentiel dépend de la différence entre  $x$  et  $y$  et donc sa valeur reste la même si l'on fait une translation simultanée selon  $OX$ ,  $x \rightarrow x' + \epsilon$  et selon  $OY$ ,  $y \rightarrow y' = y + \epsilon$ , alors  $V(x', y') = a(x' - y') = a(x - y)$  et donc

invariant par rapport à une translation selon  $\vec{i} + \vec{j}$ . **0.25pt**

La symétrie est donc la translation dans la direction  $\vec{i} + \vec{j}$ . La grandeur conservée

est la quantité de mouvement selon la direction  $\vec{i} + \vec{j}$ . **0.25pt**

On remarque aussi que le potentiel ne dépend pas explicitement du temps ce qui implique aussi que  $\mathcal{L}$  ne dépend pas explicitement du temps et donc invariant par rapport à une translation dans le temps. La quantité conservée est

l'énergie. **0.25pt**

## Exercice 2 (6points)

1. Calculons la dérivée totale par rapport au temps de  $\vec{A}(x_k, t)$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}(x_k, t)}{dt} &= \frac{\partial \vec{A}(x_k, t)}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}(x_k, t)}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}(x_k, t)}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}(x_k, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \vec{A}(x_k, t)}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \vec{A}(x_k, t)}{\partial t} \quad \mathbf{1.0pt} \\ &= \frac{\partial \vec{A}(x_k, t)}{\partial x_i} v_i + \frac{\partial \vec{A}(x_k, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \vec{A}(x_k, t)}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{v} + \frac{\partial \vec{A}(x_k, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

2. Exprimons les composantes de  $\vec{F}$

$$\begin{aligned}
 \frac{F_i}{q} &= E_i + (\vec{v} \wedge \vec{B})_i \\
 &= -\nabla_i(\varphi(x_k, t)) - \frac{\partial A_i(x_k, t)}{\partial t} + \left[ \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(x_k, t)) \right]_i \\
 &= -\nabla_i(\varphi(x_k, t)) - \frac{\partial A_i(x_k, t)}{\partial t} + \left[ \nabla_i (\vec{v} \cdot \vec{A}(x_k, t)) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) A_i(x_k, t) \right] \\
 &= -\nabla_i(\varphi(x_k, t)) + \nabla_i (\vec{v} \cdot \vec{A}(x_k, t)) - \frac{dA_i(x_k, t)}{dt} \\
 &= -\nabla_i (\varphi(x_k, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(x_k, t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_i} (\varphi(x_k, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(x_k, t)) \\
 &= -\nabla_i V(x_k, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_i} V(x_k, t) \quad \text{2.0pts}
 \end{aligned}$$

qui est la relation recherchée.

3. L'énergie cinétique de la particule est  $T = \frac{1}{2}mv^2$ , ce qui donne pour le lagrangien

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(x_k, \dot{x}_k) &= T(\dot{x}_k) - V(x_k, \dot{x}_k, t) \\
 &= \frac{1}{2}mv^2 - q (\varphi(x_k, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(x_k, t)) \quad \text{0.5pt}
 \end{aligned}$$

Les équations du mouvement sont données par les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \implies \frac{d}{dt}(mv_i) + q \frac{d}{dt} A_i(x_k, t) = -q (\nabla_i \varphi(x_k, t) - \vec{v} \cdot \nabla_i \vec{A}(x_k, t))$$

en remplaçant  $d\vec{A}(x_k, t)/dt$  par son expression, on trouve

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(mv_i) &= -q \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (A_i(x_k, t)) - q \frac{\partial A_i(x_k, t)}{\partial t} - q (\nabla_i \varphi(x_k, t) - \vec{v} \cdot \nabla_i \vec{A}(x_k, t)) \\
 &= -q \left( \nabla_i \varphi(x_k, t) + \frac{\partial A_i(x_k, t)}{\partial t} \right) + q (\nabla_i (\vec{A}(x_k, t)) \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (A_i(x_k, t))) \\
 &= q E_i + q \left[ \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(x_k, t)) \right]_i \\
 &= F_i \quad \text{0.5pt}
 \end{aligned}$$

et dont la forme vectorielle est

$$m\ddot{\vec{x}} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{F}$$

4. Les moments conjugués sont

$$p_{x_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1 + aA_1(x_k, t) \quad \text{0.25pt}$$

$$p_{x_2} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 + aA_2(x_k, t) \quad \text{0.25pt}$$

$$p_{x_3} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_3} = m\dot{x}_3 + aA_3(x_k, t) \quad \text{0.25pt}$$

5. Le hamiltonien est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x_k, p_{x_k}, t) &= \sum_{i=1}^3 p_{x_i} \dot{x}_i - \mathcal{L}(x_k, \dot{x}_k, t) \\ &= \sum_{i=1}^3 (m\dot{x}_i + aA_i(x_k, t)) \dot{x}_i - \frac{1}{2}mv^2 + q \left( \varphi(x_k, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(x_k, t) \right) \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi(x_k, t). \quad \text{0.75pt} \end{aligned}$$

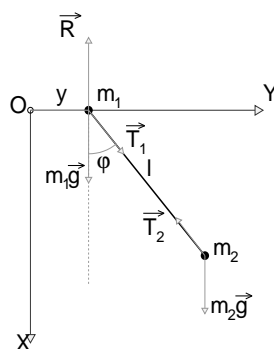
Il représente l'énergie de la particule 0.25pt.

On constate que le champ magnétique ne contribue pas à l'énergie ce qui est attendu puisque la force exercée sur la particule par le champ magnétique,  $\vec{v} \wedge \vec{B}$ , ne travaille pas et donc ne contribue pas à l'énergie :

$$(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = (\vec{dl} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{B} = \vec{0} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{0.25pt}$$

### Exercice 3 (8points)

Soit un pendule de longueur  $l$  inextensible et de masse  $m_2$  soumis à l'action de son poids. Son point de suspension de masse  $m_1$  est astreint à se déplacer sans frottement le long de l'axe horizontal  $OY$ , voir figure ci-dessous.



1. Le système est formé par deux masses et le mouvement est plan, ce qui donne 2 coordonnées par masse. Or la masse  $m_1$  est astreinte à se déplacer par l'axe  $OY$  et la distance entre  $m_1$  et  $m_2$  est égale à la longueur du fil ce qui donne deux contraintes. Quatre coordonnées et deux contraintes donc deux degrés de liberté. **0.5pt**
2. Calculons les coordonnées de  $m_1$  ( $x_1, y_1$ ) :

$$\mathbf{0.25pt} \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = y \end{cases} \implies \mathbf{0.25pt} \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{y}_1 = \dot{y} \end{cases}$$

ce qui donne pour les composantes de la vitesse de  $m_1$  ( $0, \dot{y}$ ).  
On procède de la même manière pour la masse  $m_2$

$$\mathbf{0.25pt} \begin{cases} x_2 = l \cos \varphi \\ y_2 = y + l \sin \varphi \end{cases} \implies \mathbf{0.25pt} \begin{cases} \dot{x}_2 = -l \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y}_2 = \dot{y} + l \dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases}$$

ce qui donne pour les composantes de la vitesse de  $m_1$  ( $-l\dot{\varphi}\sin\varphi, \dot{y} + l\dot{\varphi}\cos\varphi$ ).  
Ainsi l'énergie cinétique de  $m_1$  est égale à  $T_1 = 1/2 m_1 \dot{y}^2$  et celle de  $m_2$  est

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{y}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi)$$

ce qui donne pour l'énergie cinétique de ( $S$ )

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_2 (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi) . \mathbf{0.25pt}$$

3. Les forces qui sont appliquées à ( $S$ ), voir figure ci-dessus,  
—  $\vec{R}$  et  $m_2 \vec{g}$  qui sont appliquées à  $m_1$ . Elles ne travaillent pas puisqu'elles sont perpendiculaires au déplacement de  $m_2$ . **0.25pt**  
 $\vec{T}_1 = -\vec{T}_2$  sont des contraintes internes à ( $S$ ) et donc ne contribuent pas au potentiel. **0.25pt**
- $m_2 \vec{g}$  appliquées à  $m_2$  et dont le travail élémentaire pour un déplacement infinitésimal  $\vec{dl}_2$

$$\delta W(m_2 \vec{g}) = m_2 \vec{g} \cdot \vec{dl}_2 = -m_2 g l \sin \varphi d\varphi$$

$$\implies dV = -\delta W = m_2 g \sin \varphi d\varphi \implies V = -m_2 g l \cos \varphi + K \mathbf{0.75pt}$$

la constante  $K = 0$ .



4. Le lagrangien de ( $S$ ) est égale à

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y, \varphi, \dot{y}, \dot{\varphi}) &= T - V \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi) + m_2gl\cos\varphi.\end{aligned}\quad \text{0.5pt}$$

Les moments conjugués sont donnés par

$$p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = (m_1 + m_2)\dot{y} + m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi \quad \text{0.25pt}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m_2l^2\dot{\varphi} + m_2l\dot{y}\cos\varphi. \quad \text{0.25pt}$$

5. Les équations du mouvement sont

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \implies (m_1 + m_2)\ddot{y} + m_2l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) = 0 \quad \text{0.25pt}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \implies m_2l^2\ddot{\varphi} + m_2l(\ddot{y}\cos\varphi - \dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi) = -m_2l\dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2gl\sin\varphi \quad \text{0.25pt}$$

cette dernière équation se réduisant à  $l\ddot{\varphi} + \dot{y}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0$ .

Comme  $\mathcal{L}$  ne dépend pas explicitement du temps, l'énergie mécanique est une

intégrale première associée à l'invariance par translation dans le temps 0.25pt.

De même,  $y$  est une variable cyclique, ce qui implique que  $p_y$  est conservée et la

loi de symétrie est la translation selon  $OY$ . 0.25pt

6.  $p_y$  est une intégrale première, alors

$$\begin{aligned}p_y = K &\implies \dot{y} + \frac{m_2l}{m_1 + m_2}\dot{\varphi}\cos\varphi = \frac{K}{m_1 + m_2} \\ &\implies dy = -\frac{m_2l}{m_1 + m_2}\cos\varphi d\varphi + \frac{K}{m_1 + m_2}dt \\ &\implies y = -\frac{m_2l}{m_1 + m_2}\sin\varphi + \frac{K}{m_1 + m_2}t + K_1\end{aligned}\quad \text{0.5pt}$$

et les deux constantes sont déterminées à partir des conditions initiales

$$\begin{aligned}y_0 = 0 &\implies K_1 = \frac{m_2l}{m_1 + m_2}\sin\varphi_0 \\ \dot{y}(0) = v_0 &\implies K = (m_1 + m_2)v_0\end{aligned}$$

ce qui donne

$$y = v_0t - \frac{m_2l}{m_1 + m_2}(\sin\varphi - \sin\varphi_0). \quad \text{0.5pt}$$

7. On reprend l'équation

$$l\ddot{\varphi} + \dot{y}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0$$

et on substitue  $\dot{y}$  par  $-(m_2l/[m_1 + m_2])(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)$  et on obtient

$$\ddot{\varphi} \left( 1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos^2\varphi \right) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\varphi}^2 \sin\varphi \cos\varphi + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0$$

ce qui donne le cadre de l'approximation des petites oscillations,  $\sin\varphi \simeq \varphi$  et  $\cos\varphi \simeq 1$ , et les oscillations lentes :

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_1} \varphi = 0 \quad \text{1.0pt}$$

et qui est l'équation recherchée.

C'est une équation différentielle du second ordre sans second membre à coefficients constants et dont l'équation caractéristique est  $r^2 + \frac{g}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_1} = 0$  qui a deux solutions complexes  $r = \pm i\omega_0$  avec  $\omega_0 = \sqrt{g(m_1 + m_2)/lm_1}$  et donc la solution est

$$\varphi(t) = A_1 e^{-i\omega_0 t} + A_2 e^{i\omega_0 t} = A \sin(\omega_0 t - \beta_0)$$

avec  $A \sin\beta_0 = \varphi_0$  et  $0 = A \omega_0 \cos(\beta_0) \implies \beta_0 = \pi/2$  et donc  $A = \varphi_0$

la solution est alors  $\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \pi/2) = \varphi_0 \cos\omega_0 t$  **0.25pt.**

8. La solution de  $y$  est alors, en tenant compte de  $\sin\varphi \simeq \varphi$

$$y = v_0 t - \frac{m_2 l \varphi_0}{m_1 + m_2} (\cos\omega_0 t - 1). \quad \text{0.75pt}$$

### 4.3 Contrôle Janvier 2014

#### QUESTIONS DE COURS (6 points)

1. Enoncer le principe de Maupertuis et montrer que l'action réduite d'un système conservatif peut être exprimée comme suit

$$\mathcal{S}_0(q; P) = \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} \sqrt{2(E - V(q))} ds$$

où  $ds$  est l'élément de distance dans l'espace des configurations décrit par les coordonnées généralisées  $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$ ,  $n$  étant le nombre de degrés de liberté.

2. Rappeler ce que c'est que la surface d'action. Montrer qu'elle se propage dans l'espace des configurations avec la vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V)}}$$

3. En utilisant la dualité entre la surface d'action dans l'espace des configurations et la phase de l'onde dans l'espace des positions, montrer que l'énergie mécanique de la particule est proportionnelle à sa fréquence  $E = h\nu$  et que son impulsion l'est au module du vecteur d'onde  $p = \hbar k$ .
4. En partant de l'équation de propagation des ondes

$$\left( \Delta - \frac{1}{v_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(x, t) = 0$$

établir l'équation de Schrodinger pour un système conservatif donnée par

$$H\Psi(x, t) = \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V \right) \Psi(x, t) = E\Psi(x, t).$$

### EXERCICE 1 (4 points)

On considère la transformation

$$\begin{aligned} Q &= p^\alpha q^\beta \\ P &= p^\gamma q^\delta \end{aligned}$$

telles que  $q > 0$  et  $p > 0$ .

1. Quelles conditions doivent vérifier  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  et  $\gamma$  pour que la transformation soit canonique ?
2. Etablir la fonction génératrice de type deux  $G_2(q, P)$  qui engendre cette transformation.

### EXERCICE 2 : POTENTIEL CONIQUE (10 points)

Considérons une particule de masse  $m$  astreinte à se déplacer sur un plan. La position de la particule est repérée dans le référentiel  $\mathcal{R}(O, xyz)$ , considéré galiléen, par les coordonnées  $(x, y)$ . Le potentiel auquel la particule est soumise est de la forme  $V(r) = ar$ , avec  $r^2 = x^2 + y^2$  et  $a$  une constante positive. On utilise les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  comme coordonnées généralisées.

1. Montrer que la force qui dérive de ce potentiel est centrale. En déduire que le moment cinétique  $L_z$  par rapport à  $O$  est conservé.
2. Calculer le lagrangien  $\mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$ . En déduire les moments conjugués  $p_r$  et  $p_\theta$ .
3. Etablir le hamiltonien  $\mathcal{H}(r, \theta, p_r, p_\theta)$  de la particule et trouver les intégrales premières.
4. Exprimer le hamiltonien sous la forme

$$\mathcal{H}(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2m} + \tilde{V}(r).$$

5. Montrer qu'un mouvement circulaire stable est possible. En déduire le rayon  $r_0$  de la trajectoire.

6. On perturbe maintenant ce mouvement par des petites oscillations radiales  $r = r_0 + \delta r$  autour de  $r_0$ . Montrer que l'équation des petites oscillations est donnée par

$$m\delta\ddot{r} + 3a \left( \frac{ma}{L_z^2} \right)^{1/3} \delta r = 0.$$

En déduire leur fréquence.

7. Soit  $\mathcal{S}(r, \theta, t; P_r, P_\theta)$  l'action hamiltonienne. Par séparation des variables, on a  $\mathcal{S}(r, \theta, t; P_r, P_\theta) = \mathcal{S}_\theta(\theta; P_\theta) + \mathcal{S}_r(r; P_r) - Et$ .  
 — Montrer que  $\mathcal{S}_\theta(\theta; P_\theta) = C\theta$ , où  $C$  est une constante.  
 — A partir de l'équation de Hamilton-Jacobi, expliciter l'équation vérifiée par  $\mathcal{S}_r(r; P_r)$ .  
 — En déduire que

$$\mathcal{S}(r, \theta, t; P_r, P_\theta) = \int \sqrt{2m(E - ar) - \frac{C^2}{r^2}} dr + C\theta - Et.$$

8. On représente le portrait de phase séparément dans les plans  $(r, p_r)$  et  $(\theta, p_\theta)$ . Sur ces deux plans représenter le mouvement circulaire de la question (5.). Que devient le portrait dans le plan  $(r, p_r)$  si l'on admet les petites oscillations radiales de la question (6.) ?

## 4.4 Corrigé du contrôle Janvier 2015

### QUESTIONS DE COURS<sup>4</sup> (6 points)

1.5pt

1. **Principe de Maupertuis** La trajectoire d'un système conservatif est déterminée par l'extrémisation de l'action réduite  $\mathcal{S}_0$ . **0.25pt**  
 Reprenons l'expression de la loi de Maupertuis et éliminons les moment conjugués. Sachant que pour un système conservatif,  $V = V(q)$  et que l'énergie cinétique, est une fonction homogène d'ordre 2 de  $\dot{q}_k$ ,  $T = 1/2 \sum_{i,j} m_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$  alors

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \sum_{ij} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} [\delta_{ik} \dot{q}_j + \dot{q}_i \delta_{jk}] \\ &= \sum_i m_{ki} \dot{q}_i \quad \boxed{0.5pt} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_i \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} p_i dq_i &= \sum_{ij} \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} m_{ij} \dot{q}_j dq_i = \frac{1}{dt} \sum_{ij} \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} m_{ij} dq_j dq_i \\ &= \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} \frac{ds}{dt} ds \\ &= \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} \sqrt{2(E-V)} ds \quad \text{0.5pt} \end{aligned}$$

L'action réduite d'un système conservatif peut être exprimée en fonction des coordonnées généralisées comme suit

$$\mathcal{S}_0(q; P) = \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} \sqrt{2(E-V(q))} ds \quad \text{0.25pt}$$

2. L'état mécanique de la particule est décrit par son action  $\mathcal{S}(q, t; P)$  qui s'exprime en fonction de l'action réduite, puisque le système est conservatif, par

1.5pt

$$\mathcal{S}(q, t; P) = \mathcal{S}_0(q; P) - Et.$$

Considérons les lieux de l'espace où l'action  $\mathcal{S}(q, t; P)$  à l'instant  $t$  est constante;  $\mathcal{S}(q, t; P) = \text{Cte}$ . Ainsi  $\mathcal{S}(q, t = 0; P) = \mathcal{S}_0(q, P)$ . Cherchons  $\mathcal{S}(q', t + dt; P)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(q', t + dt; P) &= \mathcal{S}_0(q'; P) - E(t + dt) \\ &= \mathcal{S}_0(q + dq; P) - Et - Edt \\ &= \mathcal{S}_0(q; P) + d\mathcal{S}_0 - Et - Edt \\ &= \mathcal{S}(q, t; P) + d\mathcal{S}_0 - Edt \quad \text{0.75pt} \end{aligned}$$

comme la surface considérée de l'action est constante et a la même valeur et  $d\mathcal{S}_0 = \sqrt{2(E-V)} ds = \sqrt{2(E-V)} \sqrt{m} dq$ , alors

$$\sqrt{2m(E-V)} dq - Edt = 0 \implies v_\varphi = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}} \quad \text{0.75pt}$$

La surface d'action se propage dans l'espace des configurations avec la vitesse  $v_\varphi = \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}}$

L'action joue dans l'espace dual, l'espace des configurations, ce que joue la phase dans l'espace des positions,

3. Partant de la dualité entre la surface d'action dans l'espace des configurations et la phase de l'onde dans l'espace des positions, nous avons

1.5pt

$$\varphi(\vec{r}, t) = (\vec{k} \cdot \vec{r} - 2\pi\nu t) = 2\pi \left( \frac{L(r)}{\lambda_0} - \nu t \right) \iff \mathcal{S}(q, t; P) = \mathcal{S}_0(q; P) - Et \quad \text{0.5}$$

où  $L(r) = nr$  est le chemin optique et  $n$  l'indice de réfraction du milieu,  $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide.

En comparant terme à terme, on peut déduire que l'énergie mécanique est proportionnelle à la fréquence

$$E = h\nu \quad \text{0.5}$$

et le coefficient de proportionnalité  $h$  est la constante de Planck. Partant de cette relation, on peut déduire la relation entre l'impulsion de la particule au vecteur d'onde comme suit

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{v_\phi} \\ &= \frac{2\pi\nu mv}{E} = \frac{2\pi}{h}p \implies p = \hbar k \quad \text{0.5pt} \end{aligned}$$

1.5pt

4. En partant de l'équation de propagation des ondes électromagnétiques,

$$\left( \Delta - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi = 0$$

déduite des équations de Maxwell, et stipulant l'universalité de cette équation, trouvons l'équation décrivant l'évolution de la particule si elle est décrite par une onde  $\Psi$ . En effet, sachant que la dépendance temporelle de  $\phi$  est toujours de la forme  $e^{-i\omega t}$ , même dans le cas d'un espace inhomogène, l'équation précédente devient

$$\left( \Delta + \frac{n^2\omega^2}{c^2} \right) \Psi = 0. \quad \text{0.25pt}$$

En utilisant les relations déduites de la dualité entre l'espace des configurations et l'espace des positions,

$$\frac{n^2\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{v_\phi^2} = \frac{4\pi^2\nu^2 m^2 v^2}{E^2} = \frac{p^2}{\hbar^2} \quad \text{0.5pt}$$

nous avons utilisé les relations démontrées dans le paragraphe précédent  $vv_\phi = E/m$  et  $E = h\nu$ . Aussi, nous obtenons,

$$\left( \Delta + \frac{p^2}{\hbar^2} \right) \Psi = 0.$$

On peut déjà souligner qu'à partir de cette dernière relation, étant donné que l'équation est valable  $\forall \Psi \implies p^2 = -\hbar^2 \Delta = -\hbar^2 \nabla^2 = (i\hbar \nabla)^2$  qui n'est d'autre

que le principe de correspondance  $\vec{p} \rightarrow i\hbar\vec{\nabla}$ .

Continuons notre quête de l'équation de  $\Psi$ . Or nous avons

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + V \implies p^2 = 2m(H - V) \quad (0.25\text{pt})$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \left[ \Delta + \frac{1}{\hbar^2} (2m(H - V)) \right] \Psi &= 0 \\ \implies \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + (H - V) \right] \Psi &= 0 \\ \implies H\Psi &= \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V \right) \Psi \end{aligned}$$

qui n'est d'autre que l'équation de Schrodinger. Si le système est conservatif alors,  $H = E$  et l'équation devient

$$H\Psi = \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V \right) \Psi = E\Psi. \quad (0.5\text{pt})$$

### EXERCICE 1 (4 points)

On considère la transformation

$$\begin{aligned} Q &= p^\alpha q^\beta \\ P &= p^\gamma q^\delta \end{aligned}$$

telles que  $q > 0$  et  $p > 0$ .

1. Pour que la transformation soit canonique il suffit que les nouvelles variables

verifient les relations des crochets de Poisson  $(0.25\text{pt})$ ,  $\{Q, Q\} = \{P, P\} = 0$  et  $\{Q, P\} = 1$ . Aussi, 2pt

$$\begin{aligned} \{Q, P\} &= \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} \\ &= \beta p^\alpha p^{\beta-1} \gamma p^{\gamma-1} q^\delta - \alpha p^{\alpha-1} q^\beta \delta p^\gamma q^{\delta-1} \\ &= (\beta\gamma - \alpha\delta) p^{\alpha+\gamma-1} q^{\beta+\delta-1} \quad (0.5\text{pt}) \end{aligned}$$

et

$$\{Q, P\} = 1 \implies \begin{cases} \gamma = 1 - \alpha \\ \delta = 1 - \beta \\ \beta\gamma - \alpha\delta = 1 \end{cases} \quad (0.5\text{pt})$$

et en substituant les deux premières équations dans la troisième équation, on obtient

$$\beta(1-\alpha) - \alpha(1-\beta) = 1 \implies \beta - \alpha = 1$$

$$\implies \begin{cases} \gamma = 1 - \alpha \\ \delta = -\alpha \\ \beta = 1 + \alpha \end{cases} \quad \text{0.5pt}$$

ce qui donne finalement comme transformation

$$Q = p^\alpha q^{1+\alpha}$$

$$P = p^{1-\alpha} q^{-\alpha}. \quad \text{0.25}$$

2. On cherche la fonction génératrice de type deux associée à cette transformation. Aussi, on a

2pt

$$G_2 = G_2(q, P) \text{ et } p = \frac{\partial G_2(q, P)}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial G_2(q, P)}{\partial P} \quad \text{0.25pt}$$

or en utilisant les relations de la question précédente, on a

$$Q = p^\alpha q^{1+\alpha} = P^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} q^{\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{\partial G_2(q, P)}{\partial P} \implies G_2(q, P) = (1-\alpha)(Pq)^{\frac{1}{1-\alpha}} + f(q) \quad \text{0.75pt}$$

et

$$p = \frac{\partial G_2}{\partial q} = (Pq^\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} = (Pq^\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} + f'(q) \implies f'(q) = 0 \quad \text{0.75pt}$$

et donc

$$G_2(q, P) = (1-\alpha)(Pq)^{\frac{1}{1-\alpha}} + C \quad \text{0.25pt}$$

### EXERCICE 2 : POTENTIEL CONIQUE (10 points)

Considérons une particule de masse  $m$  astreinte à se déplacer sur un plan. La position de la particule est repérée dans le référentiel  $\mathcal{R}(O, xyz)$ , considéré galiléen, par les coordonnées  $(x, y)$ . Le potentiel auquel la particule est soumise est de la forme  $V(r) = ar$ , avec  $r^2 = x^2 + y^2$  et  $a$  une constante positive. On utilise les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  comme coordonnées généralisées.

1. Connaissant le potentiel  $V(r)$  dont dérive la force et en écrivant le gradient en coordonnées cylindrique<sup>5</sup>  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$ , on a

1pt

5. On peut utiliser aussi les coordonnées cartésiennes



$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(V(r)) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\vec{e}_r = -a\vec{e}_r \quad (0.25\text{pt})$$

sachant que les autres termes sont nuls puisque le potentiel est radial. Or  $\vec{r} = r\vec{e}_r \implies \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$  ce qui implique

$$\vec{F} = -a\frac{\vec{r}}{r} \quad (0.25\text{pt})$$

ce qui veut dire que la direction de la force passe tout le temps par l'origine  $O$  et donc  $\vec{F}$  est centrale.

Le théorème du moment cinétique nous donne

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge -a\frac{\vec{r}}{r} = \vec{0} \quad (0.25\text{pt})$$

ce qui implique que le moment cinétique est conservé. Or  $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{r} \wedge m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{k}$  et donc  $\vec{L} = L_z\vec{k}$  est conservé ( en module, en direction et en sens). 0.25pt

2. L'énergie cinétique est donnée par  $T = \frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$  et l'énergie potentielle est  $V(r)$ , ce qui donne pour le lagrangien de la particule

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - ar.$$

Calculons les moments conjugués

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \text{ et } p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}.$$

3. Le hamiltonien est donné par

$$\mathcal{H}(r, \theta, p_r, p_\theta) = T + V = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + ar.$$

On remarque que le hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, ce qui implique que l'énergie mécanique est conservée et donc une intégrale première. De même, la coordonnée généralisée  $\theta$  est cyclique ce qui implique que  $p_\theta$  est conservé et donc une intégrale première aussi. On en conclue que  $\mathcal{H}$  et  $p_\theta$  sont des intégrales premières.

4. De l'expression précédente on en déduit que

$$\mathcal{H}(r, \theta, p_r, p_\theta) = T + V = \frac{p_r^2}{2m} + \tilde{V}(r) \text{ avec } \tilde{V}(r) = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + ar.$$

5. Pour démontrer qu'un mouvement circulaire stable est possible, il suffit de montrer que  $r = r_0$  est une solution de l'équation du mouvement et que le potentiel effectif  $\tilde{V}(r)$  est minimal en  $r_0$ . En effet, L'équation du mouvement est

$$\begin{cases} \dot{r} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} & \dot{p}_r &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - a \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} & \dot{p}_\theta &= 0 \end{cases}$$

ce qui donne pour l'équation du mouvement

$$\dot{p}_r = m\ddot{r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - a \implies \ddot{r} - \frac{p_\theta^2}{m^2r^3} + \frac{a}{m} = 0$$

ainsi l'équation du mouvement circulaire  $r = r_0$  est une solution avec

$$\frac{p_\theta^2}{mr_0^3} = a \implies r_0 = \left( \frac{p_\theta^2}{am} \right)^{1/3}.$$

Donc  $r = r_0 = \left( \frac{p_\theta^2}{am} \right)^{1/3}$  est une solution de l'équation du mouvement. Vérifions sa stabilité. En effet,

$$\frac{d\tilde{V}(r)}{dr} = -\frac{p_\theta^2}{mr^3} + a = 0 \implies r = r_0$$

et comme

$$\frac{d^2\tilde{V}(r)}{dr^2} = 3\frac{p_\theta^2}{mr^4} > 0 \forall r \implies V(r_0) \text{ est minimum.}$$

Ce qui est le résultat recherché.

6. Reprenons l'équation du mouvement avec  $r = r_0 + \delta r \implies \dot{r} = \delta \dot{r}$  et  $\ddot{r} = \delta \ddot{r}$ . Nous avons aussi  $p_\theta = mr^2\dot{\theta} = L_z$  ce qui donne

$$m\delta\ddot{r} - \frac{L_z^2}{m} \frac{1}{r_0^3 \left(1 + \frac{\delta r}{r_0}\right)^3} + a = 0$$

en utilisant le fait que  $\frac{\delta r}{r_0} \rightarrow 0$  alors  $\frac{1}{\left(1 + \frac{\delta r}{r_0}\right)^3} \simeq 1 - 3\frac{\delta r}{r_0}$ , on obtient

$$m\delta\ddot{r} - \frac{L_z^2}{mr_0^3} + 3\frac{L_z^2}{mr_0^4}\delta r + a = 0$$

or  $\frac{L_z^2}{mr_0^3} = a$  ce qui donne finalement l'équation

$$m\delta\ddot{r} + 3a \left( \frac{ma}{L_z^2} \right)^{1/3} \delta r = 0$$

qui est une équation différentielle d'ordre 2 sans second membre à coefficients constants dont le discriminant de l'équation caractéristique est négatif. La solution donc sont des oscillations autour de  $r_0$  avec une pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{3a \left(\frac{ma}{L_z^2}\right)^{1/3}}$  et donc de fréquence

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{L_z^2}{27ma^4} \right)^{1/6}$$

7. Soit  $\mathcal{S}(r, \theta, t; P_r, P_\theta)$  l'action hamiltonienne. Par séparation des variables, on a  $\mathcal{S}(r, \theta, t; P_r, P_\theta) = \mathcal{S}_\theta(\theta; P_\theta) + \mathcal{S}_r(r; P_r) - Et$ .  
— On sait que l'action hamiltonienne vérifie

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathcal{S}_\theta}{\partial \theta} = C \implies \mathcal{S}_\theta = C\theta.$$

— On rappelle que l'équation de Hamilton-jacobi est

$$\mathcal{H}\left(r, \theta, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r}, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = 0$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} \right)^2 + ar = E$$

et en séparant les variables sachant que  $\mathcal{S}_\theta = C\theta$ , on obtient

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial \mathcal{S}_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{C^2}{2mr^2} + ar = E \implies \frac{\partial \mathcal{S}_r}{\partial r} = \pm \left( 2m(E - ar) - \frac{C^2}{r^2} \right)^{1/2}.$$

— On intègre d'abord l'équation précédente et on obtient

$$\mathcal{S}_r(r; P_r) = \pm \int \left( 2m(E - ar) - \frac{C^2}{r^2} \right)^{1/2} dr$$

ce qui donne pour l'action hamiltonienne

$$\mathcal{S}(r, \theta, t; P_r, P_\theta) = \pm \int \left( 2m(E - ar) - \frac{C^2}{r^2} \right)^{1/2} dr + C\theta - Et.$$

8. Le mouvement circulaire de la question 5 a pour équations  $r = r_0$  et  $p_\theta = L_z = \text{Constante}$ , ce qui donne respectivement comme portrait de phase :  
— dans le plan  $(r, p_r)$ , comme  $\dot{r} = 0 = p_r$ , alors le portrait de phase est un point de coordonnées  $(r_0, 0)$ .  
— dans le plan  $(\theta, p_\theta)$  l'équation est  $p_\theta = C$  et donc le portrait est une droite horizontale, parallèle à l'axe des  $\theta$ , qui passe par  $p_\theta = C$ .

Si Les petites oscillations radiales sont permises, alors  $r = r_0 + a\cos(\omega t - \varphi)$  ce qui donne  $\dot{r} = -a\omega\sin(\omega t - \varphi) = p_r/m$  ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{p_r^2}{m^2} &= a^2\omega^2\sin^2(\omega t - \varphi) \\ &= a^2\omega^2(1 - \cos^2(\omega t - \varphi)) \\ &= a^2\omega^2\left(1 - \frac{(r - r_0)^2}{a^2}\right) \implies \frac{p_r^2}{a^2\omega^2} + \frac{(r - r_0)^2}{a^2} = 1 \end{aligned}$$

qui est l'équation d'une ellipse de centre  $(r_0, 0)$  et de demi axes respectivement selon les directions de  $r$  et de  $p_r$  sont  $a$  et  $a\omega/m$ .

## 4.5 Contrôle de Rattrapage Janvier 2014

### EXERCICE 1 (6 points)

Un explorateur aperçoit dans le desert une oasis à un angle  $\arctg(\frac{5}{12})$  au dessus de l'horizontale. On se propose de déterminer la distance qui le sépare de l'oasis. Le principe de Fermat stipule que la lumière suit un chemin minimisant le temps du trajet que l'on peut exprimer comme suit

$$\mathcal{S} = \int n(s)ds$$

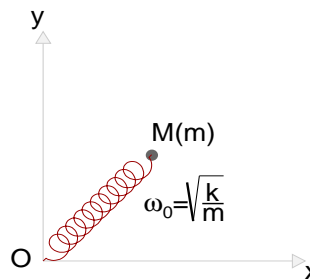
où  $\mathcal{S}$  est la fonctionnelle à minimiser,  $n(s)$  est l'indice de réfraction du milieu et  $s$  est la distance du trajet avec  $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2}$ . Dans les conditions de grande chaleur du désert, l'indice de réfraction dépend linéairement de  $z$  comme suit  $n(z) = n_0(1 - \lambda z)$ .

1. Expliciter la fonctionnelle à minimiser et trouver le "lagrangien associé". En déduire le "hamiltonien associé" et montrer qu'il est conservé.
2. Etablir l'équation de la trajectoire  $z = z(x)$ .<sup>6</sup>
3. Calculer la distance qui sépare l'explorateur de l'oasis.  
*On néglige le rayon de courbure de la terre.*

### EXERCICE 2 (14 points)

6. On donne  $\text{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ , et  $\text{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .

Considérons un oscillateur harmonique de masse  $m$  et de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et ce en deux dimensions, figure ci-contre. Le référentiel  $\mathcal{R}(O, xyz)$  est supposé galiléen. On utilise dans l'exercice les coordonnées cartésiennes.



1. Calculer la vitesse de  $M$ ,  $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ . En déduire son énergie cinétique  $T$ .
2.  $M$  est soumis à la seule action de la force de rappel  $\vec{F} = -k(|\vec{OM}| - L_0)\vec{u}$  avec  $\vec{u} = \frac{\vec{OM}}{|\vec{OM}|}$ ,  $L_0$  étant l'allongement au repos du ressort que l'on prend nul par simplification,  $L_0 = 0$ . Calculer l'énergie potentielle  $V(x, y)$ .
3. Ecrire le lagrangien  $\mathcal{L}$  de l'oscillateur harmonique et déduire les moments conjugués  $p_x$  et  $p_y$ .
4. Montrer que  $\mathcal{L}$  est invariant par rotation. En utilisant le théorème de Noether, déduire la grandeur conservée. On rappelle que lors d'une transformation associée à une rotation d'un angle  $s$  dans le plan  $(Oxy)$ , on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Considérer une transformation infinitésimale,  $s \rightarrow 0$ , et utiliser les accroissements  $\delta x$  et  $\delta y$ .

5. Montrer que le hamiltonien de l'oscillateur harmonique est donné par

$$\mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2(x^2 + y^2).$$

Montrer qu'il est conservé.

On pose  $E = E_x + E_y$ ,  $E$  étant l'énergie de l'oscillateur harmonique,  $E_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$  et  $E_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2y^2$ .

6. Considérons la transformation

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha + \frac{P_y}{m\omega_0}\sin\alpha & y = Y\cos\alpha + \frac{P_x}{m\omega_0}\sin\alpha \\ p_x = -m\omega_0 Y\sin\alpha + P_x\cos\alpha & p_y = -m\omega_0 X\sin\alpha + P_y\cos\alpha \end{cases}$$

- 6-a)** Montrer que la transformation est canonique.  
**6-b)** Ecrire le nouvel hamiltonien  $\mathcal{H}(X, Y, P_X, P_Y)$ .
7. On se propose de résoudre le problème en utilisant l'équation de Hamilton-Jacobi (HJ). On note par  $Q_1, Q_2, P_1$  et  $P_2$  les nouvelles variables.
- 7-a)** Ecrire l'équation de HJ. En déduire que l'on peut séparer les variables  $S(x, y; t, P_1, P_2) = S_x(x; P_1) + S_y(y; P_2) - Et$ ,  $S(x, y; P_1, P_2)$  étant l'action hamiltonienne.
- 7-b)** Expliciter les équations vérifiées respectivement par  $S_x(x; P_1)$  et  $S_y(y; P_2)$ . En déduire que

$$S(x, y; t, P_1, P_2) = \pm \int \sqrt{2mE_x - m^2\omega_0^2 x^2} dx \pm \int \sqrt{2pE_y - m^2\omega_0^2 y^2} dy - Et.$$

- 7-c)** Rappeler pourquoi  $Q_1, Q_2, P_1$  et  $P_2$  sont conservées. On pose  $P_1 = E$  et  $P_2 = E_y = E - E_x$ . Etablir les expressions de  $p_x, p_y, Q_1$  et  $Q_2$ .
- 7-d)** En utilisant les conditions initiales suivantes

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}$$

établir les trajectoires dans les nouvelles et les anciennes coordonnées,  $Q_1, Q_2, x(t)$  et  $y(t)$ .

## 4.6 Corrigé du rattrapage Janvier 2014

### EXERCICE 1

Un explorateur aperçoit dans le désert une oasis à un angle  $\arctg(\frac{5}{12})$  au dessus de l'horizontale. On se propose de déterminer la distance qui le sépare de l'oasis.

1. Expliciter l'expression de la fonctionnelle

$$\mathcal{S} = \int n_0(s)(1 - \lambda z) \sqrt{dx^2 + dz^2} = \int n_0(s)(1 - \lambda z) \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx$$

ce qui donne pour le lagrangien associé, étant donné que  $\mathcal{S} = \int \mathcal{L} dx$ , l'expression

$$\mathcal{L}(z, z' = \frac{dz}{dx}; x) = n_0(s)(1 - \lambda z) \sqrt{1 + (z')^2}$$

où  $x$  joue le rôle du temps.

Le moment conjugué est donné par

$$p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} = n_0(s)(1 - \lambda z) \frac{z'}{\sqrt{1 + (z')^2}}.$$

Le hamiltonien est donné ainsi par

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = z'p_z - \mathcal{L} &= n_0(s)(1 - \lambda z) \left( \frac{z'^2}{\sqrt{1 + (z')^2}} - \sqrt{1 + (z')^2} \right) \\ &= n_0(s)(1 - \lambda z) \frac{1}{\sqrt{1 + (z')^2}}.\end{aligned}$$

Comme  $\mathcal{H}$  ne dépend pas explicitement de  $x$ , il est conservé  $\mathcal{H} = C_0$ .

2. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = C_0 &\implies n_0(s)(1 - \lambda z) \frac{1}{\sqrt{1 + (z')^2}} = C_0 \\ &\implies C_0^2(1 + (z')^2) = n_0^2(s)(1 - \lambda z)^2 \\ &\implies z' = \sqrt{\frac{n_0^2}{C_0^2}(1 - \lambda z)^2 - 1} \\ &\implies \frac{dz}{\sqrt{\frac{n_0^2}{C_0^2}(1 - \lambda z)^2 - 1}} = dx\end{aligned}$$

On pose

$$Z = \frac{n_0}{C_0}(\lambda z - 1) \implies dZ = \lambda \frac{n_0}{C_0} dz$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\frac{dZ}{\sqrt{Z^2 - 1}} &= \frac{\lambda n_0}{C_0} dx \implies \operatorname{argch}(Z) = \frac{\lambda n_0}{C_0} x + C_1 \\ \implies Z &= \operatorname{ch} \left( \frac{\lambda n_0}{C_0} x + C_1 \right) \implies z = \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{C_0}{n_0} \operatorname{ch} \left( \frac{\lambda n_0}{C_0} x + C_1 \right) + 1 \right]\end{aligned}$$

or  $z(0) = 0$  et  $z'(0) = 5/12$  ce qui donne

$$\frac{C_0}{n_0} \operatorname{ch} C_1 + 1 = 0 \text{ et } \operatorname{sh} C_1 = 5/12 \implies C_1 = \operatorname{Argsh} \left( \frac{5}{12} \right) = \ln \left( \frac{5}{12} + \sqrt{1 + \left( \frac{5}{12} \right)^2} \right) = \ln \frac{3}{2}$$

ce qui donne

$$\frac{C_0}{n_0} = -\frac{1}{\operatorname{ch} \left( \ln \frac{3}{2} \right)} = -\frac{12}{13}$$

ce qui donne alors comme solution

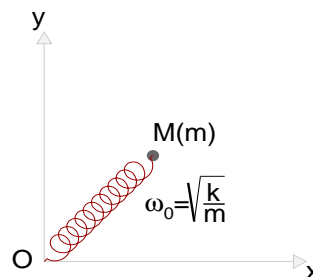
$$z = \frac{1}{\lambda} \left[ 1 - \frac{12}{13} \operatorname{ch} \left( \lambda \frac{13}{12} x + \ln \frac{3}{2} \right) \right]$$

La distance à la quelle se trouve l'oasis est  $z(L) = 0$  et donc

$$1 - \frac{12}{13} \operatorname{ch} \left( \lambda \frac{13}{12} L + \ln \frac{3}{2} \right) = 0 \implies L = \frac{1}{\lambda} \frac{12}{13} \left[ \operatorname{Argch} \frac{13}{12} - \ln \frac{3}{2} \right].$$

### EXERCICE 2

Considérons un oscillateur harmonique de masse  $m$  et de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et ce en deux dimensions, figure ci-contre. Le référentiel  $\mathcal{R}(O, xyz)$  est supposé galiléen. On utilise dans l'exercice les coordonnées cartésiennes.



1. Le vecteur position est repéré par  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ . Le vecteur vitesse est alors donné par

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}.$$

L'énergie cinétique  $T$  est donnée par  $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ .

2. La seule force est  $\vec{F} = -k(x\vec{i} + y\vec{j})$  ce qui donne pour l'énergie potentielle

$$dV = -\vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = k(x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = k(xdx + ydy) \implies V(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + C$$

la constante est prise égale à 0.

3. Le lagrangien du système est donné par

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}; t) = T - V(x, y) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2).$$

Calculons les moments conjugués

$$\begin{cases} p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \\ p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \end{cases}$$



4. Montrons que le lagrangien est invariant par rotation :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(s) - y\sin(s) \\ x\sin(s) + y\cos(s) \end{pmatrix}.$$

Pour une transformation infinitésimale,  $x' = x - \delta sy$  et  $y' = x\delta s + y$  ce qui donne  $\delta x = x' - x = -y\delta s$  et  $\delta y = y' - y = x\delta s$ . ainsi  $x'^2 + y'^2 = (x - y\delta s)(x - y\delta s) + (x\delta s + y)(x\delta s + y) \simeq x^2 - 2xy\delta s + y^2 + 2xy\delta s + \mathcal{O}(\delta s^2) = x^2 + y^2$ . De même pour la vitesse, on utilise la même démarche,  $\delta \dot{x} = -\dot{y}\delta s$  et  $\delta \dot{y} = \dot{x}\delta s$  et on déduit  $\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 = (\dot{x} - \dot{y}\delta s)(\dot{x} - \dot{y}\delta s) + (\dot{x}\delta s + \dot{y})(\dot{x}\delta s + \dot{y}) \simeq \dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\delta s + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\delta s + \mathcal{O}(\delta s^2) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ . ce qui permet d'écrire que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x', y', \dot{x}', \dot{y}') &= \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) - \frac{1}{2}k(x'^2 + y'^2) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + \mathcal{O}(\delta^2 s) = \mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \end{aligned}$$

et donc le lagrangien est invariant.

Le théorème de Noether nous donne la quantité conservée suivante

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \frac{\delta x}{\delta s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \frac{\delta y}{\delta s}$$

sachant que  $\delta x/\delta s = -y$  et  $\delta y/\delta s = x$  ce qui donne pour la quantité conservée

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \frac{\delta x}{\delta s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \frac{\delta y}{\delta s} = -p_x y + p_y x = -L_z$$

et qui n'est d'autre que le moment cinétique orbital selon l'axe  $Oz$ , axe autour duquel la rotation a lieu.

5. Le hamiltonien est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) &= T + V \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) \\ &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation  $k = m\omega_0^2$ .

Comme  $\mathcal{H}$  ne dépend pas explicitement du temps, alors il est conservé.

6. **Cette question sera comptée comme un bonus**

Pour vérifier que la transformation

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha + \frac{P_y}{m\omega_0}\sin\alpha & y = Y\cos\alpha + \frac{P_x}{m\omega_0}\sin\alpha \\ p_x = -m\omega_0 Y\sin\alpha + P_x\cos\alpha & p_y = -m\omega_0 X\sin\alpha + P_y\cos\alpha \end{cases}$$

il suffit de vérifier que les relations des crochets de Poisson sont préservées

$$\begin{aligned} \{X, X\} &= \{Y, Y\} = \{X, Y\} = \{Y, X\} = \{P_X, P_X\} = \{P_Y, P_Y\} = \{P_X, P_Y\} = \{P_X, P_Y\} \\ \text{et } \{X, P_X\} &= \{Y, P_Y\} = 1. \end{aligned}$$

Le nouvel hamiltonien peut être calculé de manière aisée et on obtient

$$\mathcal{H}(X, Y, P_X, P_Y) = \frac{P_X^2}{2m} + \frac{P_Y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2(X^2 + Y^2).$$

7. On se propose de résoudre le problème en utilisant l'équation de Hamilton-Jacobi (HJ). On note par  $Q_1, Q_2, P_1$  et  $P_2$  les nouvelles variables.

**7-a)** L'équation de HJ est donnée par

$$\mathcal{H}(x, y, \frac{\partial \mathcal{S}(x, y; t, P_1, P_2)}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{S}(x, y; t, P_1, P_2)}{\partial y}) + \frac{\partial \mathcal{S}(x, y; t, P_1, P_2)}{\partial t} = 0$$

Comme le hamiltonien est conservé, on peut séparer le paramètre  $t$ . De même, l'expression du hamiltonien peut être séparée en deux termes où le premier est  $\frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$  et le deuxième est  $\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2y^2$  et donc l'action hamiltonienne peut être séparée alors comme

$$S(x, y; t, P_1, P_2) = S(x, y; t, P_1, P_2) = S_x(x; P_1) + S_y(y; P_2) - Et.$$

**7-b)** Partons de l'hamiltonien et substituons  $p_x$  par  $\partial \mathcal{S} / \partial x$  et  $p_y$  par  $\partial \mathcal{S} / \partial y$ , et comme

$$\frac{\partial \mathcal{S}(x, y; t, P_1, P_2)}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{S}_x(x; P_1)}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial \mathcal{S}(x, y; t, P_1, P_2)}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{S}_y(y; P_2)}{\partial y}$$

nous obtenons

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial \mathcal{S}_x(x; P_1)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial \mathcal{S}_y(y; P_2)}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2y^2 = E = E_x + E_y$$

et on peut mettre le résultat précédent sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial \mathcal{S}_x(x; P_1)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 &= E_x \implies \frac{d\mathcal{S}_x(x; P_1)}{dx} = \pm \sqrt{2mE_x - m^2\omega_0^2x^2} \\ \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial \mathcal{S}_y(y; P_2)}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2y^2 &= E_y \implies \frac{d\mathcal{S}_y(y; P_2)}{dy} = \pm \sqrt{2mE_y - m^2\omega_0^2y^2} \end{aligned}$$

ce qui donne en intégrant

$$S(x, y; t, P_1, P_2) = \pm \int \sqrt{2mE_x - m^2\omega_0^2x^2} dx \pm \int \sqrt{2mE_y - m^2\omega_0^2y^2} dy - Et.$$

**7-c)** Dans la transformation de HJ, les variables  $Q_1, Q_2, P_1$  et  $P_2$  sont cycliques et donc les équations de Hamilton permettent d'affirmer qu'elles sont conservées. L'action hamiltonienne est de type 2. On pose  $P_1 = E$  et  $P_2 = E_y$  ce qui donne

$$\begin{cases} p_x = \frac{\partial \mathcal{S}(x,y;t,P_1,P_2)}{\partial x} = \pm \sqrt{2mE_x - m^2\omega_0^2 x^2} = \pm \sqrt{2m(P_1 - P_2) - m^2\omega_0^2 x^2} \\ p_y = \frac{\partial \mathcal{S}(x,y;t,P_1,P_2)}{\partial y} = \pm \sqrt{2mE_y - m^2\omega_0^2 y^2} = \pm \sqrt{2mP_2 - m^2\omega_0^2 y^2} \\ Q_1 = \frac{\partial \mathcal{S}(x,y;t,P_1,P_2)}{\partial P_1} = \pm \int \frac{m}{\sqrt{2m(P_1 - P_2) - m^2\omega_0^2 x^2}} dx - t \\ Q_2 = \frac{\partial \mathcal{S}(x,y;t,P_1,P_2)}{\partial P_2} = \mp \int \frac{m}{\sqrt{2m(P_1 - P_2) - m^2\omega_0^2 x^2}} dx \pm \int \frac{m}{\sqrt{2mP_2 - m^2\omega_0^2 y^2}} dy \end{cases}$$

**7-d)** On intègre l'équation donnant les nouvelles coordonnées et on obtient

$$\begin{aligned} Q_1 &= \pm \int \sqrt{\frac{m}{2(P_1 - P_2)}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{m\omega_0^2}{2(P_1 - P_2)} x^2}} - t = \pm \frac{1}{\omega_0} \arcsin \left( \sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2(P_1 - P_2)}} x \right) - t \\ Q_2 &= \mp \int \sqrt{\frac{m}{2(P_1 - P_2)}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{m\omega_0^2}{2(P_1 - P_2)} x^2}} \pm \int \sqrt{\frac{m}{2P_2}} \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{m\omega_0^2}{2P_2} y^2}} \\ &= \mp \frac{1}{\omega_0} \arcsin \left( \sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2P_2}} y \right) \pm \frac{1}{\omega_0} \arcsin \left( \sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2(P_1 - P_2)}} x \right) \end{aligned}$$

Pour les anciennes coordonnées, la détermination de l'équation de  $x$  en inversant celle de  $Q_1$ ,

$$x = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{m\omega_0^2}} \sin(\pm(\omega_0 t + Q_1 \omega_0))$$

avec les conditions initiales, nous avons

$$\left. \begin{aligned} x(0) = L &\implies \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{m\omega_0^2}} \sin(\pm Q_1 \omega_0) = L \\ \dot{x}(0) = 0 &\implies \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{m\omega_0^2}} \cos(Q_1 \omega_0) = 0 \end{aligned} \right\} \implies \begin{cases} Q_1 \omega_0 = \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{m\omega_0^2}} = L \end{cases}$$

ce qui implique  $x = L \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$

Quant à l'ancienne coordonnée  $y$ , on remplace  $x$  par son expression et on inverse  $Q_2$

$$Q_2 = \mp \frac{1}{\omega_0} \arcsin \left( \sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2P_2}} y \right) \pm \left( t + \frac{\pi}{2\omega_0} \right)$$

ce qui implique

$$y = \mp \sqrt{\frac{2P_2}{m\omega_0^2}} \sin \left[ \omega_0 \left( Q_2 \pm t \pm \frac{\pi}{2\omega_0} \right) \right]$$

et avec les conditions initiales  $y(0) = 0 \implies \sin\left(\omega_0\left(Q_2 \pm \frac{\pi}{2\omega_0}\right)\right) \implies Q_2 \pm \frac{\pi}{2\omega_0} = 0$   
 et

$$\dot{y}(0) = v \implies \sqrt{\frac{2P_2}{m\omega_0^2}}\omega_0\cos\left(\omega_0\left(Q_2 \pm \frac{\pi}{2\omega_0}\right)\right) = v \implies \sqrt{\frac{2P_2}{m\omega_0^2}} = v/\omega_0$$

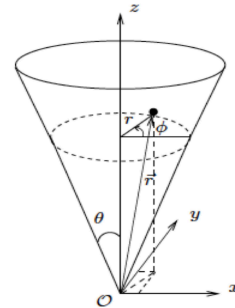
ce qui donne comme solution

$$y = \frac{v}{\omega_0}\sin\omega_0 t.$$

## 4.7 Contrôle Janvier 2015

### Exercice I : particule sur un cône

Considérons un point matériel qui se déplace sans frottement sous l'effet de son poids sur la surface intérieure d'un cône d'angle d'ouverture  $2\theta_0$ , voir figure ci-contre. Le repère  $\mathcal{R}(Oxyz)$  est considéré galiléen. On se propose d'utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange.



1. Exprimer l'énergie cinétique  $T$  et l'énergie potentielle  $V$  en utilisant le système de coordonnées cylindriques  $(\rho, \varphi, z)$ . En déduire l'expression du lagrangien. Quelles sont les grandeurs conservées ?
2. Exprimer la contrainte  $f(\rho, \varphi, z)$  à laquelle est soumis le point matériel. De quelle type de liaison s'agit-il ?
3. On note par  $\lambda$  le multiplicateur de lagrange. Ecrire les équations de Lagrange et montrer que

$$\lambda = \sin\theta_0 \left( mg\sin\theta_0 + \frac{L_z^2 \cos\theta_0}{m\rho^3} \right).$$

4. Etablir les équations du mouvement du point matériel.
5. En déduire les composantes généralisées  $Q_\rho, Q_\varphi$  et  $Q_z$  de la force de liaison. Montrer qu'elle est orthogonale à la surface du cône. Commenter.

### Exercice 2 : Transformations canoniques

Soit la transformation de contact suivante

$$\begin{aligned} Q &= p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{2}} \\ P &= p^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

où  $q > 0$  et  $p > 0$ .

1. Montrer, en utilisant les crochets de Poisson, que la dite transformation est canonique.
2. Etablir l'expression de la matrice jacobienne et montrer que la transformation est canonique.
3. Déterminer la fonction génératrice de type 2  $F_2(q, P)$  qui engendre cette transformation.

### Exercice 3 : Variable angle-action

Une particule de masse  $m$  se déplace selon  $Ox$  dans le champ d'un potentiel de la forme

$$V(x) = V_0 \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right).$$

1. Déterminer le lagrangien de la particule.
2. Etablir l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi et déterminer la solution générale  $W(x, \alpha)$  sous forme intégrale, où  $\alpha$  est la constante d'intégration.
3. Déterminer les bornes  $x_{b\pm}$  de variation de  $x$  et montrer que l'expression de l'action  $J$  est donnée par

$$J = \frac{2a}{\pi} \sqrt{2m} \left( \sqrt{E + V_0} - \sqrt{V_0} \right).$$

4. Etablir les équations canoniques en fonction des variables angle-action et déduire l'expression de la pulsation du mouvement  $\omega$ .

*Nous nous intéressons cette fois-ci au mouvement de petites oscillations.*

5. Montrer que le potentiel possède un minimum en  $x_e = 0$ .
6. On considère le mouvement autour de cette position,  $x - x_e$ . Exprimer le potentiel en ne gardant que les termes d'ordre 2.
7. Exprimer le Lagrangien et établir l'expression de l'équation du mouvement. En déduire la pulsation des petites oscillations  $\omega_0$ . Comparer à  $\omega$  et conclure.

## 4.8 Corrigé du contrôle Janvier 2015

### Corrigé de l'exercice 1 : Transformations canoniques (5pts)

Soit la transformation de contact suivante

$$\begin{aligned} Q &= p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{2}} \\ P &= p^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

où  $q > 0$  et  $p > 0$ . Soient  $X(q, p)$  et  $Y(q, p)$  deux grandeurs définies dans l'espace des phases.

2p

1. Tout d'abord, calculons

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} &= \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial}{\partial Q} + \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial}{\partial P} \\ &= \frac{3}{2} p^{1/2} q^{1/2} \frac{\partial}{\partial Q} - \frac{1}{2} p^{1/2} q^{-3/2} \frac{\partial}{\partial P} \end{aligned} \quad (0.25p)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} &= \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial}{\partial Q} + \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial}{\partial P} \\ &= \frac{1}{2} p^{-1/2} q^{3/2} \frac{\partial}{\partial Q} + \frac{1}{2} p^{-1/2} q^{-1/2} \frac{\partial}{\partial P} \end{aligned} \quad (0.25p)$$

Aussi,

$$\begin{aligned} \{X, Y\}_{(q,p)} &= \frac{\partial X}{\partial q} \frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial p} \frac{\partial Y}{\partial q} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial X}{\partial Q} \frac{\partial Y}{\partial Q} + \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial X}{\partial Q} \frac{\partial Y}{\partial P} + \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial X}{\partial P} \frac{\partial Y}{\partial Q} + \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial X}{\partial P} \frac{\partial Y}{\partial P} - \\ &\quad - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial X}{\partial Q} \frac{\partial Y}{\partial Q} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial X}{\partial Q} \frac{\partial Y}{\partial P} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial X}{\partial P} \frac{\partial Y}{\partial Q} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial X}{\partial P} \frac{\partial Y}{\partial P} \\ &= \frac{3}{4} q^2 \frac{\partial X}{\partial Q} \frac{\partial Y}{\partial Q} + \frac{3}{4} \frac{\partial X}{\partial Q} \frac{\partial Y}{\partial P} - \frac{1}{4} \frac{\partial X}{\partial P} \frac{\partial Y}{\partial Q} - \frac{1}{4} q^{-2} \frac{\partial X}{\partial P} \frac{\partial Y}{\partial P} - \\ &\quad - \frac{3}{4} q^2 \frac{\partial X}{\partial Q} \frac{\partial Y}{\partial Q} + \frac{1}{4} \frac{\partial X}{\partial Q} \frac{\partial Y}{\partial P} - \frac{3}{4} \frac{\partial X}{\partial P} \frac{\partial Y}{\partial Q} + \frac{1}{4} q^{-2} \frac{\partial X}{\partial P} \frac{\partial Y}{\partial P} \\ &= \frac{\partial X}{\partial Q} \frac{\partial Y}{\partial P} - \frac{\partial X}{\partial P} \frac{\partial Y}{\partial Q} = \{X, Y\}_{(Q,P)} \end{aligned} \quad (1.5p)$$

ce qui montre bien que la transformation est canonique puisqu'elle conserve les crochets de Poisson.

**Une autre démonstration consiste à montrer que  $\{Q, Q\} = 0$ ,  $\{P, P\} = 0$  et  $\{Q, P\} = 1$ . A considérer juste aussi.**

2p

2. Calculons l'expression de la matrice jacobienne  $M$  :

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} p^{1/2} q^{1/2} & \frac{1}{2} p^{-1/2} q^{3/2} \\ -\frac{1}{2} p^{1/2} q^{-3/2} & \frac{1}{2} p^{-1/2} q^{-1/2} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow {}^t M &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} p^{1/2} q^{1/2} & -\frac{1}{2} p^{1/2} q^{-3/2} \\ \frac{1}{2} p^{-1/2} q^{3/2} & \frac{1}{2} p^{-1/2} q^{-1/2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (0.5p)$$

Pour montrer que la transformation est canonique il suffit de montrer que  $M$  est symplectique. En effet,

$$\begin{aligned} {}^t M J M &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} p^{1/2} q^{1/2} & -\frac{1}{2} p^{1/2} q^{-3/2} \\ \frac{1}{2} p^{-1/2} q^{3/2} & \frac{1}{2} p^{-1/2} q^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} p^{1/2} q^{1/2} & \frac{1}{2} p^{-1/2} q^{3/2} \\ -\frac{1}{2} p^{1/2} q^{-3/2} & \frac{1}{2} p^{-1/2} q^{-1/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} p^{1/2} q^{1/2} & -\frac{1}{2} p^{1/2} q^{-3/2} \\ \frac{1}{2} p^{-1/2} q^{3/2} & \frac{1}{2} p^{-1/2} q^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} p^{1/2} q^{-3/2} & +\frac{1}{2} p^{-1/2} q^{-1/2} \\ -\frac{3}{2} p^{1/2} q^{1/2} & -\frac{1}{2} p^{-1/2} q^{3/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{0.75p} \end{aligned}$$

et donc  ${}^t M J M = J \implies M$  est symplectique et donc la transformation est canonique. 0.25p

3. Nous savons que

1p

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = qP^2 \implies F_2(q, P) = \frac{1}{2} q^2 P^2 + f(P). \quad \text{0.5p}$$

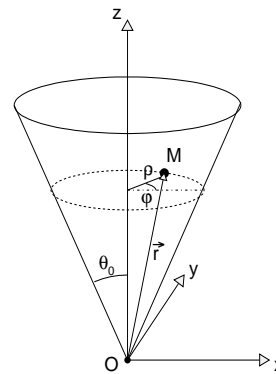
Or

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = Pq^2 + f'(P) \text{ et } Q = Pq^2 \implies f'(P) = 0 \implies f(P) = \text{Cst} = 0. \quad \text{0.5p}$$

ce qui donne  $F_2(q, P) = \frac{1}{2} q^2 P^2$ .

## Corrigé de l'exercice 2 : particule sur un cône (8pt)

Considérons une particule  $M$  de masse  $m$  qui se déplace sans frottement sous l'effet de son poids sur la surface intérieure d'un cône d'angle d'ouverture  $2\theta_0$ , voir figure ci-contre. Le repère  $\mathcal{R}(Oxyz)$  est considéré galiléen. On se propose d'utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour retrouver les composantes de la réaction  $\vec{R}$  de la surface du cône sur la particule.  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$  et  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  étant respectivement les bases cylindrique et sphérique. Le vecteur position  $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ .



1. Comme  $\mathcal{R}$  est galiléen, les forces appliquées à la particule  $M$  sont le poids  $m\vec{g} =$

0.5p

$-mg\vec{k}$  et  $\vec{R}$  la réaction de la surface interne du cône sur  $M$ . 0.25p

La position de  $M$  est repérée par  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$  et  $z$ . Comme  $M$  est

astreinte à se déplacer sur la surface interne du cône, nous avons une contrainte et donc le nombre de degrés de liberté est  $3 - 1 = 2$ . **0.25p.**

2.  $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{k} \implies \vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{k}$ . D'où l'énergie cinétique est

$$T = \frac{1}{2} m V^2(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2). \quad \mathbf{1.0p}$$

Quant à l'énergie potentielle, elle est donnée par :

$$\begin{aligned} dV &= -m \vec{g} \cdot d\overrightarrow{OM} \\ &= mg \vec{k} \cdot (d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{k}) \\ &= mg dz \end{aligned}$$

$$\implies V = mgz + K \quad \mathbf{0.75p}$$

où  $K$  est une constante que l'on prendra égale à 0.

Le lagrangien est ainsi donné par

$$\mathcal{L}(\rho, \varphi, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = T - V = \frac{1}{2} m V^2(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz. \quad \mathbf{0.25p}$$

Comme le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps alors l'énergie mécanique est conservée et donc celle-ci est une intégrale première. **0.25**

De même,  $\varphi$  est cyclique, ce qui implique grâce au théorème de Noether que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m \rho \dot{\varphi}^2 \text{ est conservée. } \quad \mathbf{0.25p.}$$

3.  $M$  doit rester en contact avec la surface interne du cône, ce qui implique que  $\rho/z = \text{tg}\theta_0 \implies z = \rho \cot\theta_0$ . La contrainte est donc donnée par  $f(\rho, \varphi, z) = z - \rho \cot\theta_0 = 0$ . C'est une contrainte qui ne relie que les coordonnées donc

holonome, et comme elle ne dépend pas du temps elle est scléronome. **0.5p**

4. Les équations de Lagrange en présence du multiplicateur de lagrange  $\lambda$  sont données par

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \rho} \implies m \ddot{\rho} - m \rho \dot{\varphi}^2 = -\lambda \cot\theta_0 \quad \mathbf{0.25p}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi} \implies m \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}^2) = 0 \quad \mathbf{0.25p}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \implies m \ddot{z} + mg = \lambda. \quad \mathbf{0.25p}$$

2.5p

0.5p

2.5p



Comme  $z - \rho \cotg \theta_0 = 0 \implies \ddot{z} = \ddot{\rho} \cotg \theta_0$  et  $L_z = m\rho^2 \dot{\varphi}$  qui est constant comme démontrée à la question précédente, nous obtenons le système d'équations

$$\begin{aligned} m\ddot{\rho} + \lambda \cotg \theta_0 &= \frac{L_z^2}{m\rho^3} \\ m\ddot{\rho} \cotg \theta_0 - \lambda &= -mg \end{aligned}$$

en substituant  $m\ddot{\rho} = \frac{L_z^2}{m\rho^3} - \lambda \cotg \theta_0$  dans la deuxième équation, nous obtenons

$$\lambda(\cotg^2 \theta_0 + 1) = mg + \frac{L_z^2}{m\rho^3} \cotg \theta_0 \implies \lambda = \sin \theta_0 \left( mg \sin \theta_0 + \frac{L_z^2}{m\rho^3} \cos \theta_0 \right) \quad \text{0.5p}$$

Les équations différentielles de chacune des coordonnées sont

$$\begin{aligned} m\ddot{\rho} - \frac{L_z}{m\rho^3} + \cos \theta_0 \left( mg \sin \theta_0 + \frac{L_z}{m\rho^3} \cos \theta_0 \right) &= 0 \\ \implies \ddot{\rho} - \frac{L_z}{m^2 \rho^3} \sin^2 \theta_0 + \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 &= 0 \quad \text{0.5p} \end{aligned}$$

et

$$\frac{d}{dt} (m\rho^2 \dot{\varphi}^2) = \frac{d}{dt} (L_z \dot{\varphi}) = L_z \ddot{\varphi} = 0 \implies \ddot{\varphi} = 0 \quad \text{0.25p}$$

et

$$\begin{aligned} \ddot{z} + g - \sin \theta_0 \left( g \sin \theta_0 + \frac{L_z^2}{m^2 \rho^3} \cos \theta_0 \right) &= 0 \\ \ddot{z} + g \cos^2 \theta_0 - \frac{L_z^2}{2m^2 \rho^3} \sin 2\theta_0 &= 0 \\ \ddot{z} + g \cos^2 \theta_0 - \frac{L_z^2}{2m^2 z^3} \cotg^3 \theta_0 \sin 2\theta_0 &= 0 \\ \ddot{z} - \frac{L_z^2 \cos^4 \theta_0}{m^2 \sin^2 \theta_0} \frac{1}{z^3} + g \cos^2 \theta_0 &= 0. \quad \text{0.5p} \end{aligned}$$

5. Les composantes généralisées de la force de liaison sont données par

0.75p

$$Q_\rho = \lambda \frac{\partial f}{\partial \rho} = -\lambda \cotg \theta_0 = -\cos \theta_0 \left( mg \sin \theta_0 + \frac{L_z^2}{m\rho^3} \cos \theta_0 \right) \quad \text{0.25p}$$

$$Q_\varphi = \lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{0.25p}$$

$$Q_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda = \sin \theta_0 \left( mg \sin \theta_0 + \frac{L_z^2}{m\rho^3} \cos \theta_0 \right). \quad \text{0.25p}$$

6. Nous savons que la force de liaison associée à la contrainte est  $\vec{R} = R_\rho \vec{e}_\rho + R_\varphi \vec{e}_\varphi + R_z \vec{k}$  avec 0.75p

$$Q_\rho = \vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \vec{R} \cdot \vec{e}_\rho = R_\rho = -\cos\theta_0 \left( mg \sin\theta_0 + \frac{L_z^2}{m\rho^3} \cos\theta_0 \right) \quad \text{0.25p}$$

$$Q_\varphi = \vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \vec{R} \cdot \rho \frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \varphi} = \rho \vec{R} \cdot \vec{e}_\varphi = \rho R_\varphi = 0 \implies R_\varphi = 0 \quad \text{0.25p}$$

$$Q_z = \vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{R} \cdot \vec{k} = R_z = \sin\theta_0 \left( mg \sin\theta_0 + \frac{L_z^2}{m\rho^3} \cos\theta_0 \right) \quad \text{0.25p}$$

nous en déduisons que les composantes généralisées ne sont d'autres que les composantes de  $\vec{R}$  dans la base cylindrique. Ainsi nous pouvons écrire

$$\vec{R} = - \left( mg \sin\theta_0 + \frac{L_z^2}{m\rho^3} \cos\theta_0 \right) \left( \cos\theta_0 \vec{e}_\rho - \sin\theta_0 \vec{k} \right).$$

7. Comme  $\vec{e}_r$  est tangent à la surface interne du cône et comme  $\vec{e}_\theta$  est dirigé vers l'extérieur du cône, alors  $\vec{n} = -\vec{e}_\theta$ .

Comme  $\vec{e}_\theta = \cos\theta_0 \vec{e}_\rho - \sin\theta_0 \vec{k}$ , alors

$$\vec{n} = -\cos\theta_0 \vec{e}_\rho + \sin\theta_0 \vec{k} \quad \text{0.25p. Ainsi}$$

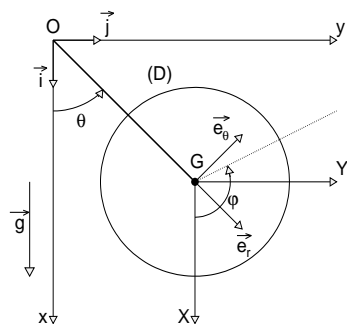
$$\begin{aligned} \vec{R} &= - \left( mg \sin\theta_0 + \frac{L_z^2}{m\rho^3} \cos\theta_0 \right) \left( \cos\theta_0 \vec{e}_\rho - \sin\theta_0 \vec{k} \right) \\ &= \left( mg \sin\theta_0 + \frac{L_z^2}{m\rho^3} \cos\theta_0 \right) \vec{n}. \quad \text{0.25p} \end{aligned}$$

ce qui montre bien que  $\vec{R} // \vec{n}$ . D'ailleurs c'est le résultat attendu étant donné que les forces de frottement sont nulles.

0.5p

### Corrigé de l'exercice 3 (7pt)

Un disque (D) de masse  $M$  et de rayon  $R$  se déplace dans le plan  $Oxy$  d'un repère  $\mathcal{R}(O,xyz)$  supposé galiléen. Le centre du disque  $G$  est attaché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur  $L = \|\vec{OG}\|$ , voir figure ci-contre. La position de  $G$  est repérée par l'angle  $\theta$  telle que  $\vec{OG} = L\vec{e}_r$ . La vitesse angulaire de rotation du disque autour de son axe  $GZ$  est  $\dot{\varphi}$ . On admet que Le fil est tendu au cour du mouvement. L'accélération de la pesanteur est  $\vec{g} = g\vec{i}$ . On note par  $I = \frac{1}{2}MR^2$  le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe  $GZ$ .



1. Le mouvement de ( $D$ ) est décrit par le mouvement du centre de masse dont les coordonnées sont  $x_G = L\cos\theta$  et  $y_G = L\sin\theta$  et sa rotation est décrite par l'angle  $\varphi$ . On en déduit que le couple de variables  $(\theta, \varphi)$  suffit pour le décrire. D'où le

0.5p

nombre de degrés de liberté est 2.

0.5p

2. L'expression de l'énergie cinétique  $T$  du disque ( $D$ ) est donnée par le théorème de Koenig :

1.0p

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}MV_G^2 + \frac{1}{2}{}^t\Omega I\Omega^2 \\ &= \frac{1}{2}MV_G^2 + \frac{1}{2}I_{GZ}\dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

0.25p

où  $V_G$  est la vitesse du centre de masse  $G$  et  $I_{GZ} = \frac{1}{2}MR^2$  est le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe  $GZ$  et  $\vec{\Omega}(D/\mathcal{R})$  est le vecteur rotation du disque par rapport à  $\mathcal{R}$ .

Le vecteur position  $\vec{OG} = L\vec{e}_r \implies \vec{V}_G = L\dot{\theta}\vec{e}_\theta \implies V_G^2 = L^2\dot{\theta}^2$ . Nous avons ainsi

$$T = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}M\left(L^2\dot{\theta}^2 + \frac{R^2}{2}\dot{\varphi}^2\right).$$

0.75p

3. Calculons le travail de  $M\vec{g}$  sachant que  $d\vec{OG} = Ld\theta\vec{e}_\theta$  :

1.0p

$$\delta W(M\vec{g}) = M\vec{g} \cdot Ld\theta\vec{e}_\theta = MLgd\theta\vec{i} \cdot \vec{e}_\theta = -MLg\sin\theta d\theta$$

Comme

$$dV = -\delta W = MLg\sin\theta d\theta \implies V = -MLg\cos\theta + K$$

et  $V(\theta = 0) = 0 \implies K = Mgl \implies V(\theta) = Mgl(1 - \cos\theta) = V_0(1 - \cos\theta)$ .

0.75p

Pour démontrer que  $\theta = 0$  est une position d'équilibre stable, il suffit de démontrer que  $V'(\theta = 0) = 0$  et  $V''(\theta = 0) > 0$ . Or  $V'(\theta) = V_0\sin\theta \implies V'(0) = 0$ . De même  $V''(\theta) = V_0\cos\theta \implies V''(\theta = 0) = V_0 > 0$  et donc  $\theta = 0$  est bien une position

d'équilibre stable.

0.25p

4. On considère les petites oscillations autour de  $\theta = 0$ .

i- Le développement limité de  $V(\theta)$  autour de  $\theta = 0$  à l'ordre 2 est

0.5p

$$V(\theta) = V(0) + V'(0)\theta + V''(0)\frac{\theta^2}{2} = V_0\frac{\theta^2}{2}.$$

0.5p

ii- Le lagrangien est ainsi donné par

1.25p

$$\mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = T - V = \frac{1}{2}M \left( L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{R^2}{2} \dot{\varphi}^2 \right) - V_0 \frac{\theta^2}{2}. \quad (0.25p)$$

Les équations de Lagrange s'expriment comme suit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = - \left( V_0 \theta - ML^2 \ddot{\theta} \right) \dot{\theta} = 0 \implies \ddot{\theta} + \frac{V_0}{ML^2} \theta = 0 \quad (0.25p)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = -\frac{1}{2}MR^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} = 0 \implies \ddot{\varphi} = 0 \implies \dot{\varphi} = \text{Cste} \quad (0.25p)$$

Sachant que  $\frac{V_0}{ML^2} = \frac{MgL}{ML^2} = \frac{g}{L} = \omega_0^2$  nous avons

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t - \gamma)$$

et en utilisant les conditions initiales nous obtenons

$$\theta_0 = A \cos \gamma \quad \text{et} \quad \dot{\theta}(t=0) = 0 = -A \omega_0 \sin \gamma \implies \gamma = 0 \quad \text{et} \quad A = \theta_0$$

et la solution est  $\theta = \theta_0 \cos \omega_0 t$  (0.25p)

Quant à  $\varphi(t)$ , nous avons  $\dot{\varphi} = \text{Cste} = \dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0 \implies \varphi(t) = \dot{\varphi}_0 t$  sachant

que  $\varphi(t=0) = 0$ . (0.25p)

5. Nous reprenons l'expression complète de  $V(\theta) = V_0(1 - \cos\theta)$ . Le lagrangien est égal à

$$\mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = T - V = \frac{1}{2}M \left( L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{R^2}{2} \dot{\varphi}^2 \right) - V_0(1 - \cos\theta)$$

ce qui donne pour les moments conjugués

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ML^2 \dot{\theta} \quad (0.25p) \quad \text{et} \quad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2}MR^2 \dot{\varphi} \quad (0.25p)$$

et pour le hamiltonien

$$\mathcal{H}(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) = \frac{p_\theta^2}{2ML^2} + \frac{p_\varphi^2}{MR^2} + V_0(1 - \cos\theta). \quad (0.25p)$$

6. La première intégrale première est l'énergie mécanique car le hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps. (0.25p)

La deuxième intégrale première est  $p_\varphi$  car  $\varphi$  est une variable cyclique et que

$$\dot{p}_\varphi = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = 0 \implies p_\varphi = \text{Cste}. \quad (0.25p)$$

Calculons l'expression du moment cinétique de  $(D)$  par rapport à  $G$  dans  $R_G$  :

$$\vec{\sigma}_G(D/\mathcal{R}_G) = I\Omega = \frac{1}{2}MR^2 \dot{\varphi} \vec{k}.$$

On en conclue que  $p_\varphi$  n'est d'autre que le moment cinétique de  $(D)$  par rapport à  $GZ$  et que ce dernier est une intégrale première. où  $I$  est la matrice d'inertie diagonale de  $(D)$  **0.25**

7. L'équation de Hamilton-Jacobi est donnée par

1.25p

$$\mathcal{H}(\theta, \varphi, \frac{\partial S(\theta, \varphi; \alpha_\theta, \alpha_\varphi, t)}{\partial \theta}, \frac{\partial S(\theta, \varphi; \alpha_\theta, \alpha_\varphi, t)}{\partial \varphi}) + \frac{\partial S(\theta, \varphi; \alpha_\theta, \alpha_\varphi, t)}{\partial t} = 0$$

En posant  $S(\theta, \varphi; \alpha_\theta, \alpha_\varphi, t) = W_\theta(\theta; \alpha_\theta, \alpha_\varphi) + W_\varphi(\varphi; \alpha_\theta, \alpha_\varphi) - Et$ , l'équation de Hamilton-Jacobi devient

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\theta, \varphi, \frac{\partial W_\theta(\theta; \alpha_\theta, \alpha_\varphi)}{\partial \theta}, \frac{\partial W_\varphi(\varphi; \alpha_\theta, \alpha_\varphi)}{\partial \varphi}) &= E \\ \Rightarrow \frac{1}{2ML^2} \left( \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + V_0(1 - \cos\theta) + \frac{1}{MR^2} \left( \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} \right)^2 &= E \quad \text{0.25p} \end{aligned}$$

Comme nous avons deux intégrales premières et deux constantes d'intégrations  $\alpha_\theta$  et  $\alpha_\varphi$ , on prend  $\alpha_\varphi = p_\varphi$  et  $\alpha_\theta = E$ . Les équations précédentes deviennent

$$\begin{aligned} \frac{1}{2ML^2} \left( \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + V_0(1 - \cos\theta) + \frac{p_\varphi^2}{MR^2} &= E \quad \text{0.25p} \\ \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} &= p_\varphi \quad \text{0.25p} \end{aligned}$$

Les solutions sous formes intégrales sont alors

$$\begin{aligned} W_\theta(\theta; E, p_\varphi) &= \pm \int \sqrt{2ML^2 \left( E - V_0(1 - \cos\theta) - \frac{p_\varphi^2}{MR^2} \right)} d\theta \quad \text{0.25p} \\ W_\varphi(\varphi; E, p_\varphi) &= \pm \int p_\varphi d\varphi. \quad \text{0.25p} \end{aligned}$$

**Questions bonus (2pt) :**

**On se place à nouveau dans le cas des petites oscillations autour de  $\theta = 0$ .**

8. Reexprisons  $W_\theta$  et  $W_\varphi$  avec  $p_\varphi = 0$

0.25p

$$\begin{aligned} W_\theta(\theta; E, p_\varphi) &= \pm \int \sqrt{2ML^2 \left( E - V_0 \frac{\theta^2}{2} \right)} d\theta \\ &= \pm \sqrt{b} \int \sqrt{1 - a \frac{\theta^2}{2}} d\theta \\ W_\varphi(\varphi; E, p_\varphi) &= \pm \int p_\varphi d\varphi = 0. \quad \text{0.25p} \end{aligned}$$

avec  $a = V_0/E$  et  $b = 2ML^2E$ .

9. Trouvons les bornes de variations de  $\theta$  en prenant  $\mathcal{H}(\theta_b, \varphi_b, p_\theta = 0, p_\varphi = 0) = V_0 \frac{\theta^2}{2} = E$ , ce qui implique que

0.25p

$$\theta_{b\pm} = \pm \sqrt{\frac{2E}{V_0}}. \quad \text{0.25p}$$

1.0p

10. Calculons l'action  $J_\theta$

$$\begin{aligned} J_\theta &= \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{b}}{2\pi} \left[ \int_{\theta_{b-}}^{\theta_{b+}} \sqrt{1 - a \frac{\theta^2}{2}} d\theta - \int_{\theta_{b+}}^{\theta_{b-}} \sqrt{1 - a \frac{\theta^2}{2}} d\theta \right] \\ &= \frac{\sqrt{b}}{\pi} \int_{\theta_{b-}}^{\theta_{b+}} \sqrt{1 - a \frac{\theta^2}{2}} d\theta \\ &= \frac{2\sqrt{b}}{\pi} \int_0^{\theta_{b+}} \sqrt{1 - a \frac{\theta^2}{2}} d\theta \quad \text{0.5p} \end{aligned}$$

On pose  $\sin x = \sqrt{\frac{a}{2}}\theta \implies \cos x dx = \sqrt{\frac{a}{2}}d\theta$ , avec  $\sin x_+ = \sqrt{\frac{a}{2}}\theta_{b+} = \sqrt{\frac{V_0}{2E}}\sqrt{\frac{2E}{V_0}} = 1 \implies x_+ = \pi/2$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} J_\theta &= \frac{2\sqrt{b}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 x} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos x dx \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{b}{a}} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{b}{a}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{b}{a}} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi \right) \\ &= \sqrt{\frac{ML^2}{V_0}} E \quad \text{0.5p} \end{aligned}$$

**Veillez bien noter cette deuxième approche considérée aussi juste :**

**On utilise les invariants de Poincaré qui permettent d'écrire que**

$$\oint_C p dq = \int \int_S dp dq$$

la double intégrale étant faite sur la surface délimitée par le chemin fermé ( $C$ ). En effet, la surface délimitée par ( $C$ ) est l'ellipse dont les demi-axes sont donnés par  $\theta_{b+}$  et  $p_{\theta_{b+}}$  qui est la valeur maximale que peut prendre  $p_\theta$  et qui n'est

d'autre que celle correspondant au cas où l'énergie mécanique est complètement sous forme d'énergie cinétique et donc  $V = 0$ , ce qui donne  $p_{\theta_{b+}} = \sqrt{2ML^2E}$ . Or la surface d'une ellipse de demi-axes  $a$  et  $b$  est  $\pi ab$ , ce qui donne en utilisant ce résultat

$$J_{\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_S dp_{\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \pi \times \sqrt{\frac{2E}{V_0}} \times \sqrt{2ML^2E} = E \sqrt{\frac{ML^2}{V_0}}.$$

11. Inversons la relation précédente

0.5p

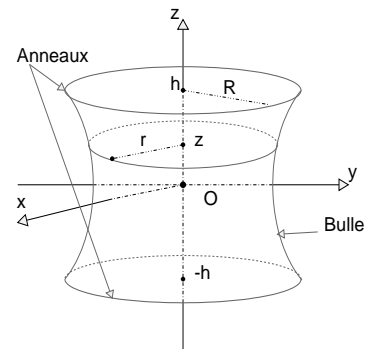
$$E = \sqrt{\frac{V_0}{ML^2}} J_{\theta} \implies \omega_{\theta} = \sqrt{\frac{V_0}{ML^2}} = \frac{g}{L} = \omega_0. \quad (0.5p)$$

On voit bien que l'on obtient le même résultat que précédemment.

## 4.9 Contrôle de février 2014

### Exercice I : Surface minimale d'une bulle de savon

On considère une bulle de savon tendue entre deux anneaux de même rayon  $R$ , figure ci-contre. On se propose de trouver la surface d'aire minimale tendue entre les deux anneaux en fonction de la distance  $d = 2h$  qui les sépare en utilisant le calcul variationnel. La bulle est symétrique par rapport à l'axe  $Oz$  et l'on paramètre la position d'un point de la surface de la bulle par  $r = r(z)$ .



1. En prenant la bande de surface comprise entre  $(z, r)$  et  $(z + dz, r + dr)$ , établir l'expression de l'aire infinitésimale de cette bande  $dA$ . En déduire que l'aire est donnée par l'expression

$$A = \int_{-h}^h 2\pi r \sqrt{1 + r'^2} dz$$

où  $r' = \frac{dr}{dz}$  avec  $r(-h) = r(h) = R$ .

2. Quelle est la fonctionnelle qui joue le rôle du lagrangien  $\mathcal{L}(r, r'; z)$ ?
3. Montrer que l'équation d'Euler donne

$$1 + r'^2 - r r'' = 0$$

où  $r'' = \frac{d^2r}{dz^2}$ .

4. Exprimer le hamiltonien  $\mathcal{H}$  correspondant au lagrangien  $\mathcal{L}(r, r')$ . (Exprimer  $H$  en fonction de  $r$  et de  $r'$ ).
5. Montrer que  $H$  est une constante. On prend cette constante égale à  $-2\pi k$ .
6. En utilisant le résultat de la question 5, montrer que l'équation différentielle vérifiée par  $r(z)$  qui minimise l'aire de la surface est donnée par

$$r'' - \frac{1}{k}r = 0.$$

En déduire la solution  $r(z)$  en explicitant les constantes d'intégration en fonction de  $R$ , de  $k$  et de  $d$ .<sup>7</sup>

## Exercice II : Particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Une particule de masse  $m$  et de charge  $q$ , dont la position est repérée par dans la base cartésienne  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  par  $\vec{r} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ , se déplace dans une région où règne un champ électromagnétique  $(\vec{E} = -\vec{\nabla}(\varphi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A})$ , où  $\vec{A} = \vec{A}(x_1, x_2, x_3; t)$  et  $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3; t)$  sont respectivement le potentiel scalaire et le potentiel vecteur et  $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$  est l'opérateur nabla. La vitesse de la particule est donnée par  $\vec{v} = (v_1 = \dot{x}_1, v_2 = \dot{x}_2, v_3 = \dot{x}_3)$ . Les coordonnées généralisées et les vitesses généralisées coïncident avec les coordonnées et les composantes de la vitesse de la particule.

1. Montrer que la force de Lorentz  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$  dérive d'un potentiel généralisé de la forme

$$V = q(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}).$$

**Dans la suite de l'exercice, l'on considère que  $\vec{E} = \vec{0}$  et  $\vec{B} = B_0\vec{k}$ , où  $B_0$  est constant. On note  $\frac{qB_0}{m} = \omega_0$ . A l'instant initial  $x_1(t=0) = 0, x_2(t=0) = 0, x_3(t=0) = 0$ , et la vitesse initiale est  $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$ .**

2. Montrer que dans ce cas le potentiel vecteur  $\vec{A}$  est de la forme  $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \wedge \vec{r}$ .
3. Déterminer l'expression du lagrangien  $\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3; t)$  de la particule.
4. Etablir les équations de Lagrange et montrer que les équations du mouvement sont données par

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - \omega_0 \dot{x}_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0 \dot{x}_1 &= 0 \\ \ddot{x}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Conclure sur le mouvement selon  $Oz$ .

---

7. On rappelle que l'équation différentielle  $f''(x) - af(x) = 0$  a pour solution  $f(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes d'intégration à déterminer.



5. Résoudre les équations différentielles et trouver les équations horaires  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  et  $x_3(t)$ .

### Exercice III : Angle-action

Considérons une particule  $m$  soumise au potentiel :

$$V(q) = \alpha|q|.$$

1. Déterminer l'expression du hamiltonien  $\mathcal{H}(q, p)$  et montrer que c'est une intégrale première.
2. Déterminer les valeurs limites que peut prendre  $q$ .
3. Etablir l'équation de Hamilton-Jacobi et montrer que la variable action est donnée par l'expression

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-E/\alpha}^{E/\alpha} \sqrt{2m(E - \alpha|q|)} dq$$

où  $E$  est l'énergie mécanique de la particule.

4. Calculer l'expression de  $J$  et déduire la fréquence des oscillations  $\omega$  de la particule.

On donne

$$\int_0^{a/b} \sqrt{a - bx} dx = \frac{2}{3b} a^{3/2}.$$

### 4.10 Corrigé du contrôle de janvier 2015

#### Exercice I (6p)

1. L'élément de surface est donné par

0.75p

$$dA = 2\pi r dl = 2\pi r \sqrt{dz^2 + dr^2} = 2\pi r \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} dz = 2\pi r \sqrt{1 + r'^2} dz. \quad \text{0.5p}$$

Ce qui donne

$$A = \int_{-h}^h dA = \int_{-h}^h 2\pi r \sqrt{1 + r'^2} dz. \quad \text{0.25p}$$

2. Minimiser l'aire la surface, en utilisant le principe de moindre action, revient à utiliser comme fonctionnelle représentant le lagrangien  $\mathcal{L}(r, r'; z) = 2\pi r \sqrt{1 + r'^2}$

0.5p

0.5p.

3. L'équation d'Euler est donnée par

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dz} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r'} = 0 \quad \text{0.25p}$$

avec  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 2\pi\sqrt{1+r'^2}$  0.25p et  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r'} = \frac{2\pi r r'}{\sqrt{1+r'^2}}$  0.25p, ce qui donne

$$\begin{aligned} 2\pi\sqrt{1+r'^2} - \frac{d}{dz} \left( \frac{2\pi r r'}{\sqrt{1+r'^2}} \right) &= 0 \\ \implies 2\pi\sqrt{1+r'^2} - \left( \frac{2\pi r r'^2}{\sqrt{1+r'^2}} + \frac{2\pi r r''}{\sqrt{1+r'^2}} - \frac{2\pi r r'^2 r''}{(1+r'^2)^{3/2}} \right) &= 0 \\ \implies 1+r'^2 - r'^2 - r r'' + \frac{r r'^2 r''}{1+r'^2} &= 0 \\ \implies 1+r'^2 - r r'' - r r'^2 r'' + r r'^2 r'' &= 0 \\ \implies 1+r'^2 - r r'' &= 0. \quad \text{1.0p} \end{aligned}$$

1.0p

4. Le moment conjugué est  $p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r'}$ , ce qui donne

$$\mathcal{H} = p_r r' - \mathcal{L} = \frac{2\pi r r'^2}{\sqrt{1+r'^2}} - 2\pi r \sqrt{1+r'^2} = \frac{-2\pi r}{\sqrt{1+r'^2}} \quad \text{1.0p}$$

0.5p

5.  $\mathcal{H}$  ne dépend pas explicitement de  $z$  alors  $\mathcal{H}$  est constante 0.5p :

$$\mathcal{H} = \frac{-2\pi r}{\sqrt{1+r'^2}} = -2\pi k \implies \frac{r}{\sqrt{1+r'^2}} = k.$$

1.5p

6. Nous avons  $1+r'^2 = r^2/k^2$ , ce qui donne

$$\frac{r^2}{k^2} - r r'' = 0 \implies -r \left( r'' - \frac{1}{k^2} r \right) = 0 \implies r'' - \frac{1}{k^2} r = 0 \quad \text{0.5p}$$

car  $r \neq 0$ . La solution est alors égale à

$$r(z) = A e^{\frac{z}{k}} + B e^{-\frac{z}{k}}$$

comme  $r(h) = A e^{\frac{h}{k}} + B e^{-\frac{h}{k}} = r(-h) = A e^{-\frac{h}{k}} + B e^{\frac{h}{k}} = R \implies A = B$ . D'où  $r(z) = A(e^{\frac{z}{k}} + e^{-\frac{z}{k}}) = 2A \text{ch}(\frac{z}{k})$ . Comme  $z(h) = R \implies A = R/2 \text{ch}(\frac{r}{k})$ . La solution est ainsi

$$r(z) = \frac{R}{\text{ch}(\frac{d}{2k})} \text{ch}\left(\frac{r}{k}\right). \quad \text{1.0p}$$

## Exercice II (10p)

1. Voir TD et cours. **2.0p**

2. Nous avons

1.0p

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}}(\vec{A}) &= \frac{1}{2}\vec{\text{rot}}(\vec{B} \wedge \vec{r}) \\ &= \frac{B_0}{2}\vec{\text{rot}}(\vec{k} \wedge [x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}]) \\ &= \frac{B_0}{2}\vec{\text{rot}}(x_1\vec{j} - x_2\vec{i}) = \frac{B_0}{2} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & & \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & & \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & & \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{B_0}{2} \left( \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \right) \vec{k} = B_0\vec{k}. \quad \mathbf{1.0p}\end{aligned}$$

3.  $\vec{E} = 0 \implies \varphi = Cst = 0$  ce qui implique  $V = -q\vec{v} \cdot \vec{A}$  **0.5p**. D'où, le lagrangien

3.0p

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + q\vec{v} \cdot \vec{A}. \quad \mathbf{0.5p}$$

Comme  $\vec{A} = \frac{B_0}{2}\vec{k} \wedge (x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = \frac{B_0}{2}(x_1\vec{j} - x_2\vec{i})$  **1.0p**, nous avons

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + q\frac{B_0}{2}(-\dot{x}_1x_2 + x_1\dot{x}_2). \quad \mathbf{1.0p}$$

4. Les équations de lagrange nous donnent

1.75p

$$\begin{aligned}q\frac{B_0}{2}\dot{x}_2 - m\ddot{x}_1 + q\frac{B_0}{2}\dot{x}_2 &= 0 \implies \ddot{x}_1 - \omega_0\dot{x}_2 \quad \mathbf{0.75p} \\ -q\frac{B_0}{2}\dot{x}_1 - m\ddot{x}_2 - q\frac{B_0}{2}\dot{x}_1 &= 0 \implies \ddot{x}_2 + \omega_0\dot{x}_1 = 0 \quad \mathbf{0.75p} \\ \ddot{x}_3 &= 0\end{aligned}$$

Le mouvement selon  $Oz$  est un mouvement uniforme. **0.25p**

2.25p

5.

$$\ddot{x}_2 + \omega_0\dot{x}_1 = 0 \implies \dot{x}_2 = -\omega_0x_1 + K$$

avec  $K = 0$  car  $\dot{x}_2(0) = 0$ , ce qui implique

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2x_1 = 0 \implies x_1 = A\sin(\omega_0t - \psi) \quad \mathbf{0.5p}$$

Comme  $x_1(0) = 0 = A\sin\psi \implies \psi = 0$  et  $\dot{x}(0) = v_{0\perp} = A\omega_0 \implies A = v_{0\perp}/\omega_0 \implies$

$$x_1(t) = \frac{v_{0\perp}}{\omega_0}\sin\omega_0t \quad \mathbf{0.75p}$$

$$\ddot{x}_2 = -\omega_0v_{0\perp}\cos\omega_0t \implies \dot{x}_2 = -v_{0\perp}\sin\omega_0t + K$$

avec  $K = 0$  car  $\dot{x}_2(0) = 0$ . Aussi  $x_2 = \frac{v_{0\perp}}{\omega_0} \cos \omega_0 t + K$  avec  $K = -\frac{v_{0\perp}}{\omega_0}$  car  $x_2(0) = 0 \implies x_2 = \frac{v_{0\perp}}{\omega_0} (\cos \omega_0 t - 1)$ . **1.0p**

**Prière de considérer justes les cas où l'on trouve dans les expression  $k$  au lieu de  $k^2$ , en raison de l'erreur de frappe dans l'épreuve bien que cette dernière soit corrigée séance tenante.**

### Exercice III (4p)

0.75p

1. L'énergie cinétique  $T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$  et le lagrangien est égal à  $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \alpha|q|$ .

Comme  $p = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q} = m\dot{q} \implies \mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L} = \frac{p^2}{2m} + \alpha|q|$  **0.5p.**

$\mathcal{H}$  est une intégrale première car  $\mathcal{H}$  ne dépend pas explicitement du temps. **0.25p**

0.5p

2. Les valeurs limites de  $q$  sont données par  $\mathcal{H}(q, p = 0) = \alpha|q| = E \implies q_{min} = -E/\alpha$  et  $q_{max} = E/\alpha$  **0.5p.**

1.25p

3. Comme le système est conservatif, alors  $S(q; P = E) = W(q; P = E) - Et$ . Les équations de Hamilton-Jacobi

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \mathbf{0.25p}$$

$$\implies \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \alpha|q| = E \implies \frac{\partial W}{\partial q} = \pm \sqrt{2m(E - \alpha|q|)}. \quad \mathbf{0.5p}$$

La variable action  $J$  est donnée par

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq \quad \mathbf{0.25p} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( + \int_{-E/\alpha}^{+E/\alpha} \sqrt{2m(E - \alpha|q|)} dq - \int_{E/\alpha}^{-E/\alpha} \sqrt{2m(E - \alpha|q|)} dq \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-E/\alpha}^{E/\alpha} \sqrt{2m(E - \alpha|q|)} dq \quad \mathbf{0.25p} \end{aligned}$$

**Prière de considérer les réponses avec le facteur  $1/2\pi$  au lieu de  $1/\pi$  correcte à cause de l'erreur de frappe sur l'épreuve.**

1.5p

4. En prenant  $a = E$  et  $b = \alpha$ , nous avons

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{\pi} \int_{-E/\alpha}^{E/\alpha} \sqrt{2m(E - \alpha|q|)} dq = \frac{2}{\pi} \int_0^{E/\alpha} \sqrt{2m(E - \alpha q)} dq && \text{0.5p} \\
 &= \frac{2\sqrt{2m}}{\pi} \times \frac{2}{3\alpha} E^{3/2} = \frac{4\sqrt{2m}}{3\pi\alpha} E^{3/2} \\
 \Rightarrow E &= \left( \frac{3\pi\alpha}{4\sqrt{2m}} J \right)^{2/3} && \text{0.5p}
 \end{aligned}$$

La fréquence est ainsi égale à  $\omega = \partial E / \partial J = \frac{2}{3} \left( \frac{3\pi\alpha}{4\sqrt{2m}} \right)^{2/3} J^{-1/3} = \frac{\pi\alpha}{2\sqrt{2mE}}$  0.5p

**Prière de considérer les réponses avec le facteur  $1/2\pi$  au lieu de  $1/\pi$  correcte à cause de l'erreur de frappe sur l'épreuve.**



---

## Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Formalisme lagrangien</b>	<b>3</b>
1.1	Exercices . . . . .	3
1.1.1	Exercice . . . . .	3
1.1.2	Exercice . . . . .	3
1.1.3	Exercice . . . . .	4
1.1.4	Exercice . . . . .	5
1.1.5	Exercice . . . . .	5
1.1.6	Exercice . . . . .	5
1.1.7	Exercice . . . . .	6
1.1.8	Exercice . . . . .	6
1.1.9	Exercice : Machine d'Atwood . . . . .	7
1.1.10	Exercice . . . . .	7
1.1.11	Exercice . . . . .	8
1.1.12	Exercice . . . . .	8
1.1.13	Exercice . . . . .	9
1.1.14	Exercice . . . . .	10
1.1.15	Exercice . . . . .	10
1.1.16	Exercice . . . . .	11
1.2	Corrigés des exercices . . . . .	11
1.2.1	Corrigé . . . . .	11
1.2.2	Corrigé . . . . .	14
1.2.3	Corrigé . . . . .	16
1.2.4	Corrigé . . . . .	19
1.2.5	Corrigé . . . . .	21
1.2.6	Corrigé . . . . .	22
1.2.7	Corrigé . . . . .	24
1.2.8	Corrigé . . . . .	26

1.2.9	Corrigé : Machine d'Atwood. Contraintes . . . . .	28
1.2.10	Corrigé . . . . .	30
1.2.11	Corrigé . . . . .	32
1.2.12	1 <sup>ère</sup> méthode . . . . .	34
1.2.13	2 <sup>ème</sup> méthode . . . . .	35
1.2.14	Corrigé . . . . .	37
1.2.15	Corrigé . . . . .	38
1.2.16	Corrigé . . . . .	41
1.2.17	Corrigé . . . . .	42
1.2.18	Corrigé . . . . .	44
<b>2</b>	<b>Formalisme Hamiltonien</b> . . . . .	<b>45</b>
2.1	Exercices . . . . .	45
2.1.1	Exercice . . . . .	45
2.1.2	Exercice . . . . .	46
2.1.3	Exercice . . . . .	46
2.1.4	Exercice . . . . .	46
2.1.5	Exercice . . . . .	47
2.1.6	Exercice . . . . .	47
2.1.7	Exercice . . . . .	48
2.1.8	Exercice . . . . .	48
2.1.9	Exercice . . . . .	48
2.2	Corrigés . . . . .	49
2.2.1	Corrigé . . . . .	49
2.2.2	Corrigé . . . . .	52
2.2.3	Corrigé . . . . .	54
2.2.4	Corrigé . . . . .	56
2.2.5	Corrigé . . . . .	57
2.2.6	Corrigé . . . . .	60
2.2.7	Corrigé . . . . .	62
2.2.8	Corrigé . . . . .	65
2.2.9	Corrigé . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Formalisme de Hamilton-Jacobi</b> . . . . .	<b>69</b>
3.1	Exercices . . . . .	69
3.1.1	Exercice . . . . .	69
3.1.2	Exercice . . . . .	70
3.1.3	Exercice . . . . .	71
3.2	Corrigés . . . . .	71
3.2.1	Corrigé . . . . .	71
3.2.2	Corrigé . . . . .	75
3.2.3	Corrigé . . . . .	77



---

<b>4 Contrôles</b>	<b>81</b>
4.1 Contrôle Novembre 2013 . . . . .	81
4.2 Corrigé du contrôle Novembre 2013 . . . . .	83
4.3 Contrôle Janvier 2014 . . . . .	90
4.4 Corrigé du contrôle Janvier 2015 . . . . .	92
4.5 Contrôle de Rattrapage Janvier 2014 . . . . .	100
4.6 Corrigé du rattrapage Janvier 2014 . . . . .	102
4.7 Contrôle Janvier 2015 . . . . .	108
4.8 Corrigé du contrôle Janvier 2015 . . . . .	109
4.9 Contrôle de février 2014 . . . . .	119
4.10 Corrigé du contrôle de janvier 2015 . . . . .	121

## TABLE DES MATIÈRES

---

---

## Table des figures

---

1.1	Système de treillis. . . . .	3
1.2	Mouvent d'une bille à l'intérieur d'une sphère. . . . .	4
1.3	Mouvent d'une perle sur un cerceau. . . . .	4
1.4	Système de treillis. . . . .	11
1.5	Mouvent d'une bille à l'intérieur d'une sphère. . . . .	14
1.6	Mouvent d'une perle sur un cerceau. . . . .	16
2.1	Portrait de phase de la particule libre. Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs de l'énergie $E$ . . . . .	66